Lezione 6 (Addendum) — 4 Maggio 2007

Docente: Luca Schenato *Stesori: A. Pegoraro*

(Addendum)

6.1 Stimatore statico con perdita pacchetti: Caso scalare (con $c = 1$)

Se questo documento non è preceduto dalla lezione PSC 6b/2007, richiamo alcuni fatti fondamentali:

1. assumiamo per semplicità di avere un modello di stato scalare con $a \neq 0$, $q > 0$, $r > 0$. In uno stimatore dello stato con perdita di pacchetti e guadagno costante K, la varianza d'errore evolve secondo:

$$\tilde{p}_{k+1} \triangleq \tilde{p}_{k+1|k} = \mathcal{L}_{\gamma_k}(K, \tilde{p}_k) = a^2(1 - \gamma_k K)^2 \tilde{p}_k + \gamma_k a^2 K^2 r + q \tag{6.1}$$

dove le γ_k sono v.a. bernoulliane di parametro $\lambda \in [0, 1]$ indipendenti; le $\tilde{p}_k$ (ovvero $\mathcal{L}_{\gamma_{k-1}}(K, \tilde{p}_{k-1})$) sono quindi v.a. e non ha senso per la loro successione parlare di convergenza (data una $p_0 \geq 0$ iniziale) [1], il che invece ha senso se si analizza la successione delle aspettazioni $\mathbb{E}[\mathcal{L}_{\gamma_{k-1}}(K, \tilde{p}_{k-1})]$.

2. La successione delle aspettazioni $v_{k+1} \triangleq \mathbb{E}[\mathcal{L}_{\gamma_k}(K, \tilde{p}_k)]$ si dimostra essere:

$$v_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_k) \triangleq a^2(\lambda(1 - K)^2 + 1 - \lambda)v_k + \lambda K^2 a^2 r + q \ , \tag{6.2}$$

con $v_0 = p_0$. $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_k)$ è un operatore positivo, affine e monotono non decrescente rispetto a v_k, per ogni K fissato[2] (e non è in generale monotono rispetto a λ).

Ricordando quindi le ipotesi $a \neq 0$, $q, r > 0$ oltre a quelle poste nell'aver ricavato la successione $\{\tilde{p}_k\}$, si osserva:

1. nel caso $\lambda = 0$ (nessuna misura ricevuta: lo stimatore è in catena aperta e si basa sul modello nominale e su $\bar{x}_0$) $v_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_0(K, v_k) = \bar{\mathcal{L}}_0(v_k) = a^2 v_k + q$ converge $\forall v_0 \geq 0$ se e solo se $|a| < 1$ oppure $|a| = 1$ e $q = 0$ (rispettivamente, converge a $\frac{q}{1-a^2}$ [3] oppure a v_0).

2. Per $\lambda \neq 0$, si può dimostrare che: se $|a| < 1$ la successione $\{v_k\}$ converge a $v_\infty = \frac{\lambda K^2 a^2 r + q}{1 - a^2(\lambda(1-K)^2 + 1 - \lambda)}$ [4] per ogni $v_0 \geq 0$ e solamente per opportuni $K \in (K_{min}, K_{max})$[5]. Se $|a| \geq 1$ esiste λ_c tale che per $\lambda > \lambda_c$ la successione v_k converge a v_∞ per ogni $v_0 \geq 0$ e per i soli $K \in (K_{min}, K_{max})$, mentre per $\lambda \leq \lambda_c$ non converge per alcun K.
Infatti, si può osservare che, se $a^2(\lambda(1 - K)^2 + 1 - \lambda) = 1$, ovvero se $K = K_{min,max} =$

[1] Si nota per inciso che nel caso degenere $a = 0$ tutti i termini valgono q, qualsiasi siano p_0, K, $\{\gamma_k\}$

[2] dati v' e v'', $v'' \geq v'$, $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v'') \geq \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v')$.

[3] É la somma della serie $q \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i}$.

[4] É la somma della serie $(\lambda K^2 a^2 r + q) \sum_{i=0}^{\infty} (a^2(\lambda(1 - K)^2 + 1 - \lambda))^i$.

[5] con questa notazione intendo estremi esclusi.

$1 \pm \sqrt{1 + \frac{1-a^2}{a^2\lambda}}$, la successione $\{v_k\}$ non converge per alcun v_0. $K_{min,max}$ esistono solo se $\lambda \geq 1 - \frac{1}{a^2} \triangleq \lambda_c$ e, poiché $\lambda \geq 0$, se $\lambda_c < 0$ (ovvero $|a| < 1$), $\lambda \geq \lambda_c$ è sempre verificata.
Se $K \in (-\infty, K_{min}) \cup (K_{max}, +\infty)$ oppure nel caso in cui non esistano K_{min}, K_{max} (ovvero sia negativo il discriminante $1 + \frac{1-a^2}{a^2\lambda}$) si ha $a^2(\lambda(1-K)^2 + 1 - \lambda) > 1$: la successione non converge. Converge invece a per $a^2(\lambda(1-K)^2 + 1 - \lambda) < 1$, ovvero per $K \in (K_{min}, K_{max})$.

Consideriamo allora, dati $a \neq 0$, $q, r > 0$, $\lambda > \lambda_c$, $K \in (K_{min}, K_{max})$, l'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty)$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty) &= a^2\left(\lambda(1-K)^2 + 1 - \lambda\right) v_\infty + \lambda K^2 a^2 r + q && (6.3)\\
&= G(K) \cdot v_\infty + D(K)\ . && (6.4)
\end{aligned}$$

Ci poniamo il problema di trovare il minimo della funzione scalare $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty)$ con i vincoli $v_\infty \geq 0$ e $\varphi(v_\infty) = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty) - v_\infty = 0$, ovvero

$$(G(K) - 1) \cdot v_\infty + D(K) = 0 \Leftrightarrow v_\infty = -\frac{D(K)}{G(K) - 1} = g(K) \qquad (6.5)$$

con:

$$g(K) = \frac{-\lambda K^2 a^2 r - q}{a^2(\lambda(1-K)^2 + 1 - \lambda) - 1} = \frac{-\lambda K^2 a^2 r - q}{K^2 a^2 \lambda - 2K a^2 \lambda + a^2 - 1} \qquad (6.6)$$

É facile vedere che il numeratore di $g(K)$ non può annullarsi. Si può inoltre dimostrare che $v_\infty = g(K)$ assume valori positivi se e solo se $K \in (K_{min}, K_{max})$[6] e perciò terremo d'ora in poi solo quest'intervallo come dominio di $g(K)$. Analizzerò più avanti come tali conclusioni si modificano per i casi limite $q, r = 0$.

Nelle figure 6.1 e 6.2 è riportato l'andamento di $g(K)$ al variare di K nei casi di esistenza o meno dell'intervallo (K_{min}, K_{max}).

Tornando al problema di trovare un v_∞ minimo, un teorema noto dall'analisi afferma che, detto

$$X^* = (K^*, v^*_\infty), \qquad X^* \in \mathcal{X} \triangleq \{(K, v_\infty) \in \mathbb{R}^2 : v_\infty = g(K)\} \qquad (6.7)$$

un punto critico (locale) per $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty)$, esso è equivalentemente punto critico anche per $\Psi(K) \triangleq \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, g(K)) = g(K)$.

Si può quindi studiare la derivata, ricordando comunque la condizione $K \in (K_{min}, K_{max})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(K)}{\partial K} &= \frac{(-2K\lambda a^2 r)(K^2a^2\lambda - 2Ka^2\lambda + a^2 - 1) - (2Ka^2\lambda - 2a^2\lambda)(-\lambda K^2 a^2 r - q)}{(K^2a^2\lambda - 2Ka^2\lambda + a^2 - 1)^2}\\
&= \frac{2K^2\lambda^2 a^4 r - 2K\lambda a^4 r + 2K\lambda a^2 r + 2Ka^2 q\lambda - 2a^2\lambda q}{(K^2a^2\lambda - 2Ka^2\lambda + a^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

[6] Per averne un'idea, si calcolino preliminarmente i K per cui si annulla il denominatore: si ritrovano i K_{min}, K_{max} citati in precedenza, la cui esistenza è assicurata per $\lambda \geq \lambda_c = 1 - \frac{1}{a^2}$ e a cui è legata l'esistenza o meno di una v_∞. Studiamo il segno di $g(K)$: sia il numeratore sia il denominatore sono negativi per ogni $K \in (K_{min}, K_{max})$ (ricordiamo le condizioni $a, \lambda \neq 0$, $q, r > 0$). Osserviamo per un momento il caso in cui non esistano K_{min}, K_{max} (ovvero è negativo il discriminante $1 + (1 - a^2)/(a^2\lambda)$): il denominatore assume sempre valori concordi al segno del coefficiente $a^2\lambda$, cioè è sempre positivo: $g(K) = v_\infty$ perde quindi significato poiché assumerebbe valori negativi (si può verificare che la successione $\{v_k\}$ in tal caso non converge).

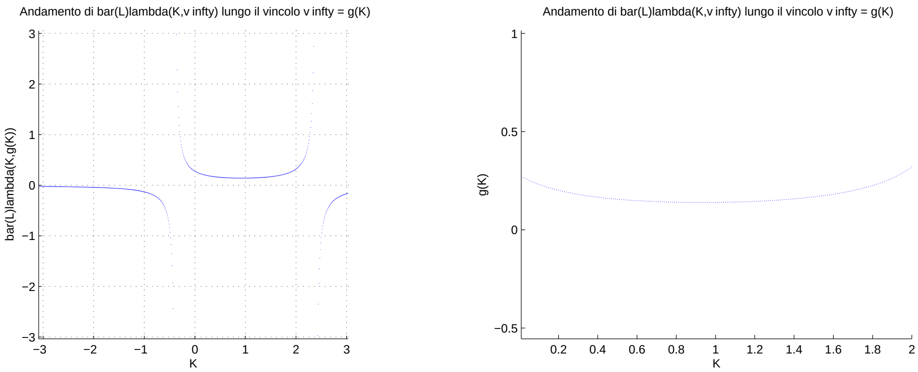

Figura 6.1. $g(K)$ (per $a = 0.8$ (strettamente stabile), $c = 1$; $q = 0.1$; $r = 0.01$, $\lambda = 0.6$). Per valori di K al di fuori dell'intervallo aperto $(K_{min}, K_{max}) = (-0.391, 2.392)$ il risultato di $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v)$ perde significato. Invece per $K \in (K_{min}, K_{max})$, il minimo di $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_\infty)$ si raggiunge per $(K^*,\ s_\infty) \approx (0.933,\ 0.139)$, identicamente a quanto si può ricavare applicando con le stesse a, c, q, r i teoremi validi nel caso matriciale.

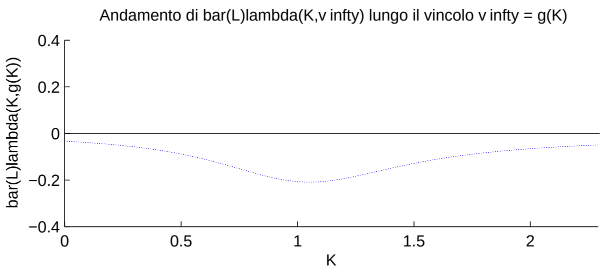

Figura 6.2. $g(K)$ (per $a = 2$ (instabile), $c = 1$; $q = 0.1$; $r = 0.01$, $\lambda = 0.6 < \lambda_c = 0.75$). La serie $v_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, v_k)$ non converge per alcun K.

e imporre:

$$K^2 \cdot (\lambda a^2 r) + K \cdot (r - a^2 r + q) - q = 0$$
$$\Rightarrow K^*_{1,2} = \frac{-r + a^2 r - q \pm \sqrt{(r - a^2 r + q)^2 + 4q\lambda a^2 r}}{2\lambda a^2 r}$$

che sono sicuramente definiti nelle ipotesi considerate. Di essi si considera solo la soluzione con il segno + (si può dimostrare che K_1^* appartiene a (K_{min}, K_{max}), mentre K_2^* no).
In conclusione, nel caso scalare con $q > 0,\ r > 0,\ a \neq 0$, K^* esiste alla sola condizione dell'esistenza dell'intervallo (K_{min}, K_{max}) (ovvero se $\lambda > \lambda_c$).

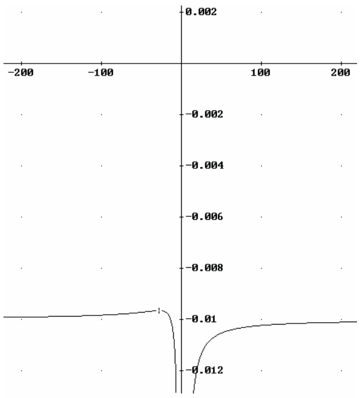

Figura 6.3. ingrandimento di $g(K)$ (per $a = 0.8$, $c = 1$; $q = 0.1$; $r = 0.01$, $\lambda = 0.6 > \lambda_c = -0.56$) che mostra l'esistenza di un secondo K^* ove di annulla la derivata $\frac{\partial g(K)}{\partial K}$ (il primo è circa 0.93 e g(0.93) vale circa 0.139, al di fuori della scala rappresentata).

Con $K = K^*$ si ottiene:

$$s_\infty = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K^*, g(K^*)) = g(K^*) =$$
$$\left(\frac{\sqrt{a^4r^2 + 2a^2r(2\lambda q - q - r) + (q+r)^2} + a^2r(2\lambda - 1) + q + r}{4a^2\lambda r(a^2(\lambda-1)+1)\sqrt{a^4r^2 + 2a^2r(2\lambda q - q - r) + (q+r)^2}}\right) \cdot (q^2 + 2qr + r^2 +$$
$$+(a^2r - q - r)\sqrt{a^4r^2 + 2a^2r(2\lambda q - q - r) + (q+r)^2} + a^4r^2 + 2a^2r(2\lambda q - q - r))$$

Tale complicata espressione può essere verificata sostituendo i valori $a = 0.8$ (strettamente stabile), $q = 0.1$, $r = 0.01$, $\lambda = 0.6$ e ottenendo $s_\infty = 0.1392$, lo stesso trovato nell'esempio numerico precedente.

Inoltre, si può verificare che valgono le espressioni:

$$s_\infty - \frac{rK^*}{1-K^*} = 0 \;\Leftrightarrow\; K^* - \frac{s_\infty}{s_\infty + r} = 0 \tag{6.8}$$

il che conferma quanto affermato dai teoremi per il caso matriciale: K^* ha in quel caso l'espressione $S_\infty C^T(CS_\infty C^T + R)^{-1}$. Un'ultima osservazione può essere fatta sui valori assumibili da K^*: essendo nelle nostre ipotesi $s_\infty > 0$, K^* rimane nel range $(0,1)$[7].

Cerchiamo infine di rilassare le ipotesi su q, r, mantenendo $a, \lambda \neq 0$.

- Se $q = 0$ e $r \neq 0$ (nessun rumore di modello), la successione $\{v_k\}$ converge nelle stesse condizioni viste in precedenza. Dimostriamo, fra qualche riga, che è necessaria una modifica a quanto esposto finora solo se $a = 1$. Per ogni $a \neq 0$, dati $\lambda > \lambda_c$ e $K \in (K_{min}, K_{max})$, K^* vale $\frac{a^2-1+|1-a^2|}{2\lambda a^2}$ (la semplificazione è stata possibile poiché $r \neq 0$), cioè se $|a| < 1$ vale 0 (e $s_\infty = 0$), se $|a| > 1$ vale $\frac{a^2-1}{\lambda a^2}$ (e $s_\infty = \frac{r(a^2-1)}{(\lambda-1)a^2+1}$[8]), mentre il caso particolare $a = 1$ e $\lambda > \lambda_c = 0$ è discusso in figura 6.4. Precisiamo solo che il minimo di v_∞ rispetto a K

[7] esso è quindi sicuramente inferiore a $K_{max} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1-a^2}{a^2\lambda}}$. Inoltre, è anche immediato constatare che per $a \leq 1$ $K_{min} \leq 0$ e $K^* > K_{min}$.

[8] il denominatore è sempre positivo essendo $\lambda > \lambda_c$

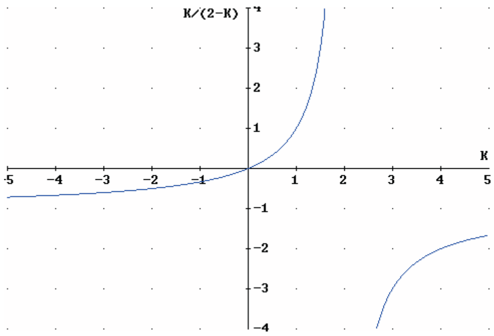

Figura 6.4. Se $q = 0$, $r > 0$ (per questo grafico $r = 1$), $a = 1$ e $\lambda > \lambda_c = 0$, K_{min} e K_{max} valgono 0 e 2; la formula di K^* (che darebbe 0) è insensata ($s_\infty = g(0)$ avrebbe il denominatore nullo). $v_{k+1} = (K^2\lambda - 2K\lambda + 1)v_k + \lambda r K^2$ converge per $K \in (K_{min}, K_{max})$ a $v_\infty = \frac{rK}{2-K}$ che, come si nota dal suo grafico, sarebbe definita e non negativa anche per $K_{min} = 0$. Tuttavia la successione $\{v_{k+1}\}$ con $K = K_{min} = 0$ non converge a $\frac{rK}{2-K} = 0$ ma diventa $v_{k+1} = v_k$ e quindi vale costantemente v_0. In conclusione, ci si potrà soltanto avvicinare ad un minimo per $K \to K_{min}$ ($s_\infty \to 0$) a parte il caso in cui v_0 (e $K^* = K_{min} = 0$).

non si trova annullando la derivata (è strettamente positiva) però all'aperto (K_{min}, K_{max}) di convergenza di $\{v_k\}$ si deve aggiungere anche $K_{min} = 0$.

- Se $r = 0$ e $q \neq 0$ (nessun rumore di misura), la successione $\{v_k\}$ converge nelle stesse condizioni viste in precedenza, ma non valgono le formule finora ricavate per K^* e s_∞.
  Infatti, dati $\lambda > \lambda_c$ e $K \in (K_{min}, K_{max})$, la formula ricavata per K^* non è più definita poiché se ne annulla il denominatore. Si deve riscrivere la derivata $\frac{\partial g(K)}{\partial K} = \frac{2a^2 q\lambda(K-1)}{(K^2a^2\lambda - 2Ka^2\lambda + a^2 - 1)^2}$, che si annulla per $K^* = 1$. Corrispondentemente $s_\infty = \frac{q}{(\lambda-1)a^2+1}$.

- Se $q = r = 0$ si possono riprendere le osservazioni del caso $r = 0$, con la differenza che la derivata $\frac{\partial g(K)}{\partial K}$ è nulla per tutti i $K \in (K_{min}, K_{max})$. Infatti la successione $v_{k+1} = a^2(\lambda(1 - K)^2 + 1 - \lambda)v_k$ converge, nelle condizioni viste in precedenza, a $v_\infty = 0$ $\forall v_0 \geq 0$.
  Il v_∞ minimo (s_∞) vale ovviamente 0 e si ottiene qualunque sia $K \in (K_{min}, K_{max})$.