PSC: Progettazione di sistemi di controllo	III Trim. 2007
Lezione 7 — 7 Maggio 2007	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: A. Pegoraro, A. Agnoli, P. D'Errico*

7.1 Stimatori con perdite di pacchetti: stabilità, e guadagno statico ottimo

7.1.1 Richiami dalle lezioni precedenti

Nelle lezioni precedenti abbiamo ricavato (dopo aver enunciato opportune ipotesi), le seguenti equazioni del filtro di Kalman con perdita di pacchetti:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K_{k+1}(y^s_{k+1} - A\hat{x}_{k|k}) \tag{7.1}$$

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k-1}A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}CP_{k|k-1}A^T \tag{7.2}$$

$$K_k = AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1} \tag{7.3}$$

Similmente a quanto visto per il filtro di Kalman usuale ($\gamma_k \equiv 1$), abbiamo definito un nuovo stimatore con guadagno K costante $\forall k \in \mathbb{N}$, perdendo l'ottimalità (valida nelle ipotesi sopracitate, tra cui la gaussianità, la bianchezza e l'incorrelazione dei processi w_k e v_k) al fine di guadagnare una maggiore facilità di calcolo e leggerezza computazionale. La stima dello stato con il nuovo stimatore si esprime come:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K(y^s_{k+1} - A\tilde{x}_{k|k}) \tag{7.4}$$

ricaveremo più avanti un'opportuna matrice di guadagno costante K. L'errore commesso da questo nuovo stimatore è definito come:

$$\tilde{e}_{k+1|k} \triangleq x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k} \tag{7.5}$$

(dove $\tilde{x}_{k+1|k} = A\tilde{x}_{k|k}$), la cui varianza è data da

$$\tilde{P}_{k+1|k} = \mathbb{E}\left[\tilde{e}_{k+1|k}\tilde{e}^T_{k+1|k}|(y^s_k, \ldots, y^s_0), (\gamma_k, \ldots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0\right] \tag{7.6}$$

Sostituendo l'espressione del guadagno tempo-variante (7.3) nella stima dello stato (7.4) si ha

$$\tilde{e}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{e}_{k|k-1} + w_k - \gamma_k AKv_k$$

da cui, osservando che:

$$\tilde{e}_{k|k-1} \subseteq span\{\gamma_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1}\} \perp span\{\gamma_k, v_k, w_k\} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

abbiamo ricavato:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I - \gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \tag{7.7}$$

.

Per semplificare la notazione, abbiamo introdotto i seguenti operatori:

$$\mathcal{L}_{\gamma_k}(K,\tilde{P}_{k|k-1}) \triangleq A(I-\gamma_k KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I-\gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \quad (7.8)$$

$$\Phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1}) \triangleq AP_{k|k-1}A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T+R)^{-1}CP_{k|k-1}A^T \quad (7.9)$$

che risultano essere delle variabili aleatorie poiché dipendono dai γ_k. In questo scenario una possibile metrica delle prestazioni dello stimatore è data dall'aspettazione della covarianza d'errore $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$, rispetto al processo degli arrivi γ_k. Poiché $P_{k+1|k}$ è una funzione non lineare in γ_k, non è possibile calcolare $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$ analiticamente tuttavia, essendo lo stimatore con K costante uno stimatore sub-ottimo si può certamente affermare che

$$P_{k+1|k} \leq \tilde{P}_{k+1|k} \quad (7.10)$$

e questo fatto permette, una volta determinata la varianza d'errore del filtro sub-ottimo, di stabilire un limite superiore per la varianza del filtro ottimo. Infatti la disuguaglianza sopra scritta continua a valere anche prendendo l'aspettazione di entrambi i termini, e si ottiene quindi

$$\bar{P}_{k+1} \triangleq \mathbb{E}[P_{k+1|k}] \leq \mathbb{E}[\tilde{P}_{k+1|k}] \triangleq \overset{\vee}{P}_{k+1} \quad (7.11)$$

dove $\overset{\vee}{P}_{k+1}$ è invece facilmente calcolabile ($\mathcal{L}_{\gamma_k}(K,\tilde{P}_{k+1|k})$ è funzione lineare in γ_k) e costituisce un limite superiore per $\bar{P}_{k+1}$.

Il calcolo di $\overset{\vee}{P}_{k+1}$ ha restituito:

$$\overset{\vee}{P}_{k+1} = \lambda A(I-KC)\,\overset{\vee}{P}_k\,(I-KC)^T A^T + (1-\lambda)A\,\overset{\vee}{P}_k\,A^T + Q + \lambda AKRK^T A^T \quad (7.12)$$

da cui abbiamo definito un nuovo operatore:

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P) \triangleq \lambda A(I-KC)P(I-KC)^T A^T + (1-\lambda)APA^T + Q + \lambda AKRK^T A^T, \quad (7.13)$$

deterministico (non dipende da γ_k) e di cui, quindi, sarà ora possibile analizzare la convergenza.

7.1.2 Convergenza in media dello stimatore statico e sintesi dello stimatore ottimo.

Tutte le matrici $\overset{\vee}{P}_k$ per $k = 0, 1, \ldots$ possono essere ottenute risolvendo le equazioni:

$$\overset{\vee}{P}_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, \overset{\vee}{P}_k)$$

con $\overset{\vee}{P}_0 = P_0$. La stabilità dello stimatore può quindi essere dedotta dalle proprietà dell'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$.

Oltre a $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$, definiamo un ulteriore nuovo operatore:

$$\Phi_\lambda(P) \triangleq APA^T + Q - \lambda APC^T(CPC^T+R)^{-1}CPA^T. \tag{7.14}$$

Esso si ottiene semplicemente dall'espressione (7.9) di $\Phi_{\gamma_k}(P_k)$, sostituendo a γ_k il parametro della variabile aleatoria di Bernoulli λ che è pari alla sua media e anche, per definizione, a $\mathbb{P}[\gamma_k = 1]$ cioè alla probabilità di corretta ricezione. L'operatore $\Phi_\lambda(P)$ quindi in generale <u>non</u> serve a descrivere l'andamento in media della successione $P_{k+1} = \Phi_{\gamma_k}(P_k)$ (si ricordi che $\bar{P}_k \triangleq \mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}] = \mathbb{E}_\gamma[\Phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1})]$ non è esplicitamente calcolabile poiché non è funzione lineare di $P_{k|k-1}$).
Il seguente teorema analizza sia l'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ sia $\Phi_\lambda(P)$, mettendone in luce il legame. Ricordiamo che stiamo sempre assumendo valide le ipotesi citate all'inizio di questo documento, dalle quali abbiamo potuto ricavare le equazioni (7.3).

Teorema. Gli operatori $\bar{L}_\lambda(K,P)$ e $\Phi_\lambda(P)$, definiti rispettivamente nelle equazioni (7.13) e (7.14), in cui $\lambda \in [0,\ 1]$, godono delle seguenti proprietà:

1) $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ è affine in P per K fissato

2) $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ è positivo, cioè $P \geq 0 \Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P) \geq 0,\ \forall K$

3) $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ è monotono crescente rispetto a P, cioè $P_1 \geq P_2 \Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P_1) \geq \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P_2)$;

4) $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P) = \Phi_\lambda(P) + \lambda A(K-K_P)(CPC^T+R)(K-K_P)^TA^T$,
con $K_P \triangleq PC^T(CPC^T+R)^{-1}$

5) $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P) \geq \Phi_\lambda(P)$, $\forall K$ o, equivalentemente, $\Phi_\lambda(P) = \min_K \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$

6) $\Phi_\lambda(P)$ è monotono crescente in P, ovvero $P_1 \geq P_2 \Rightarrow \Phi_\lambda(P_1) \geq \Phi_\lambda(P_2)$

7) $\Phi_\lambda(P)$ è monotono decrescente in λ, ovvero $\lambda_1 \geq \lambda_2 \Rightarrow \Phi_{\lambda_1}(P) \leq \Phi_{\lambda_2}(P)$, per ogni P [1];.

Dimostrazione. La dimostrazione delle proprietà 1)-6) è simile a quelle già viste per l'operatore nel caso del filtro statico senza perdita di pacchetti, che si ottiene per $\lambda = 1$. La proprieta' 7) si vede facilmente dal fatto che $\Phi_{\lambda_1}(P) - \Phi_{\lambda_2}(P) = -(\lambda_1-\lambda_2)APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA^T \leq 0$.

La proprietà 7) si interpreta col fatto che maggiore è la percentuale dei pacchetti arrivati, migliore è la prestazione dello stimatore.
Le proprietà appena dimostrate saranno utili per analizzare le condizioni di convergenza (in media quadratica) e ottimalità dello stimatore statico ($\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ e $\Phi_\lambda(P)$).

Analizziamo inizialmente il caso in cui la matrice A sia strettamente stabile.

Teorema. Sia $\Phi_\lambda(P) = \min_K \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ l'operatore sopra definito. In particolare, data una matrice semidefinita positiva S_0 (condizione iniziale), si consideri la successione $S_{k+1} =$

[1]Si noti che questo in genere non vale per l'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$, infatti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \not\Rightarrow \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_1}(K,P) \leq \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_2}(K,P), \forall K$

$\Phi_\lambda(S_k)$.
Se A è strettamente stabile[2], allora $\{S_k\}$ converge, per k tendente a $+\infty$ $\forall S_0 \geq 0$ e $\forall \lambda \in [0,1]$ alla soluzione S_∞ di $S_\infty = \Phi_\lambda(S_\infty)$; tale soluzione è unica. Se $(A, Q^{1/2})$ e' raggiungibile allora $S_\infty > 0$ e' strettamente positiva.

Dimostrazione. Si consideri l'eventualità in cui λ sia nullo (nessuna osservazione ricevuta), allora si deve analizzare la convergenza della successione $S_{k+1} = \Phi_\lambda(S_k) = AS_kA^T + Q$. La stabilità stretta di A implica (vedi ad es.Picci pp.260-1) che, data inizialmente S_0 simmetrica e semidefinita positiva, la successione converga alla soluzione unica e semidefinita positiva dell'equazione a tempo discreto di Lyapunov: $S_\infty^0 = AS_\infty^0A^T + Q$ e non dipenda quindi da S_0, vale infatti $S_\infty^0 = \sum_0^\infty A^kQ(A^T)^k$.

Nel caso di $0 < \lambda \leq 1$, ricordiamo che $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P) \geq \Phi_\lambda(P)$, $\forall K$ e che $\Phi_\lambda(P)$ è monotono crescente in P (proprietà 5 e 6 del teorema precedente). É inoltre facile ricavare, scegliendo $K = 0$, che

$$\bar{\mathcal{L}}_0(0,P) = APA^T + Q \geq \bar{\mathcal{L}}_\lambda(0,P) = (1-\lambda)APA^T + Q \geq \Phi_\lambda(P)$$

e quindi (ricordando il caso $\lambda = 0$), per $k \to \infty$ $S_\infty^0 \geq S_k^\lambda = \Phi_\lambda^k(0)$ si ha che la limitatezza assieme alla monotonia della successione ne garantiscono la convergenza ad una certa S_∞.

Tale S_∞ è unica; inoltre, considerando $S_0 = S_\infty$ si ottiene la successione $S_k = \Phi_\lambda(S_k) = S_\infty$, per cui S_∞ è soluzione della *Modified Algebraic Riccati Equation* (MARE):

$$S_\infty \;=\; AS_\infty A^T + Q - \lambda AS_\infty C^T(CS_\infty C^T + R)^{-1}CS_\infty A^T$$

che, non è in generale risolvibile analiticamente.

Si potrebbe dimostrare (vedi ad es. *Picci, Stima e filtraggio*, p.311) già a questo punto per il caso $|a| = 1$ che esiste un guadagno ottimo K_∞ per lo stimatore, la cui varianza d'errore risulta minimizzata. Il risultato coincide con il K_∞ del teorema seguente, a cui si rimanda.

Analizziamo ora il caso in cui la matrice A sia instabile (o semplicemente stabile): per $\lambda = 0$ (*nessuna osservazione*) il filtro è instabile[3] mentre per $\lambda = 1$ il filtro è sicuramente stabile (*filtro di Kalman standard*). Vediamo a proposito il teorema seguente.

Teorema. Siano la coppia (A, C) rivelabile, la coppia $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ stabilizzabile e $R > 0$. Sia $\Phi_\lambda(P) = \min_K \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K,P)$ l'operatore sopra definito.

1. Se A è instabile allora esiste $\lambda_c \in [0,1] : \forall\lambda > \lambda_c,\ \lambda \in [0,1]$ la successione definita da

$$S_{k+1} = \Phi_\lambda(S_k) \qquad S_0 \geq 0 \tag{7.15}$$

   converge all'unico punto fisso $S_\infty = \Phi_\lambda(S_\infty)$ dove $S_\infty > 0$, cioe'

$$\lim_{k\to\infty} S_k = S_\infty, \forall S_0 \geq 0.$$

   Se $\lambda < \lambda_c$ invece tutte le successioni sono illimitate cioe' $\lim_{k\to\infty} S_k = +\infty, \forall S_0 \geq 0$

[2]Si noti che non assumiamo qui come ipotesi che la coppia (A, C) sia rivelabile e $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ sia stabilizzabile, in quanto queste sono automaticamente verificate dal fatto che A e' strettamente stabile

[3]L'equazione di Lyapunov a tempo discreto ha una soluzione (unica) se e solo se gli autovalori α_i di A soddisfano la condizione: $\alpha_i\alpha_j \neq 1$ for all (i,j) (anche (i,i)).

2. Il guadagno ottimo del punto fisso S_∞

$$K_\infty = S_\infty C^T (C S_\infty C^T + R)^{-1}$$

è il guadagno statico ottimo a regime, nel senso che date le due successioni convergenti T_{k+1} e V_{k+1} vale

$$T_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K_\infty, T_k) \longrightarrow S_\infty$$
$$V_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, V_k) \longrightarrow V_\infty$$

si ha $S_\infty \leq V_\infty \ \forall K \neq K_\infty$, o in maniera equivalente:

$$S_\infty = \min_K V_\infty \tag{7.16}$$
$$\text{tale che } V_\infty = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, V_\infty) \tag{7.17}$$

3. Per quanto riguarda λ_c in generale non e' possibile calcolarne in forma chiusa il valore, ma puo' essere ottenuto in maniera numerica risolvendo un problema di ottimizzazione convessa. Tuttavia e' possibile definire un limite superiore ed uno inferiore:

$$\lambda_{min} \leq \lambda_c \leq \lambda_{max}$$

dove

$$\lambda_{min} = 1 - \frac{1}{\max |\sigma_j(A)|^2}$$

e

$$\lambda_{max} = 1 - \frac{1}{\prod_j |\sigma_j^{inst}(A)|^2}$$

con $\sigma_j^{inst} \triangleq$ j-esimo autovalore instabile di A.

In particolare, si avrà che $\lambda_c = \lambda_{min}$ nel caso in cui C sia una matrice quadrata invertibile, viceversa $\lambda_c = \lambda_{max}$ nel caso in cui C abbia rango 1.

4. Essendo S_∞ una funzione di λ si ha infine

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \Longrightarrow S_\infty(\lambda_1) \leq S_\infty(\lambda_2)$$

Dimostrazione. La dimostrazione per l'affermazione 1) si ottiene facendo delle considerazioni di continuità come accennato prima del teorema. Infatti sappiamo certamente che per $\lambda = 1$ le successioni convergono e quindi lo stimatore è stabile, mentre per $\lambda = 0$ le successioni divergono. Poiché $\Phi_\lambda(P)$ è una funzione continua di λ allora per continuità anche la soluzione S_∞ deve essere continua. Utilizzando poi la monotonicità decrescente in λ di $\Phi_\lambda(P)$ si deduce che esiste un certo λ_c (vedi figura 7.1)[4]. La difficolta di trovare in maniera esplicita λ_c sta nel fatto che mentre prima la stabilita' dell'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$ era direttamente legata alla stabilita' di $A_c = A(I - KC)$, adesso gli autovalori e autovettori non si possono calcolare utilizzando gli stessi ragionamenti utilizzati nel caso senza perdita di

[4]Lo stesso ragionamento non può essere ripetuto per $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$, poiché per esso non si può dire che, P fissata, sia un operatore monotono rispetto a λ.

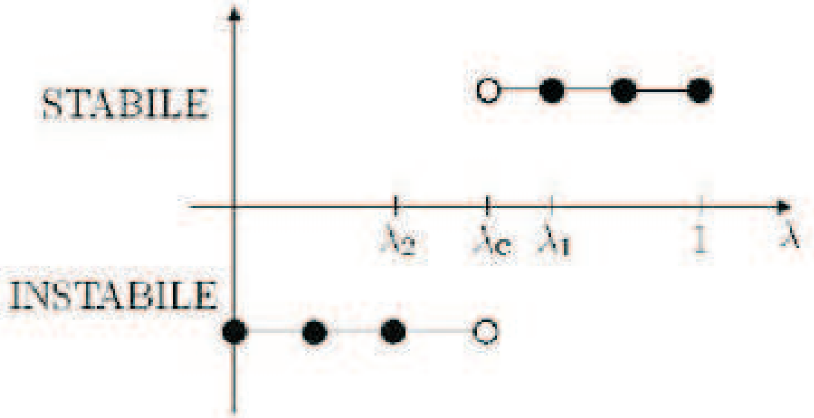

Figure 7.1. Stabilità in media del filtro (operatore $\Phi_\lambda(P)$) in funzione di λ

pacchetti. La dimostrazione di esistenza, unicità, positività e convergenza a S_∞ per ogni condizione iniziale è esattamente analoga a quella già viste nel caso senza perdita di pacchetti. Lo stesso vale anche per la proposizione 2).

Per quel che riguarda la proposizione 3) il λ_{min} e' facilmente ricavabile osservando che nel caso in cui C sia invertibile allora posso scegliere $K = C^{-1}$, cosi' che $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K = C^{-1}, P) = (1-\lambda)APA^T + Q + \lambda AC^{-1}R(C^{-1})^T A^T = A_\lambda P A_\lambda^T + D$, dove $A_\lambda = \sqrt{1-\lambda}A$ e $D \geq 0$. In questo caso l'operatore $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K = C^{-1}, P)$ risulta essere l'operatore di Lyapunov che ammette punto fisso se e solo se A_λ è strettamente stabile. La matrice A_λ è stabile se e solo se gli autovalori $|\sigma_i(A_\lambda)| < 1$. Poiché $\sigma_i(A_\lambda) = \sqrt{1-\lambda}\sigma_i(A)$ si ottiene facilmente che una condizione <u>sufficiente</u> di stabilità è equivalente a $\lambda > 1 - \frac{1}{|\sigma_{max}(A)|^2} = \lambda_{min}$. Quindi si ricava che $\lambda_c \leq \lambda_{min}$. Per dimostrare la <u>necessita'</u> si osservi che $\phi_\lambda(P) = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K_P, P) \geq (1-\lambda)APA^T + Q = A_\lambda P A_\lambda^T + Q$, che sappiamo non avere punto fisso $P = A_\lambda P A_\lambda^T + Q$ per $\lambda < \lambda_{min}$. Da questo di deduce che $\lambda_c \geq \lambda_{min}$, e quindi abbiamo che $\lambda_c = \lambda_{min}$.

Da un punto di vista pratico poiché non è in genere possibile ricavare S_∞ risolvendo analiticamente la MARE (*Modified Algebraic Riccati Equation*) $S_\infty = \Phi_\lambda(S_\infty)$, si ricorre ad un calcolo approssimato iterando l'equazione per un certo numero di passi a partire dalla condizione iniziale $S_0 = 0$ e, si osserva se la successione diverge, o converge ad una S_∞, sempre sotto le ipotesi di osservabilita' della coppia (A, C) e raggiungibilità della coppia $(A, Q^{1/2})$.

Ricordiamo che l'ipotesi (A, C) rivelabile assicura la convergenza $\forall S_0 \geq 0$ ad una (delle possibili) soluzioni della MARE mentre l'ipotesi $(A, Q^{1/2})$ stabilizzabile assicura anche l'unicità della soluzione S_∞.

Caso scalare

Analizziamo brevemente il caso scalare ($A = a$, $C = 1$ (senza perdita di generalità), $Q = q$, $R = r$, $S_k = s_k$). La successione $\{s_k\}$ si esprime con la formula:

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(s_k) &= a^2 s_k + q - \lambda \frac{a^2 s_k^2}{s_k + r} \\
&= a^2 s_k + q - \lambda a^2 \frac{s_k^2 - r^2 + r^2}{s_k + r} \\
&= a^2 s_k + q - \lambda a^2 (s_k - r) - \lambda a^2 \frac{r^2}{s_k + r} \\
&= (1-\lambda) a^2 s_k + \left(q + \lambda a^2 r\right) - \lambda \frac{a^2 r^2}{s_k + r}
\end{aligned}$$

Il punto d'equilibrio (incrocio tra la bisettrice s e la funzione $\Phi_\lambda(s)$) può esistere solo se la retta $(1-\lambda)a^2 s + (q + \lambda a^2 r)$ ha un coefficiente angolare compreso tra 0 e 1, ovvero:

$$a^2(1-\lambda) < 1 \Leftrightarrow \lambda > 1 - \frac{1}{a^2} = \lambda_c, \quad \lambda \geq 0 \; e \; \lambda \leq 1 \tag{7.18}$$

La condizione $\lambda \geq 0$ fa sì che, se $1 - \frac{1}{a^2} < 0$ (ovvero $|a| < 1$), $\lambda > 1 - \frac{1}{a^2}$ sia sempre verificata.

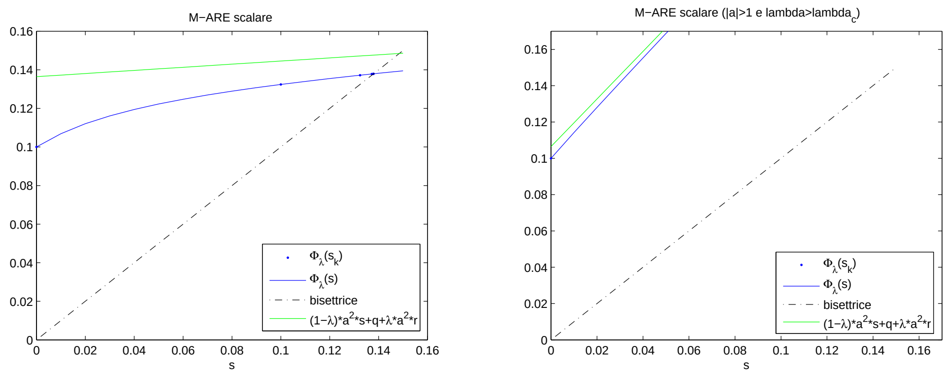

Figure 7.2. $\Phi_\lambda(\cdot)$, caso scalare. Nella figura a sinistra $|a| < 1$ (che implica $\lambda > \lambda_c$): esiste un punto d'equilibrio. Nella figura a destra $|a| > 1$ e $\lambda < \lambda_c$: la curva non incontra la bisettrice (la successione s_k diverge per $k \to \infty$).

Secondo il teorema prima dimostrato, il valore del guadagno ottimo è $K_\infty = S_\infty C^T (C S_\infty C^T + R)^{-1}$, che applicato al caso scalare (con $c = 1$) restituisce $K_\infty = \frac{s_\infty}{s_\infty + r}$.

Per inciso, nel caso scalare si può trovare una forma esplicita, oltre che per λ_c, anche per s_∞ (e per K_∞) ed è possibile individuare un intervallo aperto $]K_{min}, K_{max}[$ in cui la generica successione $\{v_k\}$ converge, per $k \to \infty$, $\lambda > \lambda_c > 0$, $a \neq 0$.