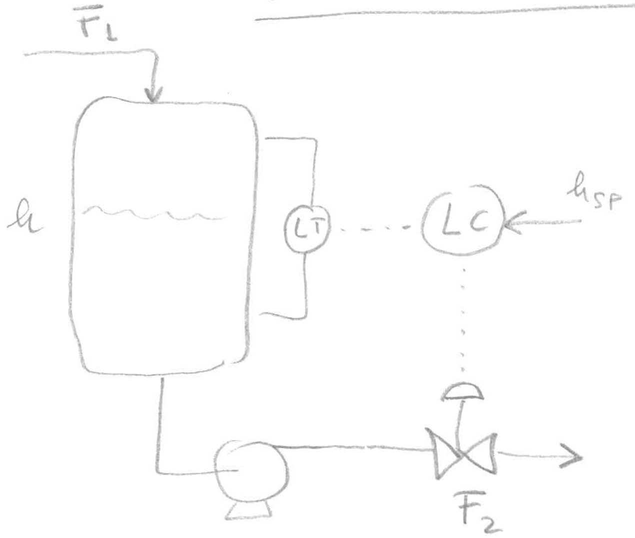
LEVEL CONTROL



$h(t)$ livello del serbatoio

$F_1(t)$ flusso di ingresso

$F_2(t)$ flusso di uscita

A area della sezione del serbatoio

Modello

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}(F_1 - F_2)$$

Supponiamo che vogliamo controllare $h(t)$ usando come variabile comandata $F_2(t)$ e considerando $F_1(t)$ come un disturbo.

Supponiamo che $F_1(t)$ abbia valore nominale costante $F_1(t) = F_s$ e che in generale $F_1(t) = F_s + d(t)$

Supponiamo di voler mantenere costante $h(t) = h_{sp}$

Si propone un controllo proporzionale

$$F_2(t) = H + k(h(t) - h_{sp})$$

Allora

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\left\{F_s + d(t) - H - k(h(t) - h_{sp})\right\}$$

In equilibrio abbiamo che $d(t) = 0$ $h(t) = h_s$

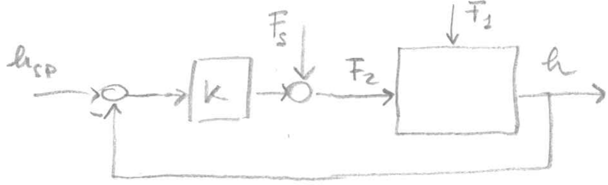
$$0 = \frac{1}{A}\left\{F_s - H - K(h_s - h_{sp})\right\}$$

Se poniamo $H = F_s$ allora $h_s = h_{sp}$

Si giustifica che, se il sistema è stabile, allora

$h(t) \longrightarrow h_s = h_{sp}$

Infatti



$$\frac{dh}{dt} = -\frac{K}{A}\left(h(t) - h_{sp}\right) + \frac{1}{A} d(t)$$

Sia $y(t) = h(t) - h_{sp}$. Allora

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{K}{A} y(t) + \frac{1}{A} d(t) \qquad y(s) = \frac{1/A}{s + K/A} d(s) = \frac{1}{As+K} d(s) \quad K<0$$

Se scegliamo $K > 0$, allora se $d(t) \equiv 0$, si ha che

$y(t) \longrightarrow 0$ che implica che $h(t) \longrightarrow h_{sp}$

Supponiamo ora che il disturbo possa assumere valori costanti compresi in $\pm \Delta D$ e supponiamo che vogliamo che di conseguenza $y(t) = h(t) - h_{sp}$ vari non più di $\pm \Delta Y$

$$y(\infty) = \left.\frac{1}{As+K}\right|_{s=0} d(\infty) = \frac{d(\infty)}{K}$$

$$\Delta Y \geq |y(\infty)| = \frac{|d(\infty)|}{K}$$

Quindi

$$K \geq \frac{|d(\infty)|}{\Delta Y} \Longrightarrow K \geq \frac{\Delta D}{\Delta Y}$$

Osservo che, se $d(t) = \Delta D\, \delta^{-1}(t)$ allora

$$F_2(t) = F_s + K\, y(t)$$

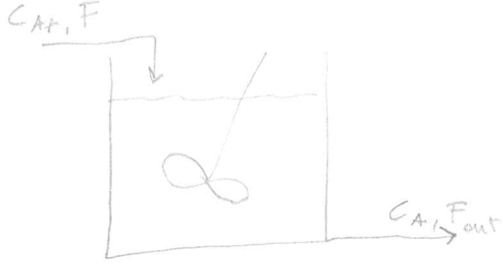
$$y(s) = \frac{1/K}{1 + sA/K} \frac{\Delta D}{s}$$

$$y(t) = \frac{\Delta D}{K}\left(1 - e^{-\frac{A}{K}t}\right)$$

CONTROLLO REATTORE ISOTERMO

Consideriamo un reattore continuo in cui avvenga la reazione

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$
$$2A \xrightarrow{k_3} D$$



Il componente desiderato è B

Supponiamo che l'effetto termico della reazione sia trascurabile. Allora le equazioni che descrivono le reazioni sono

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} C_A = \dfrac{F}{V}(C_{Af} - C_A) - k_1 C_A - k_3 C_A^2 \\ \dfrac{d}{dt} C_B = -\dfrac{F}{V} C_B + k_1 C_A - k_2 C_B \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dt} = F - F_{out}$$
$$F_{out} = F$$
$$\Downarrow$$
$$V(t)\ \text{cost}$$

$$\frac{d}{dt} C_C = -\frac{F}{V} C_C + k_2 C_B$$

$$\frac{d}{dt} C_D = -\frac{F}{V} C_D + \frac{1}{2} k_3 C_A^2$$

Possiamo considerare solo le prime due equazioni

Calcoliamo gli andamenti a regime

$C_A(t) = \overline{C}_A \qquad C_B(t) = \overline{C}_B \qquad C_{Af}(t) = \overline{C}_{Af} \qquad F(t) = \overline{F}$

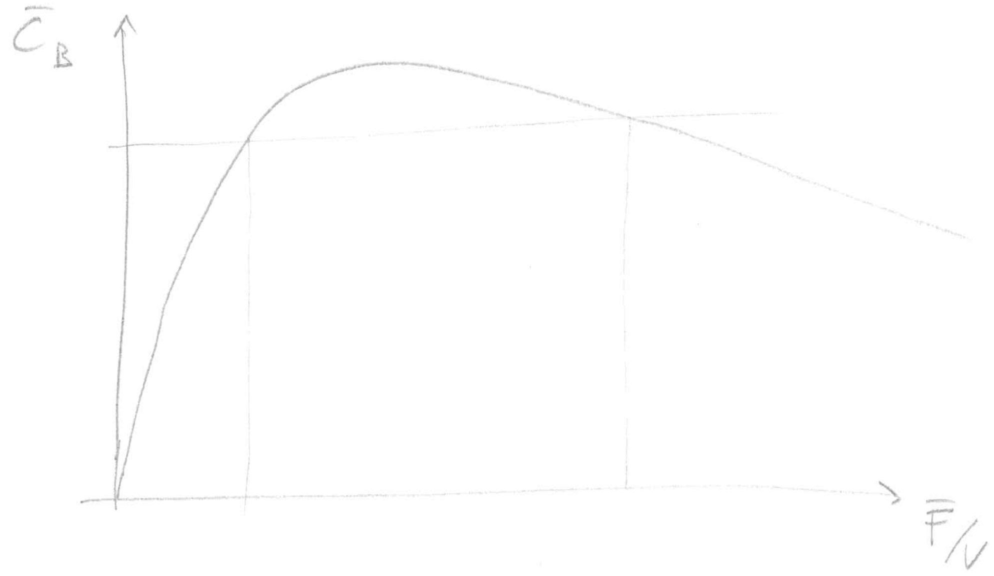
$$\begin{cases} \dfrac{\overline{F}}{V}(\overline{C}_{Af} - \overline{C}_A) - k_1 \overline{C}_A - k_3 \overline{C}_A^2 = 0 & \Rightarrow \overline{C}_A \text{ come funzione di } \overline{C}_{Af} \text{ e } \overline{F}/V \\ -\dfrac{\overline{F}}{V}\overline{C}_B + k_1 \overline{C}_A - k_2 \overline{C}_B = 0 & \Rightarrow \overline{C}_B \text{ come funzione di } \overline{C}_{Af} \text{ e } \overline{F}/V \end{cases}$$

La prima è un'equazione di II grado di $\overline{C}_A = f(\overline{C}_{Af}, \frac{\overline{F}}{V})$

La seconda equazione è di I grado

$$\bar{C}_B = \frac{k_1 \bar{C}_A}{\frac{\bar{F}}{V} + k_2} = \frac{k_1}{k_2 + \frac{\bar{F}}{V}} f\left(\bar{C}_{Af}, \frac{\bar{F}}{V}\right)$$

Se fissiamo $\bar{C}_{Af}$ la curva che descrive $\bar{C}_B$ in funzione di $\frac{\bar{F}}{V}$ è mostrata in figura



Si vede che per ottenere un certo valore dell'uscita $\bar{y} = \bar{C}_B$ esistono due valori possibili dell'ingresso $\bar{u} = \bar{F}/V$. Mostriamo che le funzioni di trasferimento relative ai due punti di equilibrio hanno guadagno in continua opposto e sono entrambi stabili

Studiamo un sistema generale non lineare bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u_1, u_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \end{cases}$$

Punti di equilibrio $\bar{x}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ $\bar{x}_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ ingressi costanti $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$

$$\begin{cases} f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0 \\ f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0 \end{cases}$$

Sistema linearizzato

$$\dot{z} = Az + Bv$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\substack{\bar{u}_1, \bar{u}_2 \\ \bar{x}_1, \bar{x}_2}} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\dots} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right| & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\dots} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial u_1}}_{B_1} & \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial u_2}}_{B_2} \end{bmatrix}$$

Noto ora che

$$f_1(\bar{x}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{x}_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 0 \qquad \forall \bar{u}_1, \bar{u}_2$$

$$f_2(\bar{x}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{x}_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \bar{u}_1, \bar{u}_2) \equiv 0 \qquad \forall \bar{u}_1\ \bar{u}_2$$

e quindi, se derivo rispetto a $\bar{u}_1$

$$0 = \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_2}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{u}_1}$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}_1}\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_1} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}_2}\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_2} + \frac{\partial f_2}{\partial \bar{u}_1}$$

$$0 = A \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_1} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_1} \end{bmatrix} + B_1$$

Analogamente per la derivazione rispetto a $\bar{u}_2$

$$0 = A \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_2} \end{bmatrix} + B_2$$

$$\underbrace{A \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_1} & \dfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial \bar{u}_2} \\ \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_1} & \dfrac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_2} \end{bmatrix}}_{X(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} + B = 0$$

$$\Rightarrow X(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = -A^{-1}B$$

se A è invertibile

Consideriamo ora la matrice di trasferimento

$$G(s) = (sI - A)^{-1} B \qquad \text{da } \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Allora

$$G(0) = A^{-1}B = -X(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

Nel nostro caso specifico abbiamo che

$x_1 = C_A \quad x_2 = C_B \quad u_1 = \frac{F}{V} \quad u_2 = C_{Af}$

da cui deduciamo che (Sia $G(s) = G_{\frac{\tilde F}{V} \to \tilde C_B}(s)$)

$$G(0) = \bar{X}_{21} = \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \bar{u}_1} = \frac{\partial \bar{C}_B}{\partial \bar{F}/V} \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\tilde F}{V} &= \frac{F}{V} - \frac{\bar F}{V} \\ \tilde C_B &= C_B - \bar C_B \end{aligned}}$$

Ma $\bar{C}_B\left(\frac{\bar F}{V}\right)$ è proprio la curva tracciata in figura e che dimostra che nel primo punto di equilibrio abbiamo

$$G(0) > 0$$

mentre nel secondo abbiamo

$$G(0) < 0$$

Le matrici A e B sono

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -\frac{\bar F}{V} - k_1 - 2k_3\bar{C}_A & 0 \\ \hline k_1 & -\frac{\bar F}{V} - k_2 \end{array}\right] \qquad B = \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_{Af} - \bar{C}_A & \bar{F}/V \\ \hline -\bar{C}_B & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Noto che gli autovalori sono $-z_1$ e $-z_2$ dove $z_1 = \bar F/V + k_1 - 2k_3\bar C_A > 0$

$z_2 = \bar F/V + k_2$

Autovalori Stabili

$$G(s) = [0 \ 1](sI - A)^{-1} B_1$$

$$= [0 \ 1] \left[\begin{array}{c|c} \left(s + \frac{\bar F}{V} + k_1 + 2k_3\bar C_A\right)^{-1} & 0 \\ \hline -\left(s + \frac{\bar F}{V} + k_1 + 2k_3 \bar C\right)^{-1}\left(s + \frac{\bar F}{V} + k_2\right)^{-1} k_1 & \left(s + \frac{\bar F}{V} + k_2\right)^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar C_{Af} - \bar C_A \\ -\bar C_B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-(\bar C_{Af} - \bar C_A)k_1}{(s + z_1)(s + z_2)} - \frac{\bar C_B}{s + z_1} = \frac{-(\bar C_{Af} - \bar C_A)k_1 - \bar C_B(s + z_1)}{(s + z_1)(s + z_2)}$$

$$= -\frac{\bar C_B s + \bar C_B z_1 + (\bar C_{Af} - \bar C_A)k_1}{(s + z_1)(s + z_2)} = -\bar C_B \frac{(s - s_0)}{(s + z_1)(s + z_2)}$$

Dove lo zero è

$$s_0 = \frac{\bar{C}_B z_1 - (\bar{C}_{Af} - \bar{C}_A) k_1}{\bar{C}_B} = z_1 - \frac{\bar{C}_{Af} - \bar{C}_A}{\bar{C}_B} k_1$$

Noto che

$$G(0) = \frac{\bar{C}_B s_0}{z_1 z_2}$$

e quindi $G(0) > 0 \iff s_0 > 0 \iff G(s)$ fase non minima.

La funzione di trasferimento tra $\tilde{C}_{Af}$ a $\tilde{C}_B$ è

$$G_d(s) = [0\ 1](sI-A)^{-1} B_2 =$$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{C}_{Af}(t) &= C_{Af}(t) - \bar{C}_{Af} \\ \tilde{C}_B(t) &= C_B(t) - \bar{C}_B\end{aligned}}$$

$$= \frac{-k_1(\bar{C}_{Af} - \bar{C}_A)}{(s+z_1)(s+z_2)}$$

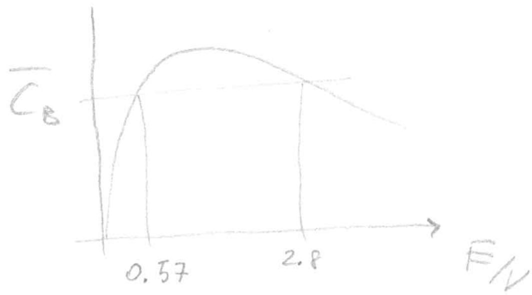
Prendiamo

$$k_1 = 50\ hr^{-1} = \frac{5}{6}\ min^{-1}$$

$$k_2 = 100\ hr^{-1} = \frac{5}{3}\ min^{-1}$$

$$k_3 = 10\ hr^{-1}\ \frac{mol}{liter} = \frac{1}{6}\ min^{-1}\ \frac{mol}{liter}$$

$$\bar{C}_{Af} = 10\ \frac{gmol}{liter}$$



Per ottenere $\bar{C}_B = 1,117\ \frac{gmol}{liter}$

ci sono due possibili ingressi costanti.

$$\bar{F}/V = 0.57\ min^{-1} \qquad \bar{F}/V = 2.8\ min^{-1}$$

Si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} -2.40 & 0 \\ 0.83 & -2.24 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0.57 \\ -1,12 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0\ 1]$$

$$G(s) = \frac{0.58(-0.35s+1)}{0.18s^2 + 0.86s + 1}$$

$$G_d(s) = \frac{0,088}{0,18s^2 + 0.86s + 1}$$

Problema 1

a) Se vogliamo una variazione su C_B di 0,1 $\frac{\text{gmol}}{\text{litro}}$ che variazione dobbiamo imporre su $\frac{F}{V}$

Risposta

$$\tilde{C}_B(\infty) = G(0)\,\frac{\tilde{F}}{V}(\infty)$$

$$\text{Se } \tilde{C}_B(\infty) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\hat{F}}{V}(\infty) = \frac{0{,}1}{G(0)} = \frac{0.1}{0.58} = 0{,}172$$

b) Se vogliamo mantenere la variazione sull'ingresso $\frac{\tilde{F}}{V}$ minore di 0,4 min^{-1}, la massima variazione consentita su $\tilde{C}_B$ a regime è

$$\hat{C}_B(\infty) \leq G(0)\,0{,}4 = 0{,}232$$