PSC: Progettazione di sistemi di controllo **III Trim. 2007**

Lezione 9 — Maggio 09

Docente: Luca Schenato *Stesori: Marcassa A., Marcon R., Maran F., Zanella F.*

9.1 Stimatori con perdita di pacchetti e ritardo aleatorio

La situazione che si analizzerà nel paragrafo è quella riportata in figura 9.1 ($\hat{x}_{t|t} = \mathbb{E}\left[x_t | \text{misure } y_k \text{ arrivate fino a } t\right]$). A differenza dei casi precedenti, si considera che la misura k-esima y_k trasmessa

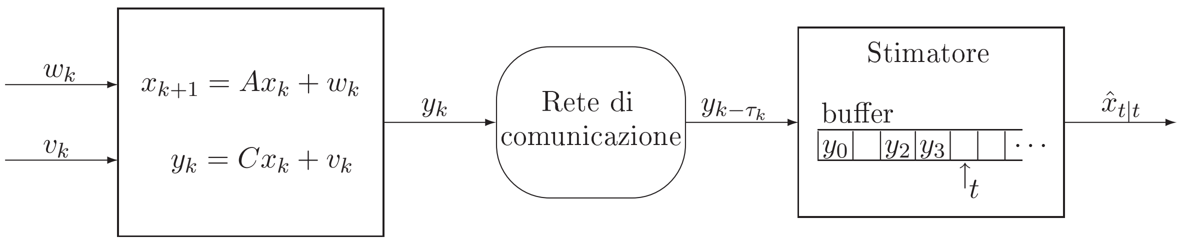

Figura 9.1. Schema del sistema considerato.

attraverso la rete possa arrivare allo stimatore con un ritardo τ_k tale che

$$\tau_k \in \{0, 1, \ldots\} \cup \{\infty\}$$

dove per $\tau_k = \infty$ si intende la perdita del pacchetto.

Poniamoci per il momento nel caso di buffer di memorizzazione delle misure di capacità infinita con l'esempio di figura 9.2: allora al tempo t_3 potrebbero giungere le misure y_3 o y_1, al tempo t_6

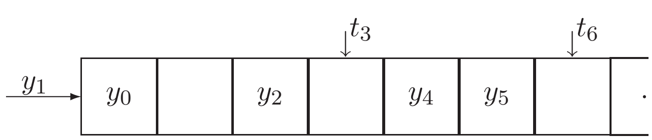

Figura 9.2. Buffer infinito.

le misure y_6, y_3 o y_1 e in generale, a causa dei ritardi, al tempo t_k potrebbero giungere i pacchetti relativi alle misure y_h, $h < k$, non ancora ricevuti. Per collocare nella posizione giusta del buffer la misura appena arrivata, il pacchetto deve portare sia l'informazione y_k che il tempo k: è necessario quindi supporre le ipotesi di

1. *time stamping* per il sensore
2. *sincronizzazione* tra orologio del sensore e dello stimatore.

Come visto nelle lezioni precedenti, all'istante t le posizioni del buffer che non contengono misure vengono poste a 0 (valore fittizio, non si intende misura nulla), ma per tenere conto del possibile arrivo con ritardo delle misure relative a istanti precedenti si definisce la nuova variabile

$$\gamma_k^t \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se la misura relativa all'istante } k \text{ è presente nello stimatore all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

All'istante t la cascata processo–sensore–rete è quindi descrivibile mediante il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} & = Ax_k + w_k \\ \tilde{y}_k^t & \triangleq \gamma_k^t y_k = \gamma_k^t C x_k + \gamma_k^t v_k = C_k^t x_k + \tilde{v}_k^t, \qquad k = 0, 1, \ldots, t; \end{cases}$$

fissati i γ_k^t, il sistema rimane lineare tempo-variante e la stima al tempo t è

$$\hat{x}_{t|t}^t = \mathbb{E}\left[x_t \,|\, \tilde{y}_0^t, \ldots, \tilde{y}_t^t, \gamma_0^t, \ldots, \gamma_t^t\right] = \mathbb{E}\left[x_t \,|\, \{\text{misure } y_k \text{ arrivate fino a } t\}\right]$$

e in generale

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|h}^t = \mathbb{E}\left[x_k \,|\, \tilde{y}_0^t, \ldots, \tilde{y}_h^t, \gamma_0^t, \ldots, \gamma_h^t\right] \\ P_{k|h}^t = \mathbb{E}\left[\left(x_k - \hat{x}_{k|h}^t\right)\left(x_k - \hat{x}_{k|h}^t\right)^T \,\middle|\, \tilde{y}_0^t, \ldots, \tilde{y}_h^t, \gamma_0^t, \ldots, \gamma_h^t\right], \end{cases}$$

equazioni valide per il filtraggio, sia esso destinato a interpolazione, stima o predizione.

In particolare, le equazioni per la stima diventano

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k}^t = A\hat{x}_{k-1|k-1}^t + \gamma_k^t K_k^t \left(\tilde{y}_k^t - CA\hat{x}_{k-1|k-1}^t\right), \qquad k = 0, \ldots, t \\ K_k^t = P_{k|k-1}^t C^T \left(CP_{k|k-1}^t C^T + R\right)^{-1} \\ P_{k+1|k}^t = AP_{k|k-1}^t A^T + Q - \gamma_k^t A K_k^t C P_{k|k-1}^t A^T = \Phi_{\gamma_k^t}\left(P_{k|k-1}^t\right) \end{cases} \tag{9.1}$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} \hat{x}_{-1|-1} = x_0 \\ P_{0|-1}^t = P_0. \end{cases}$$

Si noti che

1. le equazioni precedenti *non* descrivono una relazione ricorsiva, in quanto ad ogni istante t le stime vanno ricalcolate per $k = 0, \ldots, t$, rendendo il procedimento oneroso dal punto di vista computazionale e soggetto a problemi numerici (ad ogni istante t vanno calcolate t inversioni di matrice);
2. $P_{t+1|t}^t = P_{t+1|t}^t\left(\gamma_0^t, \ldots, \gamma_t^t\right)$ e pertanto è una variabile aleatoria.

9.2 Buffer finito

Si può pensare di limitare la dimensione del buffer a N (caso realistico), ovvero supporre che

$$\gamma_k^t = \gamma_k^{t-1} \qquad \forall k, \forall t \geq k + N \quad (N \geq 1) \tag{9.2}$$

che equivale a $\tau_k \in \{0, \ldots, N-1\} \cup \{\infty\}$ (il pacchetto arriva entro N istanti o non arriva più nel buffer).

Da (9.2) si deduce

$$\begin{cases} \hat{x}^t_{k|k} = \hat{x}^{t-1}_{k|k} \\ \hat{P}^t_{k+1|k} = \hat{P}^{t-1}_{k+1|k} \end{cases} \qquad \forall t \geq k+N; \tag{9.3}$$

sfruttando (9.3) e considerando $t = k+N-1$, si ha $\hat{P}^t_{k|k-1} = \hat{P}^{t-1}_{k|k-1}$ e si applica il filtro (9.1), le cui equazioni diventano

$$\begin{cases} \hat{x}^t_{k|k} = A\hat{x}^{t-1}_{k-1|k-1} + \gamma^t_k K^t_k \left(\tilde{y}^t_k - CA\hat{x}^{t-1}_{k-1|k-1}\right) \\ K^t_k = P^{t-1}_{k|k-1}C^T \left(CP^{t-1}_{k|k-1}C^T + R\right)^{-1} \\ P^t_{k+1|k} = \Phi_{\gamma^t_k}\left(P^{t-1}_{k|k-1}\right) = AP^{t-1}_{k|k-1}A^T + Q - \gamma^t_k AK^t_k CP^{t-1}_{k|k-1}A^T, \end{cases} \tag{9.4}$$

per ricavare le *inizializzazioni* $P^t_{k+1|k}$, $\hat{x}^t_{k|k}$. Quindi, per l'intervallo $k = t-N+2, \ldots, t$ le equazioni dello stimatore sono

$$\begin{cases} \hat{x}^t_{k|k} = f\left(\hat{x}^t_{k-1|k-1}\right) = A\hat{x}^t_{k-1|k-1} + \gamma^t_k K^t_k \left(\tilde{y}^t_k - CA\hat{x}^t_{k-1|k-1}\right) \\ P^t_{k+1|k} = \Phi_{\gamma^t_k}\left(P^t_{k|k-1}\right). \end{cases}$$

Ripetendo i conti in maniera identica, si ricava facilmente che

$$\begin{cases} \hat{x}^t_{t-N|t-N} = \hat{x}^{t-1}_{t-N|t-N} \\ \hat{P}^t_{t-N+1|t-N} = \hat{P}^{t-1}_{t-N+1|t-N} \end{cases}$$

e quindi le equazioni per il *filtro di Kalman con memoria ed eventuale perdita di pacchetti*

$$\begin{cases} \hat{x}^t_{k|k} = f\left(\hat{x}^t_{k-1|k-1}\right) \\ P^t_{k+1|k} = \Phi_{\gamma^t_k}\left(P^t_{k|k-1}\right), \end{cases} \qquad k = t-N+1, \ldots, t.$$

In sintesi, $\forall t$ si fa una stima iniziale come in (9.4) e poi si calcola iterativamente la stima fino a t per poi aggiornare il buffer: il vantaggio è che con questa struttura il numero di iterazioni (e quindi di inversioni di matrice) è sempre N, costante, e non lineare in t.

Per semplificare la notazione, si definisce $S^t \triangleq P^{t-1}_{t-N+1|t-N}$; allora $P^t_{t-N+1|t-N} = S^{t+1}$ e quindi

$$S^{t+1} = \Phi_{\gamma^t_{t-N}}\left(P^t_{t-N+1|t-N}\right) = \Phi_{\gamma^t_{t-N}}\left(S^t\right).$$