STABILITÀ INTERNA

Dato un sistema Σ in forma di stato

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Questo ha funzione di trasferimento

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$$

Def 1) Σ è internamente stabile se A è as. stabile

2) Σ è esternamente stabile se $W(s)$ è BIBO stabile

Teorema

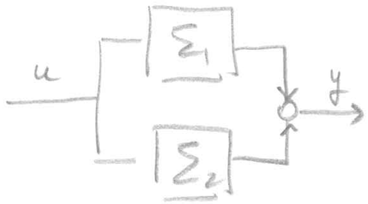
Se Σ è raggiungibile e osservabile allora

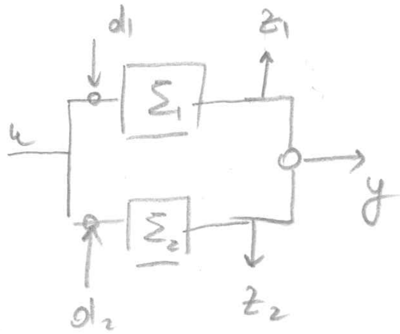
Stabilità interna $\Longleftrightarrow$ stabilità esterna.

STABILITÀ INTERNA DI INTERCONNESSIONI

1) <u>Parallelo</u>: Supponiamo che Σ_1, Σ_2 ragg. + oss.

$$\Sigma \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$





$$y = [C_1 \;\; C_2]x + (D_1 + D_2)u$$

Se aggiungiamo 2 ingressi fittizi $d_1\ d_2$

2 uscite fittizie z_1, z_2

$$\Sigma_{/\!/} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{\Sigma_{/\!/} \overset{\text{Teor}}{\text{ragg + oss}} \iff \Sigma_1\ \Sigma_2 \text{ ragg + oss}}$$

$$W_{/\!/}(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & 0 \\ 0 & W_2(s) \end{bmatrix}$$

Possiamo concludere che

$\Sigma_{/\!/}$ internamente stabile $\iff$ $\Sigma_{/\!/}$ esternamente stabile

Nota che per avere questa equivalenza abbiamo dovuto aggiungere ingressi e uscite fittizie

Esempio: non è vero l'equivalenza senza gli ingressi e uscite fittizie

$$\Sigma_1 \quad \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \qquad y_1 = x_1$$

$$\Sigma_2 \quad \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \qquad y_2 = -x_2$$

$$\Sigma \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Sistema parallelo senza ingressi e uscite fittizie

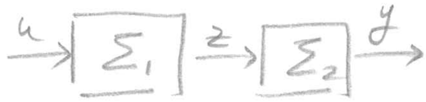
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-1} = 0$$

Σ è esternamente stabile ma non internamente stabile a causa di cancellazioni di fattori semplici instabili

2) Serie : Supponiamo che $\Sigma_1\ \Sigma_2$ ragg. + oss.

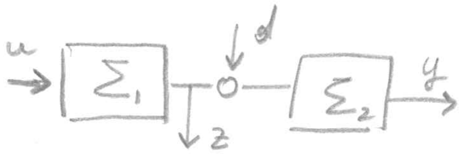
$$\Sigma \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u$$



$$y = \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2D_1 u$$

Se aggiungiamo 1 ingresso d e una uscita z

$$\Sigma_s \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline B_2D_1 & B_2 \end{array}\right]\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ D_1D_2 & D_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

Teor

Σ_s ragg + oss $\iff$ $\Sigma_1\ \Sigma_2$ ragg + oss

$$W_s(s) = \begin{bmatrix} W_{uz}(s) & W_{dz}(s) \\ W_{uy}(s) & W_{dy}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_1(s) & 0 \\ \hline W_2(s)W_1(s) & W_2(s) \end{array}\right]$$

Possiamo concludere che Σ_s è internamente stabile $\iff$ Σ_s è esternamente stabile

Noto che per avere questa equivalenza abbiamo dovuto aggiungere ingressi e uscite fittizie

Esempio: non è vera l'equivalenza senza ingressi e uscite fittizie

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \qquad W_1(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Sigma_2 \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = -2x_2 + u_2 \end{cases} \qquad W_2(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Σ internamente instabile

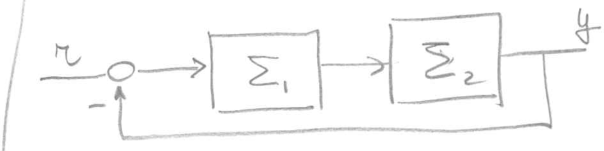
$$W_\Sigma(s) = \frac{1}{s-1} \, \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}$$ esternamente stabile

Questa incongruenza è dovuta a cancellazioni zero / polo instabile

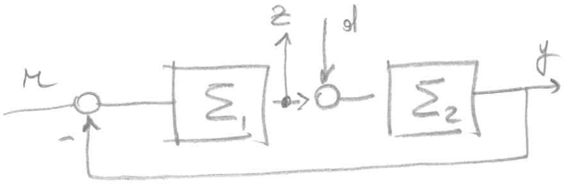
3) Retroazione : Supponiamo che Σ_1, Σ_2 ragg + oss.

$(D_1 = 0)$

$$\Sigma \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_2 C_1 & -B_1 C_2 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = \left[\begin{array}{c|c} D_2 C_1 & C_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$



Se aggiungiamo 1 ingresso d e 1 uscita z



$$\Sigma_{ret} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 - B_1 D_2 C_1 & -B_1 C_2 \\ \hline B_2 C_1 & A_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} B_1 & -B_1 D_2 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix} \end{cases}$$

Teor

Σ_{ret} ragg + oss $\iff$ Σ_1, Σ_2 ragg + oss

$$W_{ret}(s) = \begin{bmatrix} W_{rz}(s) & W_{dz}(s) \\ W_{ry}(s) & W_{dy}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{W_1}{1 + W_1 W_2} & \dfrac{-W_1 W_2}{1 + W_1 W_2} \\ \dfrac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2} & \dfrac{W_2}{1 + W_1 W_2} \end{bmatrix}$$

Possiamo concludere che Σ_{ret} è internamente stabile $\iff$ Σ_{ret} è esternamente stabile

Per ottenere questa equivalenza abbiamo dovuto aggiungere ingressi e uscite fittizie

Esempio: non vale l'equivalenza senza aggiunta di ingressi e uscite fittizie

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \qquad W_1 = \frac{1}{s-1}$$

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + u_2 \\ y_2 = -2x_2 + u_2 \end{cases} \qquad W_2 = \frac{s-1}{s+1}$$

$$\Sigma = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1-1 & 2 \\ \hline 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$W_{ry}(s) = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2} = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}$$ esternamente stabile

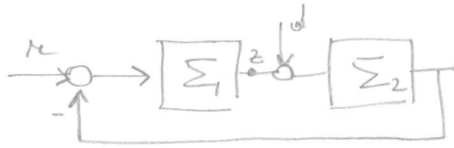
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_A(s) = s(s+1) - 2 = s^2 + s - 2$$

per regola di Cartesio $\Delta_A(s)$ ha una radice a parte reale positiva

$\Rightarrow$ instabile $\Rightarrow$ internamente instabile

> Questa incongruenza è dovuta a cancellazioni poli/zeri instabili

DIMOSTRAZIONE TEOREMA



Teor

$$\Sigma_{ret} \text{ ragg + oss} \iff \Sigma_1, \Sigma_2 \text{ ragg + oss}$$

Dim

Studiamo solo la raggiungibilità dato che l'osservabilità si dimostra in maniera analoga.
Si consideri il PBH test per Σ_{ret}

$$\left[\begin{array}{c|c||c|c} sI-A_1+B_1D_2C_1 & B_1C_2 & B_1 & -B_1D_2 \\ \hline -B_2C_1 & sI-A_2 & 0 & B_2 \end{array}\right]$$

Per valutare se questa matrice a rango di riga piena valutiamo se esiste una combinazione non banale delle righe che dà la riga nulla

$$[v^T \ \ w^T]\begin{bmatrix} sI-A_1+B_1D_2C_1 & B_1C_2 & B_1 & -B_1D_2 \\ -B_2C_1 & sI-A_2 & 0 & B_2 \end{bmatrix}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} v^TB_1=0 \\ -v^TB_1+w^TB_2=0 \quad \Rightarrow \quad w^TB_2=0 \\ v^T(sI-A_1+B_1D_2C_1)-w^TB_2C_1=0 \\ v^TB_1C_2+w^T(sI-A_2)=0 \end{cases}$$

Sfruttando il fatto che $v^TB_1=0$ e $w^TB_2=0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} v^TB_1=0 \\ w^TB_2=0 \\ v^T(sI-A_1)=0 \\ w^T(sI-A_2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} v^T[sI-A_1 \mid B_1]=0 \\ w^T[sI-A_2 \mid B_2]=0 \end{cases}$$

Quindi $\Sigma_1 \Sigma_2$ ragg $\Rightarrow v^T=0 \ \ w^T=0$
e quindi la precedente matrice ha rango riga pieno.

CONTROLLO FEEDFOWARD

Supponiamo di avere un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ che vogliamo controllare in maniera che dal riferimento $r(t)$ all'uscita $y(t)$ la risposta al gradino (unitario) sia la più vicino possibile al gradino (unitario) stesso.

$$u \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y$$

In linea di principio possiamo usare lo schema

$$r \longrightarrow \boxed{Q(s)} \xrightarrow{u} \boxed{G(s)} \longrightarrow y$$

Se $Q(s) = \frac{1}{G(s)}$ allora $y(t) = r(t)$

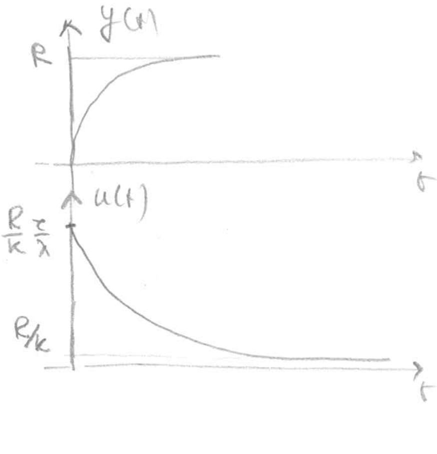
con $Q(s) = \frac{1}{G(s)}$. Questo è il principio del controllo feed forward. Questa soluzione presenta dei problemi

$\boxed{1) \text{ Implementabilità}}$ $\boxed{(Q(s) \text{ propria})}$: $Q(s) = \frac{1}{G(s)}$ può non essere propria o stabile

Esempio : $G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \Rightarrow Q(s) = \frac{1}{k}(1+\tau s)$ non implementabile

In tal caso si può proporre come soluzione

$$Q(s) = \frac{1}{k}\frac{1+\tau s}{1+\lambda s}$$ che porta $$F(s) = Q(s)G(s) = \frac{1}{1+\lambda s}$$



Se $r(t) = R$ gradino

$$y(t) = R(1 - e^{-t/\lambda}) \qquad y(\infty) = R$$

$$u(t) = \frac{R}{k}\left[1 - \left(1 - \frac{\tau}{\lambda}\right)e^{-t/\lambda}\right]$$

Nota che

$$u(\infty) = \frac{R}{k} \qquad u(0^+) = \frac{R}{k}\frac{\tau}{\lambda}$$

Quindi per avere λ piccolo ($y(t)$ vicino al gradino ideale) si ha bisogno di un picco di ingresso molto elevato

Se $|u(t)| \le u_{max}$ $\quad \lambda_{min} = \frac{R\tau}{k\, u_{max}}$

Quindi la soluzione per avere $Q(s)$ proprio è cercare di ottenere $F(s)$ non costante con un certo grado relativo

$\boxed{Q(s) \text{ stabile}}$

Esempio $\quad G(s) = \dfrac{k(1-\beta s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$

$$Q(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{1}{k}\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1-\beta s}\overbrace{\frac{1}{1+\lambda s}}^{F(s)} \quad \text{è instabile}$$

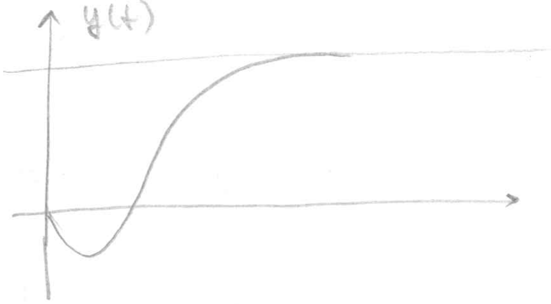
In questo caso conviene porre

$$F(s) = \frac{1-\beta s}{(1+\lambda s)^2}$$

da cui segue che

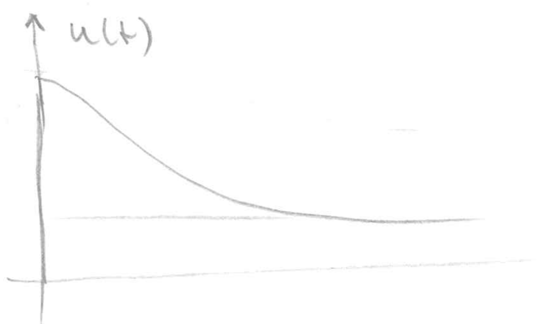
$$Q(s) = \frac{F(s)}{G(s)} = \frac{1}{k}\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\lambda s)^2}$$

Se $r(t) = R$ gradino



fase non minima

$$Y(s) = \frac{1-\beta s}{(1+\lambda s)^2} R(s)$$



$$U(s) = \frac{1}{k}\frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\lambda s)^2} R(s)$$

$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = \frac{R}{k}\frac{\tau_1\tau_2}{\lambda^2}$$

$\boxed{G(s) \text{ contiene ritardi}}$

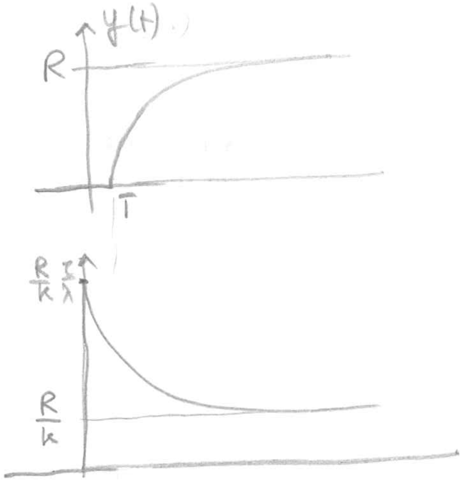
Esempio Se $G(s)=\frac{k}{1+\tau s}e^{-Ts}$ e $F(s)=\frac{1}{1+\lambda s}$

Allora otteniamo $Q(s)=\frac{1}{k}\frac{1+\tau s}{1+\lambda s}e^{Ts}$ non realizzabile

In questo caso conviene porre

$$F(s)=\frac{1}{1+\lambda s}e^{-Ts}$$

$$\boxed{Q(s)=\frac{1}{k}\frac{1+\tau s}{1+\lambda s}}$$



che porta se $r(t)=R$

$$y(t)=R\left(1-e^{-\frac{t-T}{\lambda}}\right)$$

$$u(t)=\frac{R}{k}\left[1-\left(1-\frac{\tau}{\lambda}\right)e^{-\frac{t-T}{\lambda}}\right]$$

(*)

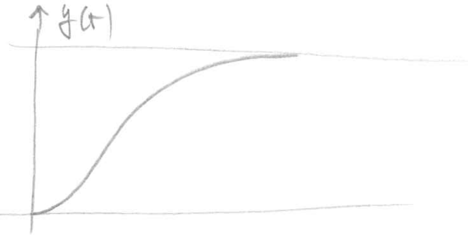
2) Errori di modello e disturbi

Esempio

$G(s)=\frac{k}{1+\tau s}$ vera $\hat{G}(s)=\frac{\hat{k}}{1+\hat{\tau}s}$ funzione di trasferimento stimata (nominale)

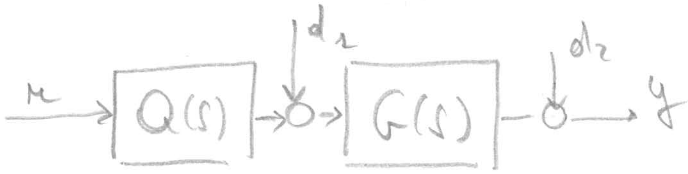
$$F(s)=\frac{1}{1+\lambda s} \rightarrow Q(s)=\frac{F(s)}{\hat{G}(s)}=\frac{1}{\hat{k}}\frac{1+\hat{\tau}s}{1+\lambda s}$$

$$Y(s)=Q(s)G(s)=\frac{k}{\hat{k}}\frac{1+\hat{\tau}s}{(1+\tau s)(1+\lambda s)}$$



Se abbiamo un disturbo

$\hat{G}(s)=G(s)$



$$Y(s)=Q(s)G(s)R(s)+G(s)D_1(s)+D_2(s)$$

Il controllore feed-forward non corregge i disturbi non misurati

In generale nel controllo feed forward conviene procedere nel modo seguente.

Si decompone

$$G(s) = G^+(s)\, G^-(s)$$

dove $G^+(s)$ è tale che $G^+(0) = 1$ e contiene gli eventuali ritardi e zeri instabili (e poli instabili)

$G^-(s)$ conterrà solo gli zeri stabili (e i poli stabili) di $G(s)$ e sarà tale che $G^-(0) = G(0)$

Quindi si sceglierà

$$Q(s) = \frac{1}{G^-(s)} \frac{1}{(1+\lambda s)^l}$$

dove l è il più piccolo intero che rende $Q(s)$ propria e λ è sufficientemente piccolo

Si noti che

$$F(s) = Q(s)\, G(s) = \frac{G^+(s)}{(1+\lambda s)^l}$$

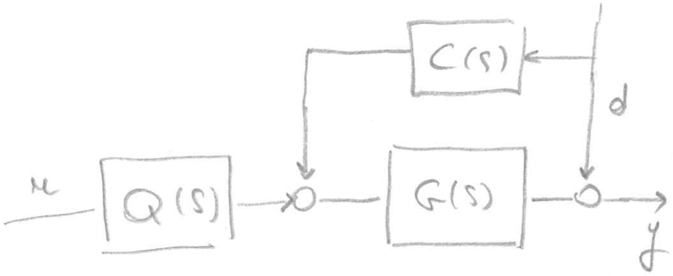
e quindi $F(0) = 1$ da cui segue che il gradino in ingresso viene inseguito esattamente per $t \to \infty$.

Inoltre si noti che $W_{zu}(s) = Q(s)\Big|_{s=\infty} = \frac{G^+(\infty)}{\lambda^l}$

Se $G^+(\infty)$ è finito, si vede che tale valore tende a ∞ per $\lambda \to 0$. Ciò dimostra che per λ troppo piccolo, il controllo feedforward tende a richiedere valori di attuazione molto alti.

Se il disturbo è misurabile, allora è possibile compensarne l'effetto

esempio



$$W_{dy}(s) = I + G(s)C(s)$$

ponendo $C(s) = -\frac{1}{G(s)}$ si ottiene $W_{dy}(s) = 0$

Ad esempio se $G(s) = \frac{k}{1+s\tau}$ allora $-\frac{1}{G(s)}$ è non realizzabile

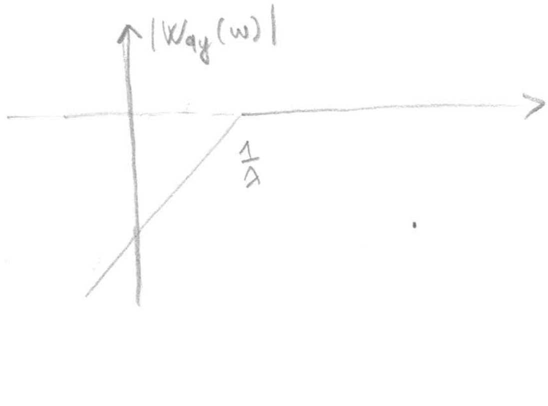
conviene prendere

$$C(s) = -\frac{1}{k}\frac{1+s\tau}{1+s\lambda}$$

da cui si ottiene

$$W_{dy}(s) = 1 - \frac{1}{1+s\lambda} = \frac{-s\lambda}{1+s\lambda}$$

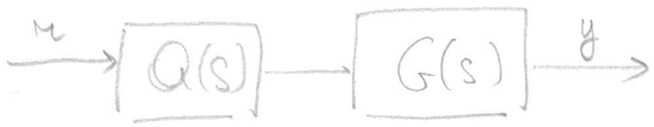
Diagramma di Bode



I disturbi con banda di frequenza $< 1/\lambda$ saranno attenuati

INTERNAL MODEL CONTROL

È uno schema che si ispira al feedforward con in più una connessione feedback che cerca di ovviare alla presenza di disturbi e dell'incertezza sul modello

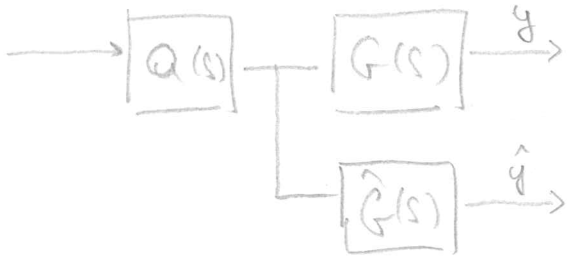


Se $Q(s) \simeq G(s)^{-1} \Rightarrow y \simeq r$

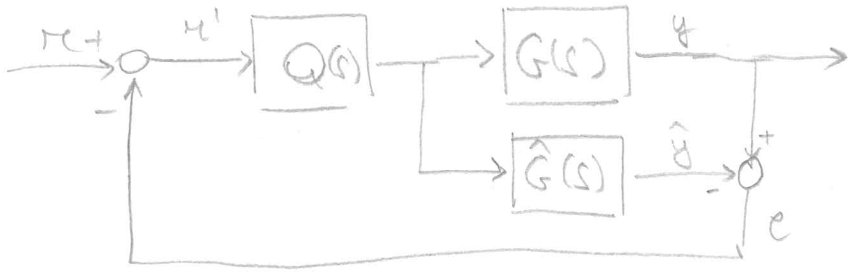
la discrepanza sarà dovuta a disturbi e alle incertezze

Sia $\hat{G}(s)$ la stima che abbiamo su $G(s)$ e supponiamo che $Q(s)$ sia progettato su $\hat{G}(s)$.

Allora



Se $\hat{G}(s) \simeq G(s) \Rightarrow y \simeq \hat{y} \Rightarrow e = y - \hat{y} \simeq 0$

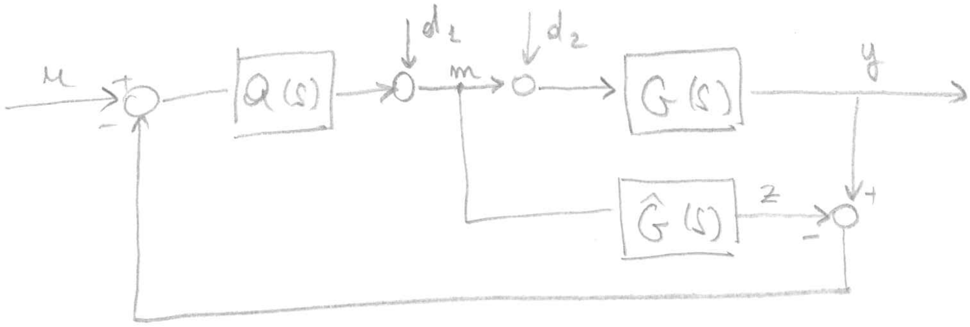


Se $e \simeq 0 \Rightarrow r' \simeq r$

Se $Q(s)$ è progettato come feedforward su $\hat{G}(s)$, allora $\hat{y} \simeq r'$ e quindi se $e \simeq 0 \Rightarrow y \simeq r$

Questa è l'intuizione che sta alla base di questo schema detto INTERNAL MODEL CONTROL (IMC). Per fare un'analisi esatta si devono calcolare le funzioni di trasferimento.

Inseriamo degli ingressi fittizi (o disturbi) in modo da avere stabilità interna del sistema



3 ingressi r, d_1, d_2

3 uscite y, m, z

$$y = Gm + Gd_2$$

$$m = d_1 + Qr - Qy + Qz$$

$$z = \hat{G} m$$

$$\begin{bmatrix} y \\ m \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G & 0 \\ -Q & 0 & Q \\ 0 & \hat{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ m \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ Q & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(I - \begin{bmatrix} 0 & G & 0 \\ -Q & 0 & Q \\ 0 & \hat{G} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y \\ m \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ Q & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y \\ m \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -G & 0 \\ Q & I & -Q \\ 0 & -\hat{G} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ Q & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{I - Q\hat{G} + QG} \Big[$$

$$\begin{bmatrix} y \\ u \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{I - Q\hat{G} + QG} \left[\begin{array}{c|c|c} QG & G & G(I-\hat{G}Q) \\ \hline Q & I & -GQ \\ \hline Q\hat{G} & \hat{G} & -G\hat{G}Q \end{array}\right] \begin{bmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

Per avere stabilità interna si deve avere $I - Q(\hat{G} - \hat{G})$ con zeri stabili

CASO IDEALE: $\hat{G} = G$ e $d_1 = d_2 = 0$

No incertezza e No disturbi

Allora $$y = QGr = Q\hat{G}r$$

e quindi se $Q \simeq \hat{G}^{-1}$, allora $y \simeq r$

CASO NON IDEALE $\hat{G} \neq G$ ma $d_1 = d_2 = 0$

Se poniamo $Q \cong \hat{G}^{-1}$, allora

$$y = \frac{QG}{I - Q\hat{G} + QG} r \cong \frac{QG}{QG} r \doteq r$$

Se $d_1 \neq 0$ (e $r = 0, d_2 = 0$)

$$y = \frac{G}{I - Q\hat{G} + QG} d_1 \cong \frac{G}{QG} d_1 \simeq \frac{1}{Q} d_1 \simeq \hat{G} d_1$$

come fosse in catena aperta

Se $d_2 \neq 0$ (e $r = 0, d_1 = 0$)

$$y = \frac{G(I - \hat{G}Q)}{I - Q\hat{G} + QG} d_2 \simeq \frac{G\,0}{QG} d_1 = \frac{0}{Q} d_1 \simeq 0$$

Si vede quindi che disturbi che entrano prima e dopo la diramazione hanno effetti molto diversi

SINTESI DELL' IMC

Come abbiamo visto, nella sintesi dell' IMC si cerca di ottenere due condizioni

1) $\hat{G}(s) \simeq G(s)$

2) $Q(s) \simeq \hat{G}(s)^{-1}$

La seconda condizione è simile alla condizione che deve essere soddisfatta nel caso della sintesi del controllore feedforward e quindi presenta problemi simili cioè che $\hat{G}(s)^{-1}$ può non essere proprio e potrebbe essere instabile. Per ovviare a questi due problemi si seguono le stesse tecniche usate nel caso della sintesi del controllore feedforward.

Si scrive $\hat{G}(s) = \hat{G}^{+}(s)\,\hat{G}^{-}(s)$

dove $\hat{G}^{+}(s)$ contiene ritardi, poli e instabili e inoltre si vincola $\hat{G}^{+}(0) = 1$. Mentre $\hat{G}^{-}(s)$ sarà stabile e a fase minima e $\hat{G}^{-}(0) = \hat{G}(0)$.

Allora si porrà

$$Q(s) = \frac{1}{\hat{G}^{-}(s)} \frac{1}{(1+\lambda s)^{l}}$$

dove l è il minimo intero che rende $Q(s)$ proprio e λ è sufficientemente piccolo

Esempio

$$\hat{G}(s) = \frac{\hat{k}}{1+\hat{\tau}s} \qquad G(s) = \frac{k}{1+\tau s} \qquad \begin{array}{l}\hat{k} \simeq k \\ \hat{\tau} \simeq k\end{array}$$

$$Q(s) = \frac{1}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\lambda s} \qquad \lambda \text{ piccolo}$$

La matrice di trasferimento è

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1+\lambda s} + \frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s}} \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s} & \frac{k}{1+\tau s} & \frac{k}{1+\tau s} \frac{\lambda s}{1+\lambda s} \\ \hline \frac{1}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\lambda s} & 1 & -\frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s} \\ \hline \frac{1}{1+\lambda s} & \frac{\hat{k}}{1+\hat{\tau}s} & -\frac{k}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s} \end{array}\right]$$

$$W_{ry}(s) = \frac{\frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s}}{1 + \frac{1}{1+\lambda s}\left[\frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} - 1\right]} = \frac{\frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s}}{\lambda s + \frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s}}$$

$$= \frac{1}{1 + \lambda s\left[\frac{\hat{k}(1+\tau s)}{k(1+\hat{\tau}s)}\right]} = \frac{k(1+\hat{\tau}s)}{k(1+\hat{\tau}s) + \hat{k}(1+\tau s)\lambda s}$$

Noto che $W_{ry}(0) = 1$

Inoltre se λ piccolo allora $W_{ry}(s) \simeq 1$

$$W_{rm}(s) = \frac{\frac{1}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s}}{1 - \frac{1}{1+\lambda s} + \frac{k}{\hat{k}} \frac{1+\hat{\tau}s}{1+\tau s} \frac{1}{1+\lambda s}}$$

Si noti che $W_{rm}(\infty) = \frac{1}{\hat{k}} \frac{\hat{\tau}}{\lambda}$ e quindi

$W_{rm}(\infty) \longrightarrow +\infty$ se $\lambda \longrightarrow 0$

Ciò implica che, come per il controllo feedforward, se λ è troppo piccolo, il segnale di attuazione $m(0^+)$ tende ad essere molto grande nella risposta al gradino.

Esempio

Sia $G(s) = \frac{K}{1+\tau s} e^{-sT}$ e $\hat{G}(s) = \frac{K}{1+\tau s} e^{-sT}$

Poniamo

$$Q(s) = \frac{1}{K} \frac{1+\tau s}{1+\lambda s}$$

$$W_{zy}(s) = \frac{1}{1+\lambda s} e^{-sT}$$

esattamente identico a quanto ottenuto col controllore feed forward.

Si noti che in certi casi il ritardo non è realizzabile fisicamente (lo è nelle implementazioni digitali) e allora nella sintesi di $\hat{G}(s)$ si sostituisce e^{-sT} con una sua approssimazione, detta approssimazione di Padé

$$e^{-Ts} \simeq \frac{1 - Ts/2}{1+Ts/2} \quad \text{o} \quad e^{-Ts} \simeq \frac{1 - Ts/2 + T^2s^2/12}{1 + Ts/2 + T^2s^2/12}$$

Per vedere come si ottengono queste approssimazioni si vede il seguente esempio

Esempio vogliamo approssimare e^{-Ts} con $\frac{b_0+b_1 s}{1+a_1 s}$

$$\frac{b_0+b_1 s}{1+a_1 s} \simeq e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2} - \frac{T^3 s^3}{3!} + \dots$$

$$b_0 + b_1 s \simeq (1+a_1 s)(1 - Ts + \frac{T^2 s^2}{2} + \dots)$$

Cerco di eguagliare più termini possibili

grado zero : $b_0 = 1$

grado uno : $b_1 = a_1 - T$

grado due : $0 = -Ta_1 + T^2/2 \Rightarrow a_1 = T/2 \Rightarrow b_1 = -T/2$