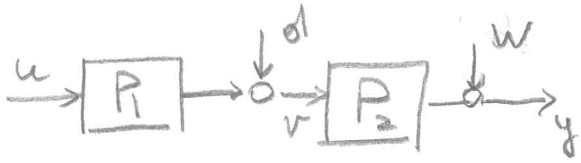
# CONTROLLO IN CASCATA

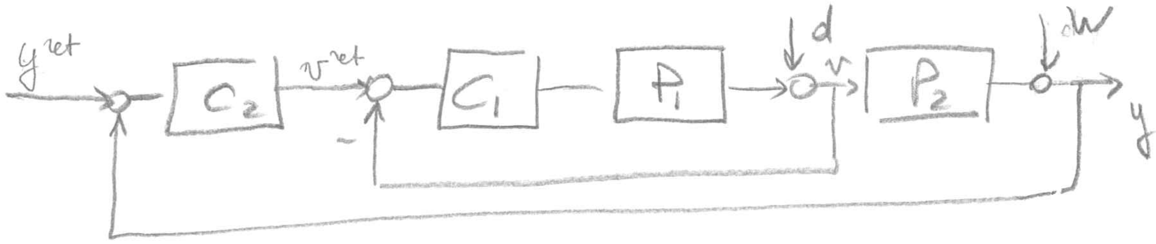
È una strategia di controllo utile quando si devono controllare sistemi a 1 ingresso (1 attuatore) e 2 uscite (2 sensori). Distinguiamo due configurazioni

## 1) CONFIGURAZIONE SERIE

Supponiamo di avere una serie di due sistemi in cui $u(t)$ è l'ingresso manipolabile, $d(t)$ è l'ingresso di disturbo e $v(t)$, $y(t)$ sono entrambe misurabili




Consideriamo lo schema di controllo




In questo schema si devono determinare $C_1(s)$ e $C_2(s)$ cioè le funzioni di trasferimento dei due controllori. Una strategia semplice per la sintesi dei controllori è la seguente:

1) Prima determinare $C_1(s)$ in modo che $v^{ref}(t) \approx v(t)$. Una semplice strategia è quella HIGH GAIN cioè prendere $C_1(j\omega)$ molto grande per gli $\omega$ tali che $v^{ref}$ e $d$ hanno contenuti frequenziali cioè per gli $\omega$ tali che $v^{ref}(s)|_{s=j\omega}$ e $d(s)|_{s=j\omega}$ sono significativamente $\neq 0$

dove $v^{ref}(s)$ e $d(s)$ sono le trasformate di Laplace di $v^{ref}(t)$ e $d(t)$ (quindi $v^{ref}(s)|_{s=j\omega}$ e $d(s)|_{s=j\omega}$ sono le trasformate di Fourier).

Infatti,

$$v(s) = \frac{C_1(s)\,P_1(s)}{1+C_1(s)\,P_1(s)}\, v^{ref}(s) + \frac{1}{1+C_1(s)P_1(s)}\, d(s)$$

Se prendiamo $s=j\omega$, allora dove $v^{ref}(j\omega)$ e $d(j\omega)$ sono grandi, $C_1(j\omega)$ è grande e quindi

$$\frac{C_1(j\omega)\,P_1(j\omega)}{1+C_1(j\omega)\,P_1(j\omega)} \simeq \frac{C_1(j\omega)\,P_1(j\omega)}{C_1(j\omega)\,P_1(j\omega)} = 1$$

$$\frac{1}{1+C_1(j\omega)\,P_1(j\omega)} \simeq 0$$

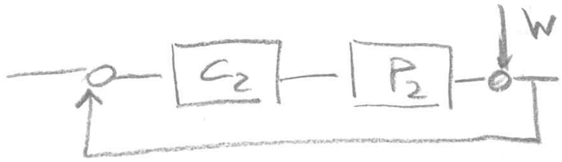
e quindi

$$v(j\omega) \simeq v^{ref}(j\omega)$$

Se $s=j\omega$ con $\omega$ tale che $v^{ref}(j\omega)$ e $d(j\omega)$ sono piccoli, allora $v(j\omega)$ è piccolo come lo è anche $v^{ref}(j\omega)$

Quindi $v(j\omega)\simeq v^{ref}(j\omega) \Rightarrow v(t)\simeq v^{ref}(t)$

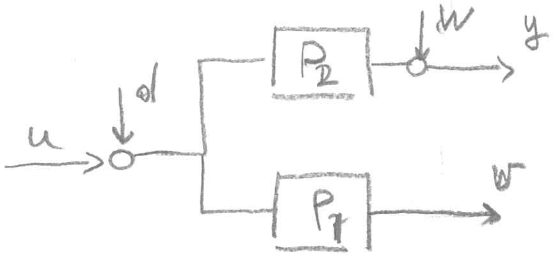
Dato che $v$ e $v^{ref}$ sono circa uguali, allora lo schema precedente si riduce al seguente



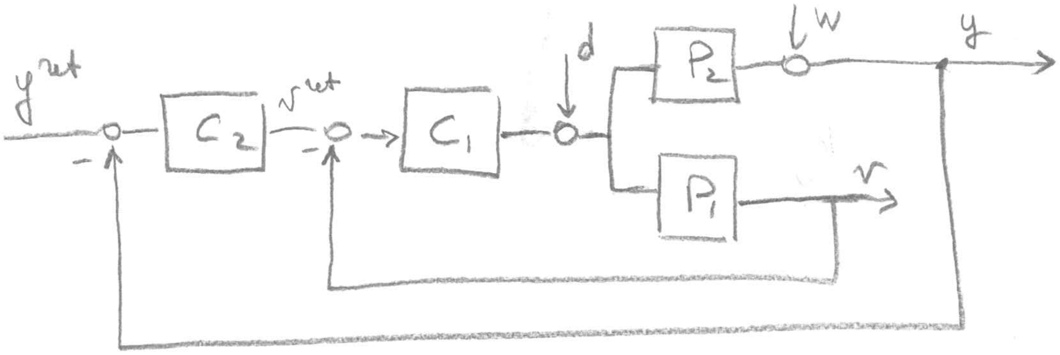

e quindi a questo punto si determina $C_2$ con i soliti metodi dei controlli automatici (PID, criteri di Bode, luogo delle radici, sintesi diretta, internal model control, etc)

## 2) CONFIGURAZIONE PARALLELO

Supponiamo che le due uscite $v$ e $y$ sono collegate all'ingresso $u$ otteniamo questo schema.




Consideriamo il seguente schema di controllo




Allora

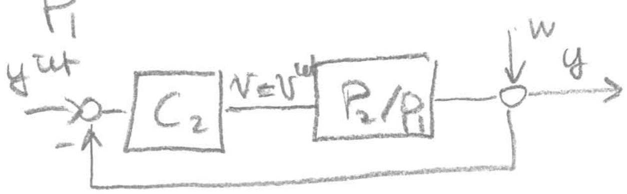
$$v(s) = \frac{C_1 P_1}{1+C_1 P_1} v^{ref}(s) + \frac{P_1}{1+C_1 P_1} d(s)$$

Se come nel caso precedente scegliamo $C_1(s)$ tale che $|C_1(j\omega)|$ è grande per gli $\omega$ tali che $v^{ref}(j\omega)$ e $d(j\omega)$ sono grandi, allora

$$v(j\omega) \simeq v^{ref}(j\omega) \Rightarrow v(t) \simeq v^{ref}(t)$$

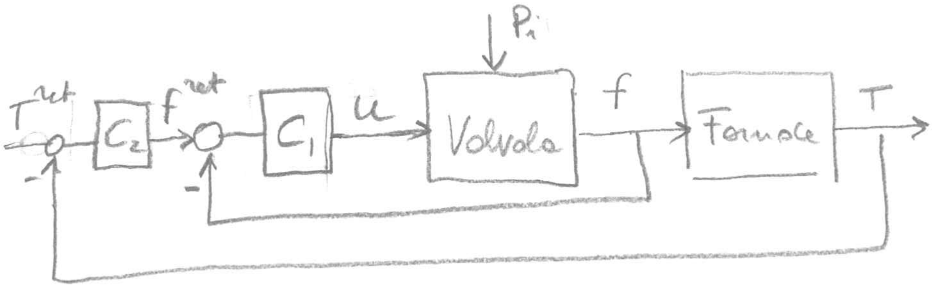
$$\Rightarrow y(s) = \frac{P_2}{P_1} v(s) + W(s) \cong \frac{P_2}{P_1} v^{ref}(s) + W(s)$$

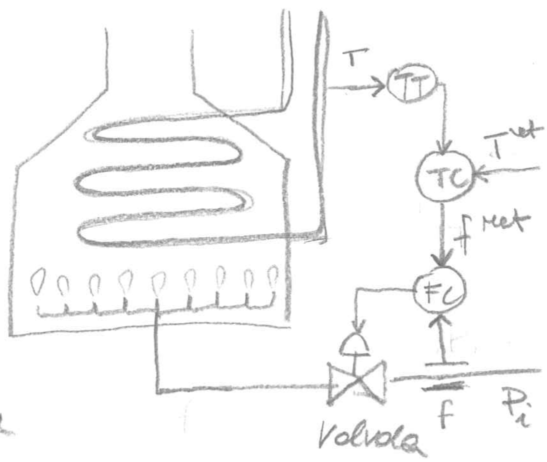
il controllo esterno diventa




e quindi $C_2(s)$ può essere determinato con metodi classici a partire da $P_2/P_1$

## Esempio: Controllo di temperatura




La fornace la possiamo modellare attraverso una funzione di trasferimento $P_F(s)$

La valvola si modella attraverso l'equazione

$$f(t) = K\, u(t) \sqrt{\frac{P_1(t) - P(t)}{G}}$$

dove
- $u(t)$ è la percentuale di apertura della valvola, quindi $u(t) \in [0,1]$
- $P_1(t)$ è la pressione prima della valvola
- $p(t)$ è la pressione dopo la valvola
- $f(t)$ è il flusso di gas dagli ugelli del forno
- $K, G$ costanti

Possiamo ipotizzare che $p(t)$ sia la pressione atmosferica $P(t) = \bar{P}$

$$f(t) = K\, u(t) \sqrt{\frac{P_1(t) - \bar{P}}{G}} = F(u(t), P_1(t)) \quad \text{2 variabili}$$

## (ANELLO INTERNO)

Se $u(t)=\bar{u}$ e $P_1(t)=\bar{P}_1$ allora

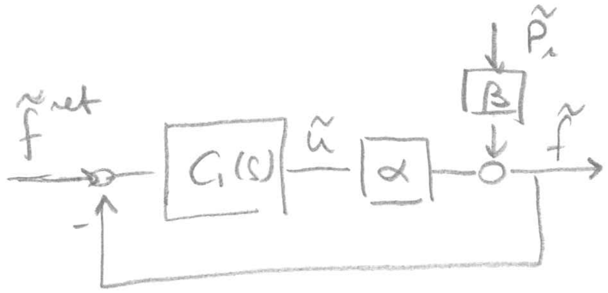
$$\bar{f} \triangleq k\,\bar{u}\sqrt{\frac{\bar{P}_1-\bar{P}}{G}} = F(\bar{u},\bar{P}_1)$$

Sia $\tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$ $\quad \tilde{P}_1(t)=P_1(t)-\bar{P}_1$ e $\tilde{f}(t)=f(t)-\bar{f}$

Allora

$$\tilde{f}(t)=\frac{\partial F}{\partial u}\tilde{u}(t)+\frac{\partial F}{\partial P_1}\tilde{P}_1(t)=\underbrace{k\sqrt{\frac{\bar{P}_1-\bar{P}}{G}}}_{\alpha}\,\tilde{u}(t)+\underbrace{\frac{k\bar{u}}{2\sqrt{G(\bar{P}_1-\bar{P})}}}_{\beta}\,\tilde{P}_1(t)$$

Prendiamo come $C_1(s)=\frac{K}{1+s\tau}$ con K grande



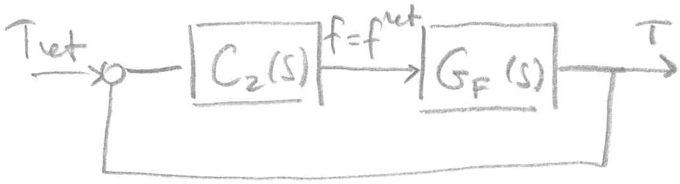

dove $\tilde{f}^{ref}(t)=f^{ref}(t)-\bar{f}$

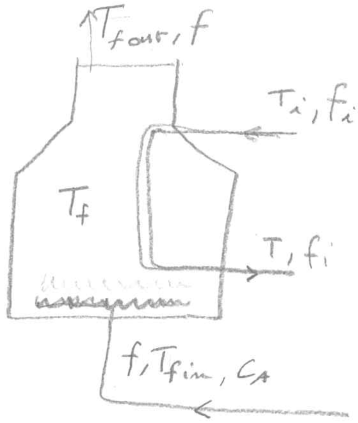
$$W_{\tilde{f}^{ref},\tilde{f}}(s)=\frac{\alpha C_1}{1+\alpha C_1}=\frac{\alpha K}{1+\alpha K+s\tau}=\frac{\frac{\alpha K}{1+\alpha K}}{1+s\frac{\tau}{1+\alpha K}}\simeq 1$$

$$W_{\tilde{P}_1,\tilde{f}}(s)=\frac{\beta}{1+\alpha C_1}=\frac{\beta(1+s\tau)}{1+\alpha K+s\tau}\simeq 0$$

Quindi $\tilde{f}^{ref}(t)\simeq\tilde{f}(t) \Rightarrow f^{ref}(t)\simeq f(t)$

## ANELLO ESTERNO




Determiniamo un modello della fornace

$$\rho_f V_f \frac{dH_f}{dt} = f H_{f_{in}} - f H_{f_{out}} + hA(T - T_f) + \Delta H \, C_A f$$

dove • $H_f, H_{f_{in}}, H_{f_{out}}$ sono le entalpie del gas dentro alla fornace, in ingresso e in uscita

- $\rho_f$ densità del gas nella fornace
- $V_f$ volume fornace
- $hA$ coefficiente di trasmissione termica
- $T_f$ temperatura fornace
- $T$ temperatura del fluido da riscaldare
- $\Delta H$ coefficiente di creazione di entalpia per reazione chimica
- $C_A$ densità di gas combustibile

$$\rho V \frac{dH}{dt} = f_i (T_i - T) + hA(T_f - T)$$

Ipotesi $\quad f H_{f_{in}} - f H_{f_{out}}$ trascurabili rispetto a

$$hA(T - T_f) + \Delta H \, C_A f$$

Si ottiene il sistema

$H_f = C_{pf} T_f$

$H = C_p T$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} T_f = \underbrace{\dfrac{hA}{C_{pf}\,\rho_f V_f}}_{\text{costante}} (T - T_f) - \underbrace{\dfrac{\Delta H\, C_A}{C_{pf}\,\rho_f V_f}}_{\text{costante}} f \\ \dfrac{d}{dt} T = -\dfrac{f_i + hA}{\rho V C_p} T + \dfrac{hA}{\rho V C_p} T_f \end{cases}$$

$x = \begin{bmatrix} T_f \\ T \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a & a \\ b & -b-c \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} f$$

$$T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} x$$

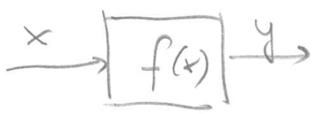
$$\det(sI - A) = (s+a)(s+b+c) - ab$$

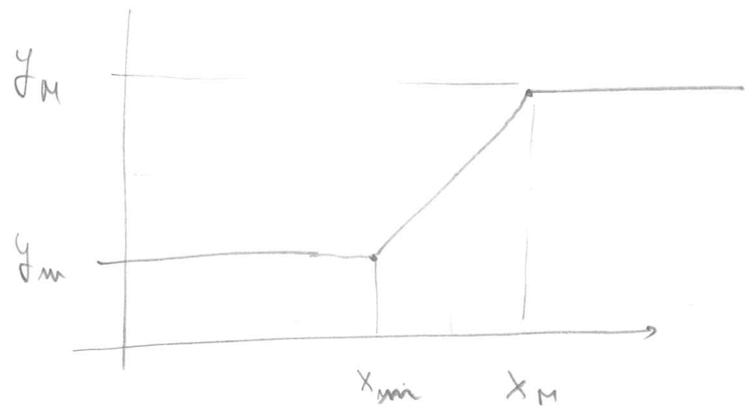
$$= s^2 + s(a+b+c) + ac \qquad \text{stabile}$$

$W_{f,T}(s) = C\,(sI - A)^{-1} B$ secondo ordine stabile

# WIND-UP E SCHEMI ANTIWIND-UP

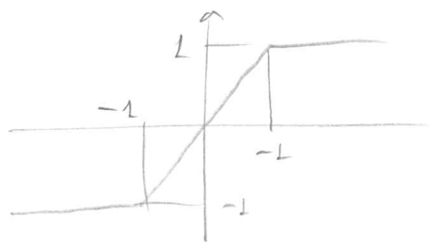
Abbiamo notato che in genere sensori e attuatori saturano se gli ingressi sono troppo alti o troppo bassi. Quindi una migliore descrizione di un sistema con tali limitazioni prevede l'inserimento negli schemi a blocchi di blocchi di saturazione




$$f(x) = \begin{cases} y_m & \text{se } x < x_m \\ \dfrac{y_M - y_m}{x_M - x_m}(x - x_m) + y_m & x_m \le x \le x_M \\ y_M & \text{se } x > x_M \end{cases}$$

Esiste una versione normalizzata

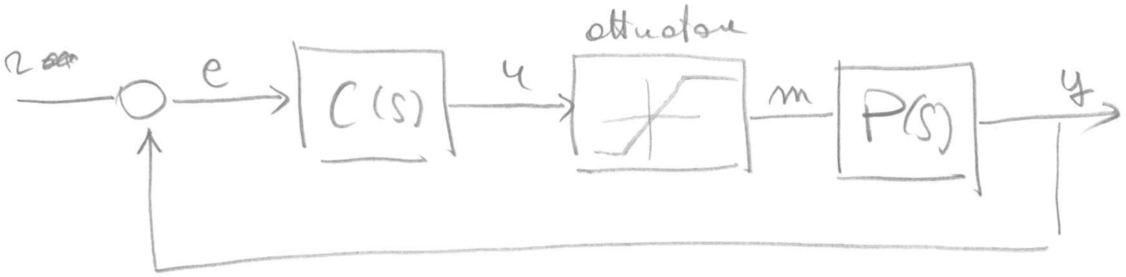



$$\mathrm{sat}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ x & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Nota la

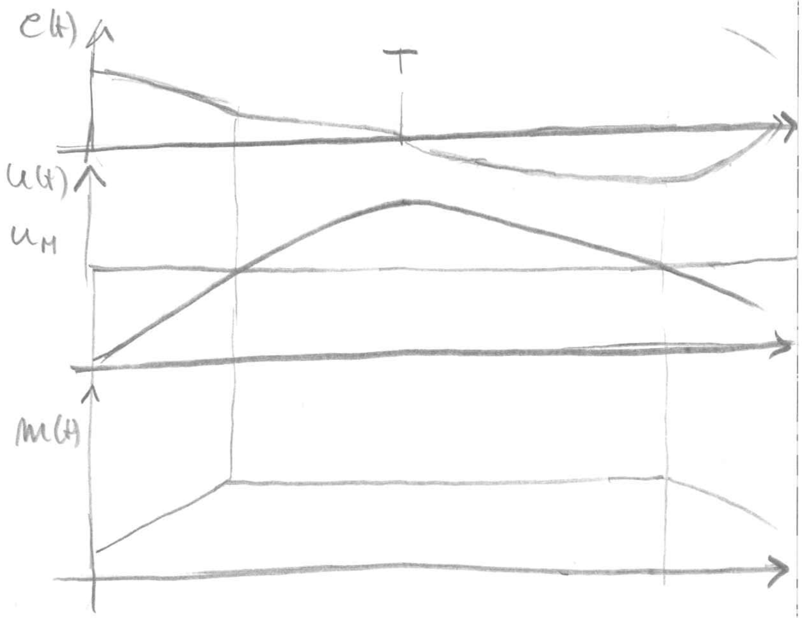
$$f(x) = \Delta_y \,\mathrm{sat}\left(\frac{x - \bar{x}}{\Delta_x}\right) + \bar{y} \quad \text{dove} \quad \bar{x} = \frac{x_M + x_m}{2} \quad \bar{y} = \frac{y_M + y_m}{2} \quad \Delta_x = \frac{x_M - x_m}{2} \quad \Delta_y = \frac{y_M - y_m}{2}$$

Lo schema di controllo in retroazione con un attuatore avente una saturazione diventa



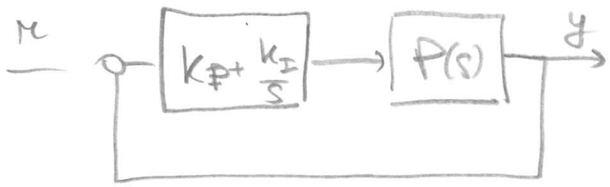

Se $C(s)$ ha una parte integrale (Polo nell'origine) questo schema porta dei problemi. Questo perché se l'errore $e(t)$ si mantiene dello stesso segno per un lungo periodo (ad esempio rimane $e(t) > 0$ per $t \in [0\ T]$) allora $u(t)$ tenderà a crescere fino ad andare oltre a $u_M$

Quando $e(t)$ cambia segno $u(t)$ tenderà a decrescere ma $u(t)$ resterà saturato per un periodo e quindi il controllore non reagirà al cambiamento di segno di $e(t)$ se non dopo che $u(t)$ sarà tornato sotto la soglia

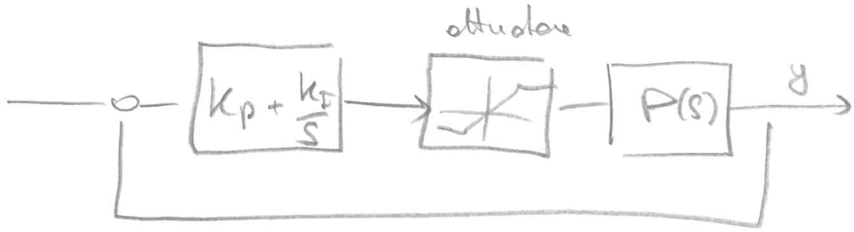


# Schema di desaturazione (Anti Wind-UP)

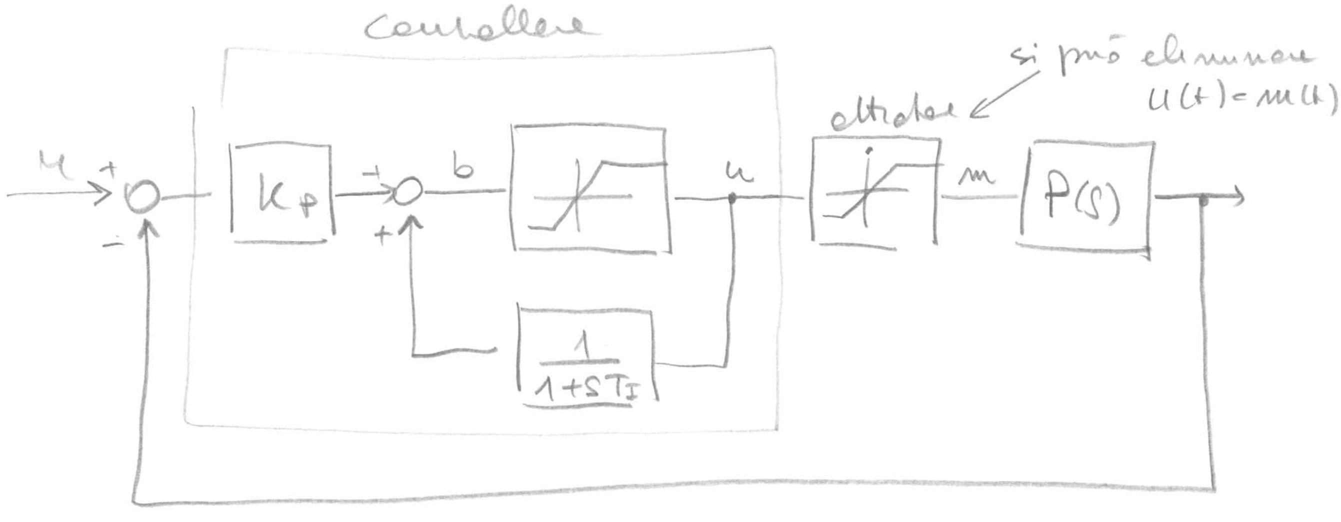
Supponiamo di voler implementare un controllore PI



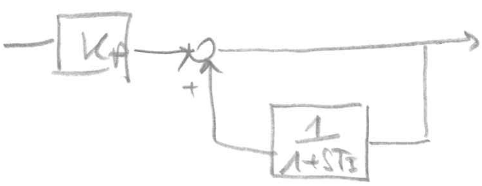

Ma supponiamo che sull'attuatore agisca una saturazione




Consideriamo il seguente schema alternativo




Se $b \in [b_{min}, b_{max}]$ $\Rightarrow$ la saturazione è come non ci fosse (Sat = identità)

controllore =  $= K_p \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1+sT_I}} = K_p \dfrac{1+sT_I}{s}$

Per questo schema, se $e(t)$ resta dello
$(e(t)>0)$
stesso segno a lungo, allora $u(t)$ e $m(t)$
saturano, $(u(t) = u_M \; , \; m(t) = u_M \; , \; b(t) > u_M)$

Il blocco $\dfrac{1}{1+sT_I}$ si trova un ingresso

costante $u(t) = u_M$ e quindi $z(t) \rightarrow u_M$

e $b(t) \longrightarrow u_M + k\, e(t)$

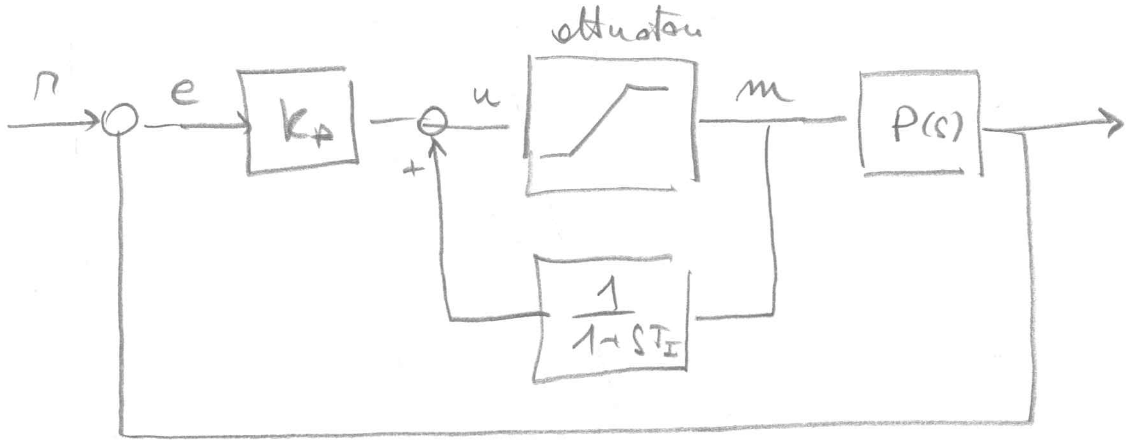
Se $e(t)$ cambia segno $(e(t)<0)$ allora

$b(t)$ diventa minore di $u_M$ e quindi

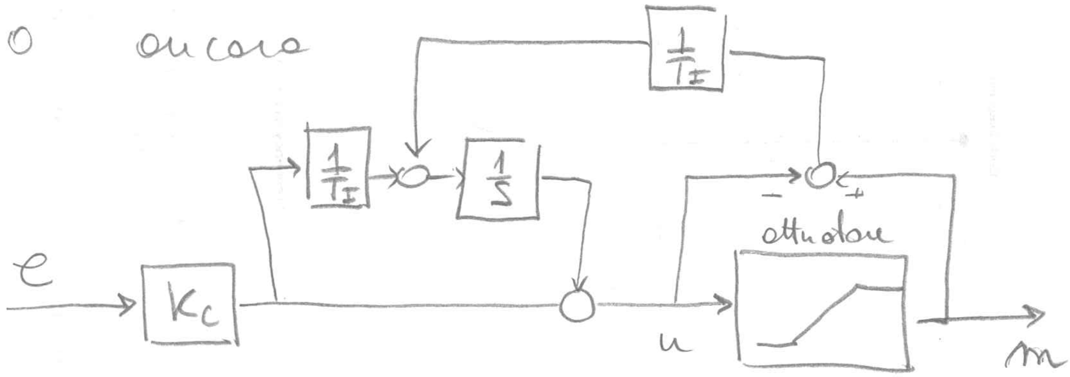
$m(t) = u(t) = b(t)$ e quindi l'attuatore

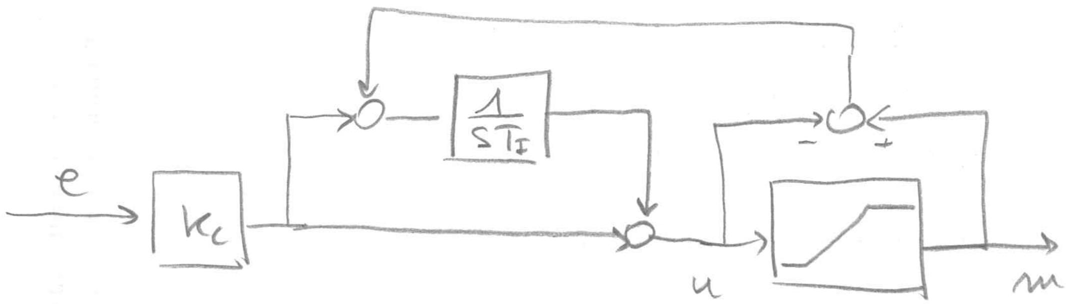
si adegua immediatamente

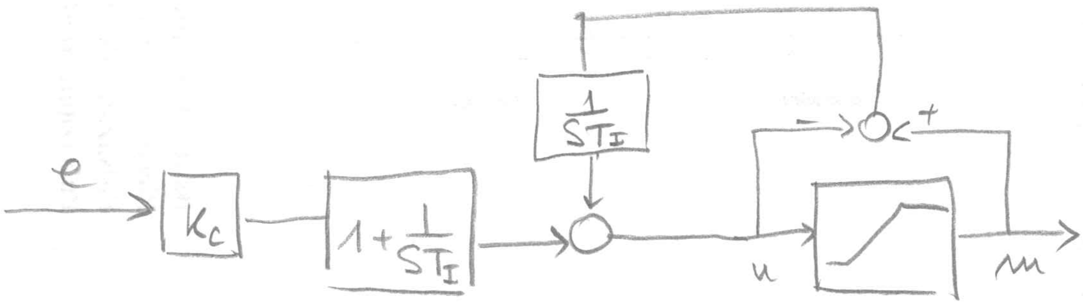
Noto che, se l'uscita dell'attuatore è misurabile lo schema precedente può essere meglio realizzato nel modo seguente




o ancora



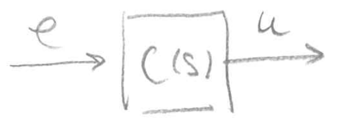



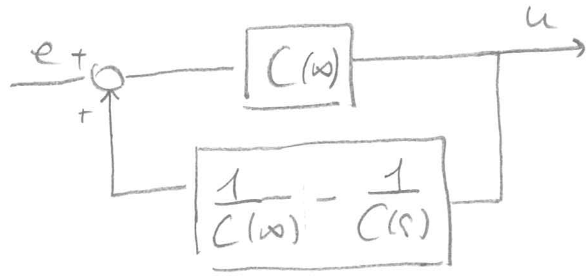

$$u = K_c\left(1+\frac{1}{sT_I}\right)e + \frac{1}{sT_I}(m-u)$$

equivalente a

$$\left(1+\frac{1}{sT_I}\right)u = K_c\left(1+\frac{1}{sT_I}\right)e + \frac{m}{sT_I} \Rightarrow u = K_c e + \frac{1}{1+sT_I}m$$

Più in generale, se dobbiamo applicare un controllore $C(s)$, noto che $C(s)$ può essere realizzato anche attraverso lo schema seguente




$$\frac{u(s)}{e(s)} = \frac{C(\infty)}{1 - C(\infty)\left[\frac{1}{C(\infty)} - \frac{1}{C(s)}\right]}$$

$$= \frac{C(\infty)}{\frac{1}{C(s)}C(\infty)} = C(s)$$

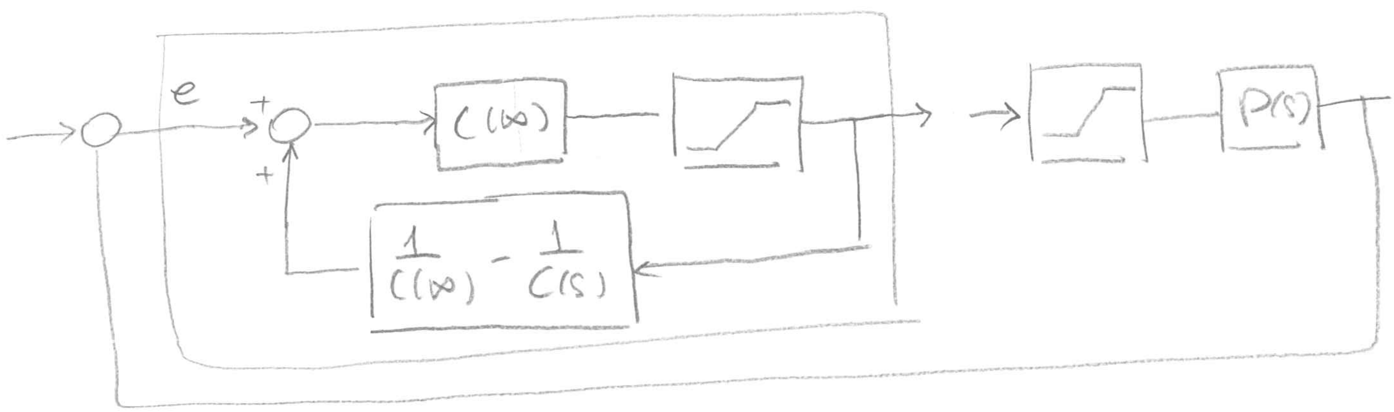
grado numeratore = grado denominatore

↑

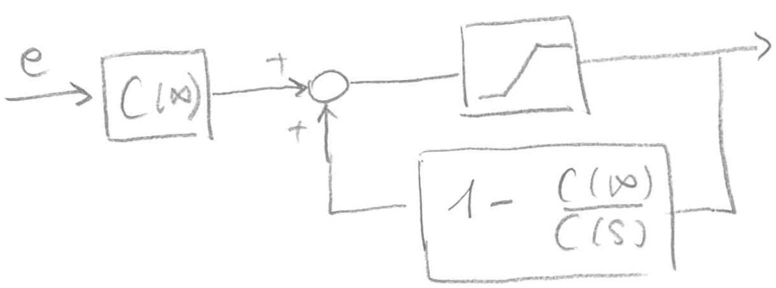
proprio e non strett. proprio

IPOTESI: $C(s)$ stabile e a fase minima

Lo schema di desaturazione è




o equivalentemente




Esempio $C(s) = k_p \frac{1+T_I s}{s}$ PI

$$1 - \frac{C(\infty)}{C(s)} = 1 - \frac{\cancel{k_p} T_I}{\cancel{k_p}\frac{1+T_I s}{s}} = 1 - \frac{T_I s}{1+T_I s} = \frac{1+\cancel{T_I s}-\cancel{T_I s}}{1+T_I s} = \frac{1}{1+T_I s}$$