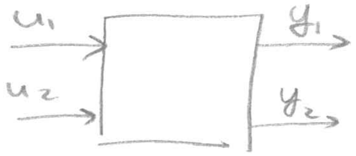
CONTROLLO MULTI-INPUT MULTI-OUTPUT

Supponiamo di avere un sistema 2 ingressi 2 uscite lineare. Allora



$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$

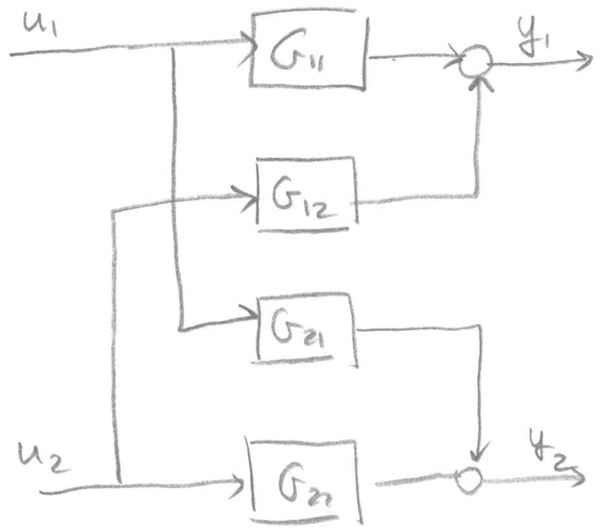
$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

In forma matriciale

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad \text{dove} \quad Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \quad U(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Che corrisponde allo schema a blocchi



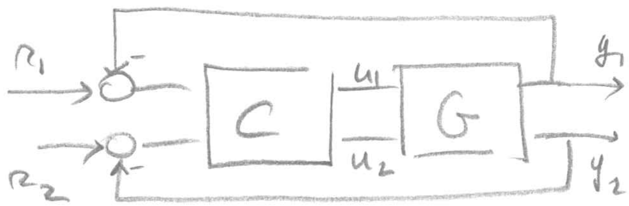
In forma di stato invece tale sistema si può rappresentare con

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1u_1 + B_2u_2 \\ y_1 = C_1x_1 + D_{11}u_1 + D_{12}u_2 \\ y_2 = C_1x_2 + D_{21}u_1 + D_{22}u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad B = \left[B_1 \mid B_2 \right] \qquad C = \left[\frac{C_1}{C_2} \right]$$

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

Uno schema generale di controllo in retroazione è il seguente



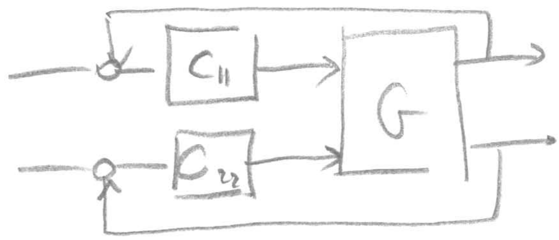
in cui

$$C(s)=\begin{bmatrix} C_{11}(s) & C_{12}(s) \\ C_{21}(s) & C_{22}(s) \end{bmatrix}$$

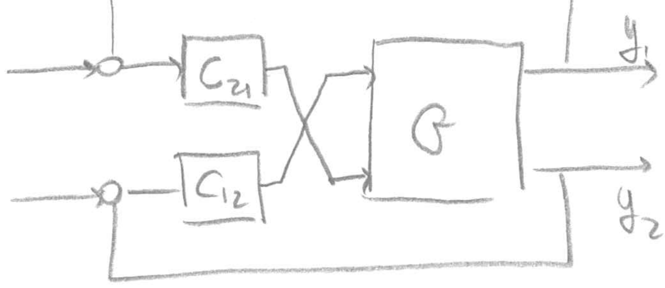
Quindi progettare il controllore significa determinare le quattro funzioni di trasferimento $C_{ij}(s)$

Uno schema più semplice è quando $C(s)$ ha solo due elementi $\neq 0$

Ad esempio $C(s)=\begin{bmatrix} C_{11}(s) & 0 \\ 0 & C_{22}(s) \end{bmatrix}$



o altrimenti $C(s)=\begin{bmatrix} 0 & C_{12}(s) \\ C_{21}(s) & 0 \end{bmatrix}$



Osservo che $C(s)=\begin{bmatrix} C_{11}(s) & C_{12}(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ porta a un controllore 1 ingresso e 2 uscite (1 ingresso non è usato)

Se si usano schemi semplificati con $\mathcal{K}(s)$ aventi solo due funzioni di trasferimento diverse da zero, allora sorge spontanea la domanda: Quali dei due schemi proposti è più conveniente. Dipenderà dalla $G(s)$.
Un metodo euristico di selezione è basato sul cosidetto RGA (Relative gain array)

RELATIVE GAIN ARRAY (RGA)

Il relative gain array è un metodo che consente di trovare l'accoppiamento più conveniente tra 2 ingressi e 2 uscite. Può essere esteso al caso con più ingressi e più uscite.
Il principio su cui si basa può essere così descritto:
Si consideri un sistema a 2 ingressi e 2 uscite descritto da una matrice di trasferimento 2x2

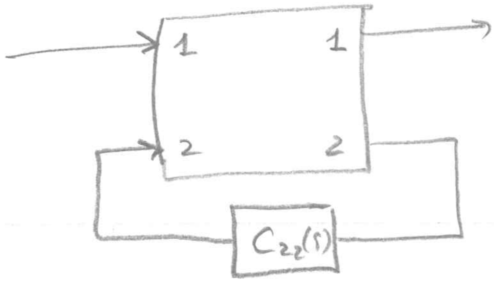
$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Fissiamo una frequenza ω (di solito si prende $\omega=0$) e consideriamo la matrice a valori complessi

$$K = G(j\omega) = \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & G_{22}(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

L'idea intuitiva su cui si basa RGA è che sia meglio accoppiare un ingresso con una uscita se la funzione di trasferimento tra tale ingresso e tale uscita è poco influenzata da un eventuale controllo in feedback attivo sull'altra coppia ingresso uscita.

Più precisamente si consideri l'ingresso i e uscita j (4
a esempio $i=1$ e $j=1$



Supponiamo che sia attivo tra l'uscita 2 e ingresso 2 un controllo $u_2(s) = C_{22}(s)\, y_2(s)$

Calcoliamo la risultante funzione di trasferimento da u_1 e y_1 che è

$$\begin{cases} y_1 = G_{11} u_1 + G_{12} u_2 \\ u_2 = C_{22} y_2 = C_{22}[G_{21} u_1 + G_{22} u_2] \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - C_{22} G_{22}) u_2 = C_{22} G_{21} u_1 \Rightarrow u_2 = \frac{C_{22} G_{21}}{1 - C_{22} G_{22}} u_1$$

$$\Downarrow$$

$$y_1(s) = \left[G_{11}(s) + \frac{G_{21}(s) G_{12}(s) C_{22}(s)}{1 - G_{22}(s) C_{22}(s)} \right] u_1(s)$$

$$= \hat{G}_{11}(s)\, u_1(s)$$

dove $\hat{G}_{11}(s) = G_{11}(s) + \dfrac{G_{21}(s) G_{12}(s) C_{22}(s)}{1 - G_{22}(s) C_{22}(s)}$

(di solito $\omega = 0$)

Fissata una frequenza ω si ottiene che

$$\hat{G}_{11}(j\omega) = G_{11}(j\omega) + \frac{G_{21}(j\omega)\,G_{12}(j\omega)\,C_{22}(j\omega)}{1 - G_{22}(j\omega)\,C_{22}(j\omega)}$$

Calcoliamo ora

$$\frac{G_{11}(j\omega)}{\hat{G}_{11}(j\omega)} = \frac{G_{11}(j\omega)}{\dfrac{G_{11}(j\omega) - G_{11}(j\omega)G_{22}(j\omega)C_{22}(j\omega) + G_{21}(j\omega)G_{12}(j\omega)C_{22}(j\omega)}{1 - G_{22}(j\omega)C_{22}(j\omega)}}$$

$$= \frac{G_{11}(j\omega) - G_{11}(j\omega)G_{22}(j\omega)C_{22}(j\omega)}{G_{11}(j\omega) - G_{11}(j\omega)\,G_{22}(j\omega)\,C_{22}(j\omega) + G_{21}(j\omega)G_{12}(j\omega)C_{22}(j\omega)}$$

Noto che se $\dfrac{G_{11}(j\omega)}{\hat{G}_{11}(j\omega)}$ resta circa uguale a 1 per tutti i valori del controllore $C_{22}(j\omega)$, allora significa che $G_{11}(j\omega) \approx \hat{G}_{11}(j\omega)$ per ogni valore di $C_{22}(j\omega)$ e quindi possiamo concludere che $\hat{G}_{11}(j\omega)$ è poco influenzato dalle caratteristiche del feedback presente sull'altra coppia ingresso-uscita e quindi il progetto del controllore $C_{11}(s)$ tra y_1 e u_1 sarà più semplice perché basato essenzialmente su una singola funzione di trasferimento $\hat{G}_{11} \simeq G_{11}$.

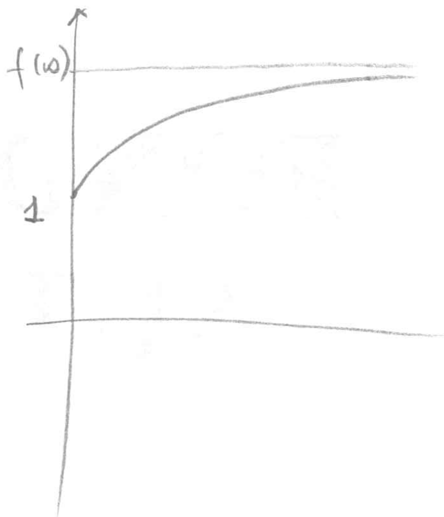
Sia $G_{ij}(j\omega) \triangleq k_{ij}$ e $C_{22}(j\omega) \triangleq X$

$$\frac{G_{11}(j\omega)}{\hat{G}_{11}(j\omega)} = \frac{k_{11} - k_{11}k_{22}X}{k_{11} - k_{11}k_{22}X + k_{21}k_{12}X} = f(x)$$

$$= \frac{k_{11} - k_{11}k_{22}X}{k_{11} - \det(k)\,X}$$

Assumiamo che X, k_{ij} sono reali e che $X \geq 0$ e che $\frac{\det(k)}{k_{11}} < 0$

Allora $f(x)$ è un'iperbole del tipo mostrato in figura

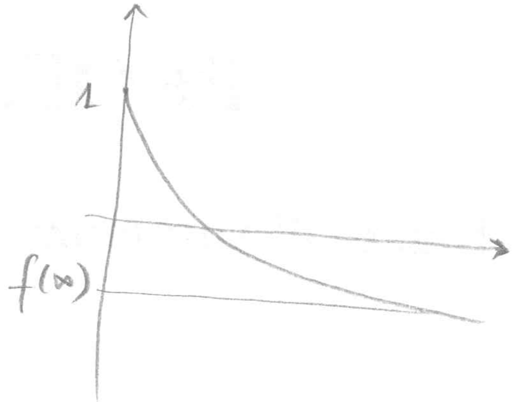


Quindi

$$\frac{G_{11}}{\hat{G}_{11}} \in [1, f(\infty)]$$

o

$$\frac{G_{11}}{\hat{G}_{11}} \in [f(\infty), 1]$$



Se $f(\infty) \simeq 1$ allora si può dire che $\hat{G}_{11}$ dipende poco dal controllore $C_{22}(s)$

Definiamo

$$\lambda_{11} \triangleq f(\infty) = \frac{k_{11}k_{22}}{\det(k)} = \frac{1}{1 - \frac{k_{21}k_{12}}{k_{11}k_{22}}}$$

Se prendiamo

$$\frac{G_{22}(j\omega)}{\hat{G}_{22}(j\omega)} = \frac{k_{22} - k_{11}k_{22}x}{k_{22} - \det(K)x} = f(x) \qquad x = C_{11}(j\omega)$$

$$\lambda_{22} \triangleq f(\infty) = \frac{k_{11}k_{22}}{\det(K)} = \lambda_{11}$$

Quindi se $\lambda_{11} \simeq 1$ conviene accoppiare $1 \to 1$, $2 \to 2$

Se prendiamo l'accoppiamento ingresso 2 uscita 1, si può dimostrare che

$$\frac{G_{12}(j\omega)}{\hat{G}_{12}(j\omega)} = \frac{k_{12} - k_{12}k_{21}x}{k_{12} + \det(K)x} = f(x) \qquad x = C_{21}(j\omega)$$

$$\lambda_{12} = f(\infty) = -\frac{k_{12}k_{21}}{\det(K)} = 1 - \lambda_{11}$$

Infine

$$\frac{G_{21}(j\omega)}{\hat{G}_{21}(j\omega)} = \frac{k_{21} - k_{12}k_{21}x}{k_{21} + \det(K)x} = f(x) \qquad x = C_{12}(j\omega)$$

$$\lambda_{21} = f(\infty) = \lambda_{12} = 1 - \lambda_{11}$$

Ottieniamo così la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1-\lambda_{11} \\ 1-\lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix}$$

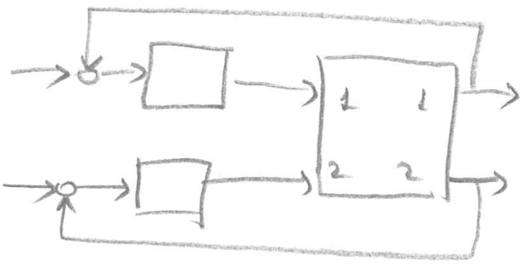
Interpretazione di λ_{11}

λ_{11} è il rapporto tra il guadagno tra ingresso 1 e l'uscita 1 quando u_2 è settato a zero e quando è invece y_2 settato a zero.

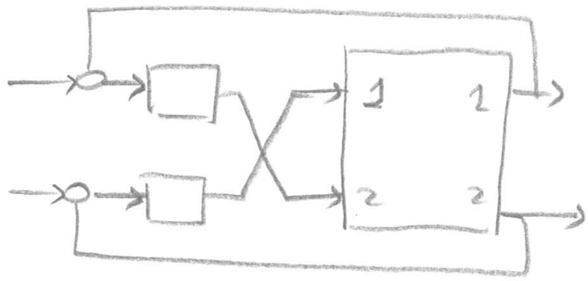
Discussione

In generale conviene accoppiare ingresso j con l'uscita i se $\lambda_{ij} \simeq 1$

Se $\lambda_{11} \simeq 1$



Se $\lambda_{12} \simeq 1$ $(\lambda_{11} \simeq 0)$



Più in generale

- Se $\lambda_{11} < 0$ si rischia di rendere il sistema instabile accoppiando l'ingresso 1 con l'uscita 1
- Se $\lambda_{11} = 0$ allora $\lambda_{21} = 1$ e quindi conviene usare l'altro accoppiamento
- Se $0 < \lambda_{11} < 1/2$ conviene usare l'altro accoppiamento
- Se $\frac{1}{2} < \lambda_{11} < 1$ conviene accoppiare l'ingresso 1 con l'uscita 1

- Se $\lambda_{11} = 1$ otteniamo accoppiamento perfetto
- Se $\lambda_{11} > 1$ ma non troppo grande conviene ancora accoppiare l'ingresso 1 e l'uscita 1
- Se $\lambda_{11} \gg 1$ non è possibile usare uno schema di controllo disaccoppiato.

Esempi

1) $G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ 0 & G_{22}(s) \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad k_{12} = k_{21} = 0$

$$\lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{k_{21} k_{12}}{k_{11} k_{22}}} = 1$$

---

2) $G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & 0 \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$

$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ $\qquad \lambda_{11} = 1$

---

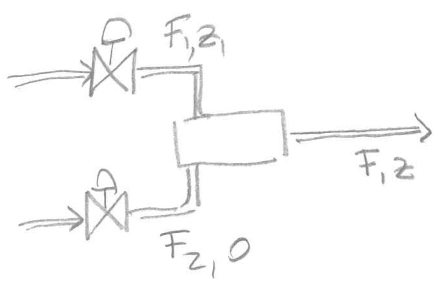
3) $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 1-\lambda_{11} \\ 1-\lambda_{11} & \lambda_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,05 & 0,95 \end{bmatrix}$

Allora conviene controllare y_1 con u_1 e y_2 con u_2

$\Lambda = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,95 \\ 0,95 & 0,05 \end{bmatrix}$

Allora conviene controllare y_1 con u_2 e y_2 con u_1

Esempio: Miscelatore



3 ingressi F_1, z_1, F_2

2 uscite F, z

F_1 flusso tubo 1

F_2 flusso tubo 2

F flusso di uscita
z concentrazione di A in uscita

z_1 concentrazione volumetrica di componente A nel tubo 1

$z_2 = 0$ " " " " " " " 2

$$dV = dV_1 + dV_2$$

divido per dt

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_1}{dt} + \frac{dV_2}{dt} \iff \boxed{F = F_1 + F_2}$$

$$z\,dV = z_1\,dV_1 + \cancel{\overset{0}{z_2}}\,dV_2 = z_1\,dV$$

$$zF = z_1 F_1 \implies \boxed{z = \frac{z_1 F_1}{F_1 + F_2}} = f(F_1, F_2, z_1)$$

$$\begin{bmatrix} F \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} z_1$$

z_1 disturbo

$$k_{21} = \frac{\partial f}{\partial F_1} = \frac{\cancel{z_1F_1} + z_1F_2 - \cancel{z_1F_1}}{[F_1+F_2]^2} = \frac{z_1 F_2}{(F_1+F_2)^2}$$

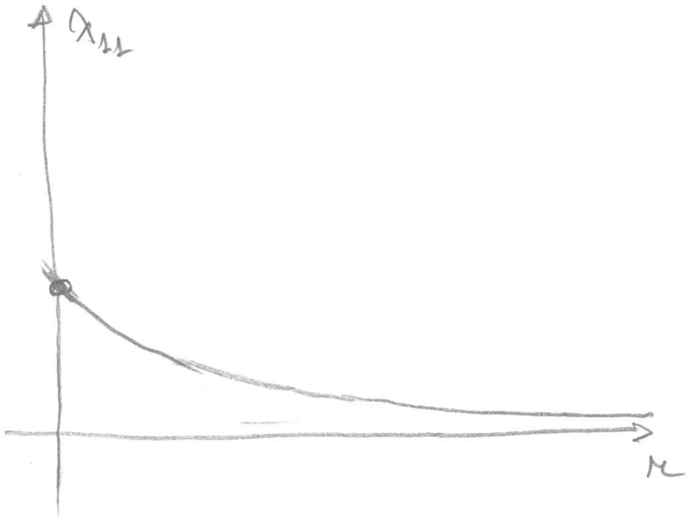
$$k_{22} = \frac{\partial f}{\partial F_2} = \frac{-z_1 F_1}{(F_1+F_2)^2}$$

$$h_2 = \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{F_1}{F_1+F_2}$$

Calcoliamo RGA della matrice $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$

$$\lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}} = \frac{1}{1 - \frac{K_{21}}{K_{22}}} = \frac{1}{1 + \frac{F_2}{F_1}}$$

λ_{11} dipende solo da $F_2/F_1 = r \Rightarrow \lambda_{11} = \frac{1}{1+r}$



Si vede che se r è piccolo $(F_1 >> F_2) \Rightarrow \lambda_{11} \simeq 1$

allora conviene controllare F con F_1 e z con F_2

Se invece r è grande $(F_2 >> F_1)$ allora

conviene controllare F con F_2 e z con F_1.

Se $F_1 \simeq F_2$ quindi $r \simeq 1$ allora il controllo

con struttura diagonale non conviene.

la relative gain array può essere usata anche per sistemi n ingressi n uscite

In questo caso generale

$$\lambda_{ij} \triangleq \frac{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{u_h=0\ \forall h\neq j}}{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{y_h=0\ \forall h\neq i}}$$

Calcoliamo prima $\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{u_h=0\ \forall h\neq j}$

Supponiamo che

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & & \\ k_{n1} & & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad y = Ku$$

Supponiamo K invertibile

Se $u_h = 0\ \forall h \neq j$ allora

$$y_i = \sum_h K_{ih} u_h = K_{ij} u_j \Rightarrow \Delta y_i = K_{ij} \Delta u_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{u_h=0\ \forall h\neq j} = K_{ij}$$

Calcoliamo ora invece $\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{y_h=0\ \forall h\neq i}$

Noto che, siccome

$u = K^{-1} y$ allora $\qquad u_\ell = \sum_h (K^{-1})_{\ell h}\, y_h$

e quindi, siccome $y_h = 0 \ \forall h \neq i$, si ha

$$u_j = (K^{-1})_{ji} \, y_i$$

da cui segue che

$$\Delta u_j = (K^{-1})_{ji} \, \Delta y_i$$

e quindi $$\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta u_j}\right)_{y_h = 0 \ \forall h \neq i} = \frac{1}{(K^{-1})_{ji}}$$

Possiamo concludere che

$$\lambda_{ij} = \frac{K_{ij}}{1/(K^{-1})_{ji}} = K_{ij} (K)^{-1}_{ji}$$

Noto che

$$\sum_j \lambda_{ij} = \sum_j K_{ij} (K)^{-1}_{ji} = [K K^{-1}]_{ii} = [I]_{ii} = 1$$

Esempio

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

non vogliamo accoppiare indici con valori di RGA negativi o nulli

Quindi nella riga 3 c'è solo 4 che non è negativo o nullo e quindi il primo accoppiamento è 1, 2

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

Poi vediamo che la matrice rimanente è $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

conviene accoppiare 1 con 1 perché l'RGA vale 1

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

resta l'accoppiamento 2 con 3

Esempio

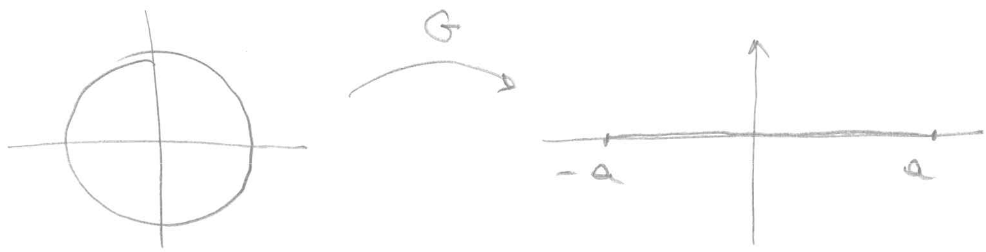
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 3 & -2.82 & -0,03 & 0,85 \\ -0,08 & 0,05 & 1,55 & -0,52 \\ -5,03 & 4.67 & -0.03 & 1.39 \\ 3.10 & -0.9 & -0.47 & -0.73 \end{bmatrix}$$

SINGULAR VALUE DECOMPOSITION

È uno strumento per determinare quanto "amplifica" una matrice.

Esempio: Gli autovalori non sono un buon indicatore

$G = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ha autovalori zero ma la sua amplificazione non è zero



Teorema

Data una qualsiasi matrice (a valori reali o complessi)

Esistono

- U, V matrici quadrate unitarie $UU^H = I$ *
$VV^H = I$
- $\Sigma = \left[\begin{array}{c} \sigma_1 \ \ddots \ \sigma_m \\ \hline 0 \end{array}\right]$ se $m \leq p$ con stesse dimensioni di G
e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_e \geq 0$

tali che $\boxed{\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ \ddots \ \sigma_p & 0 \end{array}\right] \text{ se } m \geq p}$

$$G = U \Sigma V^H$$

$\sigma_1 \dots \sigma_e$ sono univocamente determinati e sono detti valori singolari di G

---

* M^H significa trasposto coniugato

Nota che se $U = [u_1 | \cdots | u_p]$ $\qquad$ G è $p \times m$

$V = [v_1 | \cdots | v_m]$

$u_1 \cdots u_p$ base ortonormale di $\mathcal{U}$

$v_1 \cdots v_m$ base ortonormale di $\mathcal{V}$

allora si ha che

$$\mathcal{V} \xrightarrow{G} \mathcal{U}$$

$$G V = U \Sigma$$

$$G v_i = \sigma_i u_i$$

Significa che gli elementi della base di $\mathcal{V}$ vengono mappati negli elementi della base di $\mathcal{U}$ amplificati della costante σ_i

<u>Esempio</u> $G = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

quindi G ha valori singolari a e zero.

<u>Proprietà</u>

1) $G^H G = V \Sigma U^H U \Sigma V^H = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} V^H$

quindi $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(G^H G)}$

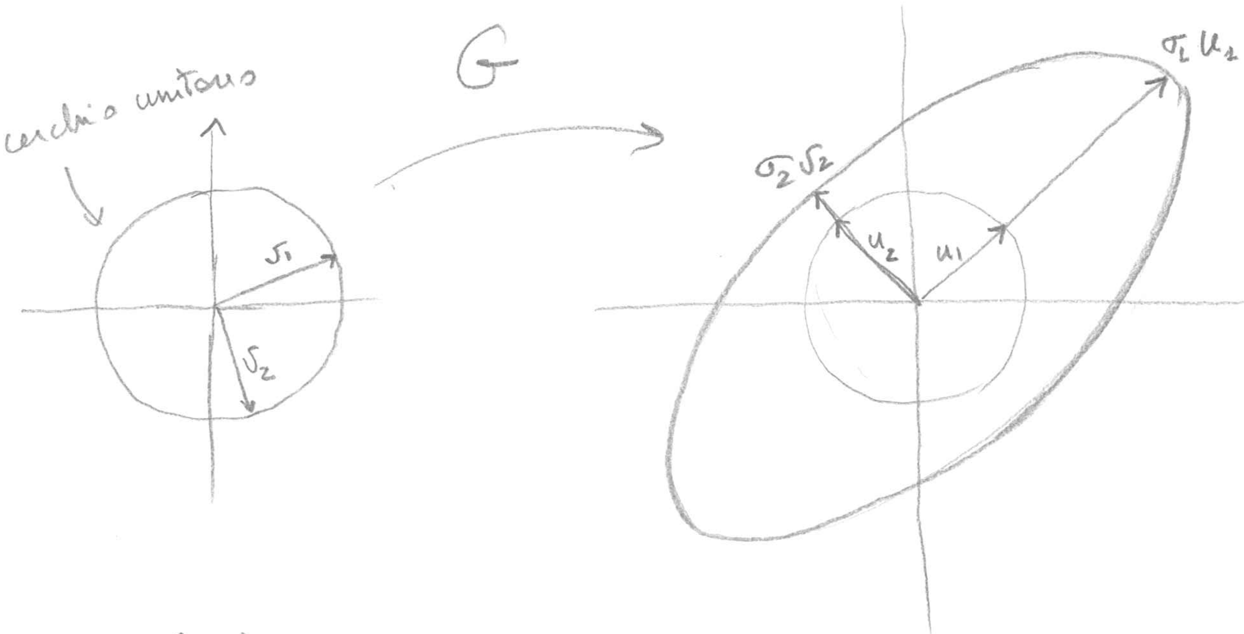
2) Se G è 2×2 allora

$$\begin{cases} \operatorname{tr} G^H G = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \det G^H G = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \end{cases}$$

dalla conoscenza di $\operatorname{tr} G^H G$ e $\det G^H G$ si può risolvere il sistema con incognite σ_1^2 e σ_2^2

3) Se $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, allora

$$G v_1 = \sigma_1 u_1$$
$$G v_2 = \sigma_2 u_2$$



4) Siano $\underline{\sigma}(G)$ e $\bar{\sigma}(G)$ rispettivamente il minimo e il massimo valore singolare di G. Allora per ogni vettore x si ha che

$$\underline{\sigma}(G) \leq \frac{\|Gx\|_2}{\|x\|_2} \leq \bar{\sigma}(G)$$

dove $\|x\|_2$ è la norma 2 del vettore x.

5) Se M matrice quadrata invertibile $n \times n$

$$\sigma_i (M^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{n-i}(M)}$$

quindi $$\bar{\sigma}_i (M^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}_i (M)}$$

$$\underline{\sigma}_i (M^{-1}) = \frac{1}{\bar{\sigma}_i (M)}$$

6) $\sigma_i(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \sigma_i (A+B) \leq \sigma_i (A) + \bar{\sigma}(B)$

le che implica che

$$\bar{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

$$\underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(B) \leq \underline{\sigma}(A+B) \leq \underline{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$$

Nel caso una delle due sia I

$$|1 - \bar{\sigma}(M)| \leq \bar{\sigma}(I+M) \leq I + \bar{\sigma}(M)$$

$$\max\{1-\bar{\sigma}(M), \underline{\sigma}(M)-1\} \leq \underline{\sigma}(I+M) \leq 1 + \underline{\sigma}(M)$$

7) Approssimazione di matrice

$$G = U \Sigma V = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^H$$ dove σ_r è il più piccolo valore singolare > 0

noto che $u_i v_i^H$ sono matrici di rango 1 e che somme di k matrici di rango 1 ha rango $\leq k$

Se consideriamo

$$G_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^H$$ questa è la migliore approssimazione di G con una matrice di rango $\leq k$.

MATRICI DI TRASFERIMENTO E SVD

Consideriamo una matrice di trasferimento $W(s)$ di dimensioni $p \times m$.

Se applichiamo un ingresso

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_{10} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \\ u_{m0} \cos(\omega t + \varphi_m) \end{bmatrix} = Re\{\bar{u} e^{j\omega t}\} \qquad \bar{u} = \begin{bmatrix} u_{10} e^{j\varphi_1} \\ \vdots \\ u_{m0} e^{j\varphi_m} \end{bmatrix}$$

allora l'uscita forzata corrispondente è

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_{10} \cos(\omega t + \psi_1) \\ \\ y_{p0} \cos(\omega t + \psi_p) \end{bmatrix} = Re\{\bar{y} e^{j\omega t}\} \qquad \bar{y} = \begin{bmatrix} y_{10} e^{j\psi_1} \\ \\ y_{p0} e^{j\psi_p} \end{bmatrix}$$

dove

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_{10} e^{j\psi_1} \\ \vdots \\ y_{p0} e^{j\psi_p} \end{bmatrix} = W(j\omega) \begin{bmatrix} u_{10} e^{j\varphi_1} \\ \vdots \\ u_{1m} e^{j\varphi_m} \end{bmatrix} = W(j\omega)\, \bar{u}$$

Se per l'entità dei segnali sinusoidali $u(t)$ e $y(t)$ prendiamo $\|\bar{u}\|_2$ e $\|\bar{y}\|_2$ *, allora si ha che

$$\|\bar{y}\|_2 = \|W(j\omega)\, \bar{u}\|_2$$

---

* Noto che $\|u(t)\|_2 \neq \|\bar{u}\|_2$ ma vale solo $\|u(t)\|_2 \leq \|\bar{u}\|_2$

Allora si ha che

$$\boxed{\underline{\sigma}(W(j\omega)) \le \frac{\|\bar{y}\|_2}{\|\bar{u}\|_2} \le \bar{\sigma}(W(j\omega))} \qquad (*)$$

Noto che se $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo

$$\frac{2}{T}\int_0^T \|y(t)\|^2 dt = \frac{2}{T}\int_0^T \sum_i y_{i0}^2 [\cos(\omega t + \varphi_i)]^2 dt$$

$$= \frac{2}{T}\sum_i y_{i0}^2 \int_0^T [\cos(\omega t + \varphi_i)]^2 dt$$

$$= \frac{2}{T}\sum_i y_{i0}^2 \int_0^T [\cos \omega t]^2 dt = \sum y_{i0}^2 = \|\bar{y}\|^2$$

dove si è usato il fatto che

$$\int_0^T (\cos \omega t)^2 dt = \frac{T}{2}$$

---

dalla formula (*) si nota che

$\underline{\sigma}(W(j\omega))$ e $\bar{\sigma}(W(j\omega))$ danno le amplificazioni minime e massime di segnali sinusoidali alla frequenza ω.

Esempio: Matrice Sensitività

Calcoliamo la matrice di trasferimento tra d e y

$W_{dy}(s)$:

$$Y(s) = D - GCY \Longrightarrow (I + GC)Y = D(s)$$

$$Y(s) = (I + GC)^{-1} D(s)$$

Quindi $$W_{dy}(s) = \left(I + G(s)\,C(s)\right)^{-1} \triangleq S_0(s)$$

Questa matrice di trasferimento è detta matrice di sensitività. L'obiettivo è quello determinare $C(s)$ in modo da rendere piccola $S(s)$ alle frequenze di interesse.

Rendere piccolo $S_0(s)$ in $j\omega$ significa cercare di rendere piccola $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ che è il caso peggiore e $\underline{\sigma}(S(j\omega))$ che è il caso migliore

Si noti che $\bar{\sigma}(S) = [\underline{\sigma}(I+L)]^{-1}$

$\underline{\sigma}(S) = [\bar{\sigma}(I+L)]^{-1}$ dove $L = GC$

Quindi poiché
$$1 + \underline{\sigma}(L) \geq \underline{\sigma}(I+L) \geq \max\{1 - \bar{\sigma}(L), \underline{\sigma}(L) - 1\}$$

si ha che

1) Se $\underline{\sigma}(L) >> 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(I+L) >> 1 \Rightarrow \bar{\sigma}(S) << 1$

2) Se $\bar{\sigma}(L) << 1 \Rightarrow 1 - \bar{\sigma}(L) \leq \underline{\sigma}(I+L) \leq 1 + \underline{\sigma}(L)$

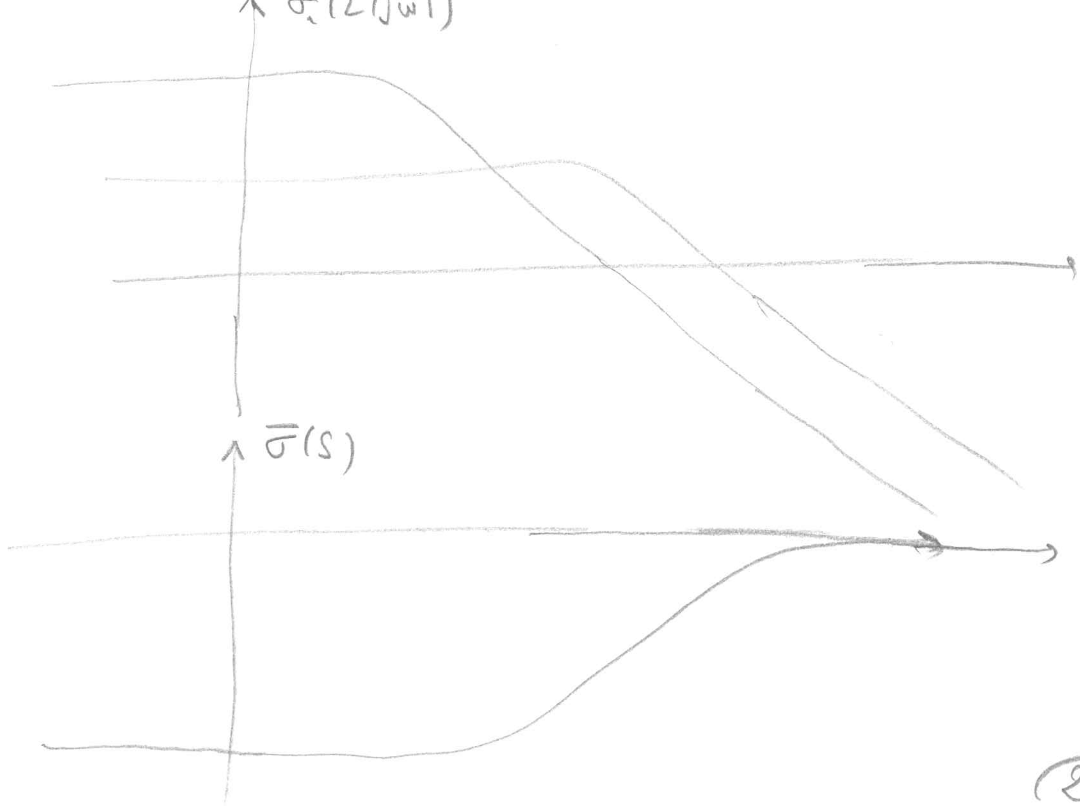
e inoltre anche $\underline{\sigma}(L) << 1$

Quindi $\bar{\sigma}(S) \simeq 1$

Tipicamente si ha che

$\sigma_i(L(j\omega)) >> 1$ in bassa frequenza e

$\sigma_i(L(j\omega)) << 1$ in alta frequenza



CONDITION NUMBER

Dato una matrice G a valori reali o complessi, il "condition number" è

$$\gamma(G) \triangleq \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)}$$ Noto che $\gamma(G) \geq 1$

Normalmente una matrice con grande condition number è "mal condizionata"

Se G è quadrata invertibile, allora

$$\gamma(G) = \bar{\sigma}(G)\,\bar{\sigma}(G^{-1})$$

quindi $\gamma(G)$ grande $\Rightarrow$ G e G^{-1} hanno elementi grandi.

$\gamma(G)$ dipende pesantemente dallo scalatura di ingressi e uscite. Si definisce perciò il minimized condition number come

$$\gamma^*(G) = \min_{D_1, D_2 \text{ diagonali}} \gamma(D_1 G D_2)$$

Esempio

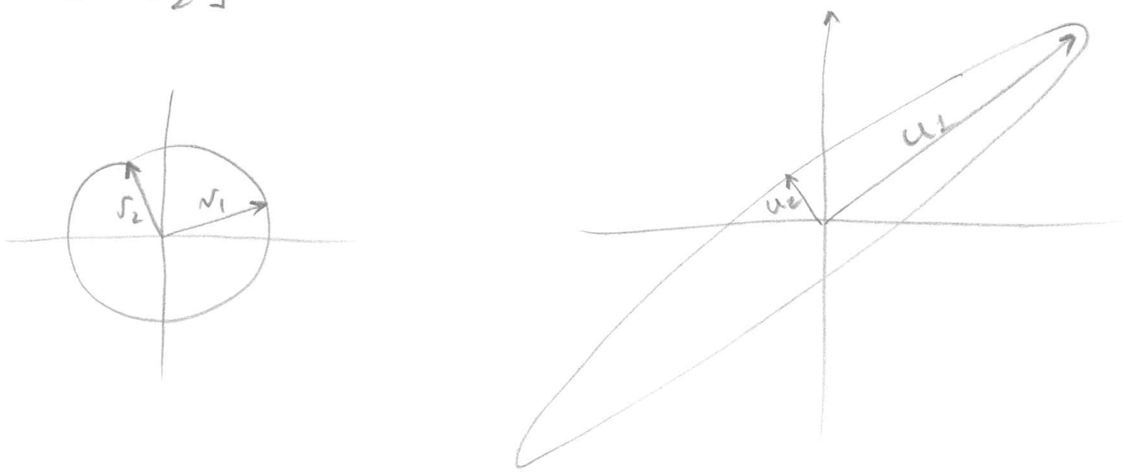
$G = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \gamma(G) = 100 \quad \gamma^*(G) = 1$

$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma_1(G) = 2.41 \quad \sigma_2(G) = 0.41 \quad \gamma(G) = 5.83 \quad \gamma^*(G) = 1 \quad \Lambda(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Per avere un'idea intuitiva del significato del condition number, consideriamo G 2×2

Allora

$$G = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} V$$



Se $\gamma(G)$ è grande significa che l'ellisse in cui si trasforma il cerchio è molto allungato e quindi che è facile attraverso impulsi lungo v_1 e raggiungere punti lungo u_1 ma che invece la direzione u_2 richiede energie di impulso lungo v_2 molto maggiori.

In altre parole è come se G avesse immagine

$$\operatorname{Im} G = \{ Gx \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$$

quasi unidimensionale lungo u_1.