POLI e ZERI DI UNA MATRICE DI TRASFERIMENTO

Data una matrice di trasferimento

$G(s)$

1) $p \in \mathbb{C}$ è polo di $G(s)$ se

$\lim_{s \to p} G(s)$ è una matrice con almeno un elemento $= \infty$

<u>Teorema</u>

Se $G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$ e (A,B) ragg. (C,A) oss.

Allora

p polo di $G(s) \iff p$ è autovalore di A

---

2) La definizione generale di zero è complessa perché un numero complesso potrebbe essere contemporaneamente polo e zero. Ci restringiamo agli zeri che non coincidono con i poli. Siano $\{p_1 \dots p_e\}$ poli di $G(s)$

Noto che se valutiamo

rango $G(s)$ al variare di $s \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_e\}$

questo assumerà un valore intero r (detto rango normale) per quasi tutti i punti $s \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_e\}$ a parte alcuni punti isolati $\{z_1 \dots z_f\}$ che sono detti zeri di $G(s)$.

Noto che, se $G(s)$ è quadrato e invertibile (nel senso che G è per quasi tutti $s \in \mathbb{C}$) allora

$$\text{zeri}\left(G(s)\right) = \text{poli}\left(G^{-1}(s)\right)$$

<u>Dim</u>

Sia $p_1 \cdots p_n$ poli di $G(s)$ e sia $z \neq p_i$ zero di $G(s)$. Allora rango $G(z) < n$ e quindi esiste $v \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$G(z)\, v = 0 \qquad v \neq 0$$

Quindi se

$$\begin{bmatrix} g_1(s) \\ \vdots \\ g_n(s) \end{bmatrix} \triangleq G(s)\, v$$

allora $g_i(s) = f_i(s)\,(s-z)$

dove $f_i(s)$ sono razionali senza poli in z.

Allora

$$v = G^{-1}(s)\, G(s)\, v = G^{-1}(s) \begin{bmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{bmatrix} (s-z)$$

Perché $v \neq 0$ allora $\exists\, h$ t.c. $v_h \neq 0$

$$v_h = \sum_i \left[G^{-1}(s)\right]_{hi} f_i(s)\,(s-z)$$

$$\frac{v_h}{s-z} = \sum_i \left[G^{-1}(s)\right]_{hi} f_i(s)$$

Perché $f_i(s)$ non hanno poli in z, deve esserci una delle $\left[G^{-1}(s)\right]_{hi}$ con polo in z.

Quindi zeri $(G(s)) \subseteq$ poli $(G^{-1}(s))$

Dimostriamo ora viceversa che zeri $(G) \supseteq$ poli (G^{-1})

Supponiamo che z sia polo di G^{-1} e quindi

$$\left[G^{-1}(s)\right]_{ij} = \frac{M_{ij}(s)}{(s-z)^{\mu(ij)}}$$

dove $\mu(ij)$ molteplicità del polo e $M_{ij}(s)$ è una funzione razionale tale che $M_{ij}(z) \neq 0, \infty$

Sia $\mu = \max_{ij} \mu(ij)$. Allora esisteranno h, k tali che $\mu(h,k) = \mu$. Sia $N(s) \triangleq (s-z)^{\mu} G^{-1}(s)$

Noto che $\left[N(z)\right]_{hk} = \left[M(z)\right]_{hk} \neq 0$

Allora

$$G(z) \underbrace{N(z)\, e_k}_{v} = G(z)\, v \quad \text{con} \quad v \neq 0$$

$$e_k = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & k \end{array}$$

Inoltre

$$G(s) N(s) e_k = G(s) G^{-1}(s) (s-z)^{\mu} e_k =$$
$$= (s-z)^{\mu} e_k$$

da cui segue che

$$G(z)\, v = 0$$

Esempio

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+2} & \frac{4}{s+2} \\ \frac{9/2}{s+2} & 2\,\frac{s-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

I poli sono $p = -2$

Poiché $\det G(s) = \dfrac{2(s-1)^2 - 18}{(s+2)^2} = 2\,\dfrac{s-4}{s+2}$

allora si vede che per $s \neq 4$ $G(s)$ ha rango 2 (che è il rango normale di $G(s)$). Per $s = 4$ si ha che $\det G(4) = 0$ e quindi rango $G(4) < 2$ da cui segue che $z = 4$ è uno zero di $G(s)$.

Esempio

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{s-1} \end{bmatrix}$$

Il rango normale di $G(s)$ è 2

Per $s = 1, -2$ il rango cala e diventa $= 1$.
Si noti che $s = 1$ è anche polo.

Esempio

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)} & \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)} \\ \frac{1+2s}{(1+s)(1+0.2s)} & \frac{2}{(1+s)(1+0.2s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+2s & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det G(s) = \frac{1-2s}{(1+s)^2(1+0.2s)^2}$$

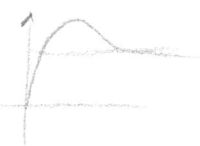
poli : $s=\frac{1}{2}$ $\quad s=-5$

$$G\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}\,\frac{11}{10}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad G\left(\tfrac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Se $U(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

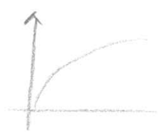
$$Y_1(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)}\,\frac{1}{s}$$

$$Y_2(s) = \frac{1+2s}{(1+s)(1+0.2s)}\,\frac{1}{s}$$

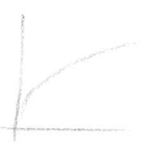


Se $U(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Y_1(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.2s)}\,\frac{1}{s}$$



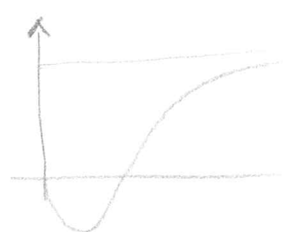
$$Y_2(s) = \frac{2}{(1+s)(1+0.2s)}\,\frac{1}{s}$$



Se $U(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Y_1(s) = 0$$

$$Y_2(s) = \frac{1-2s}{(1+s)(1+0.2s)}\,\frac{1}{s}$$



Si noti l'undershoot tipico degli zeri a fase non minima.

ZERI IN SPAZIO DI STATO

Lemma Se (A,B,C,D) realizzazione minima di $G(s)$ e $p_1 \dots p_n$ poli di $G(s)$

$z \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_n\}$ è zero di $G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$

$$\Updownarrow$$

$$\text{rango}\left[\begin{array}{c|c} A - zI & B \\ \hline C & D \end{array}\right] < \text{rango}\left[\begin{array}{c|c} A - sI & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

$\exists s \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_n\}$

Cioè la matrice $\begin{bmatrix} A-sI & B \\ C & D \end{bmatrix}$ avrà rango $= r$ per quasi tutti $s \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_n\}$.

Dim $\{p_1 \dots p_n\} = \{$ autovalori di $A\}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline C(sI-A)^{-1} & I \end{array}\right]}_{\text{invertibile}} \left[\begin{array}{c|c} A - sI & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A - sI & B \\ \hline 0 & C(sI-A)^{-1}B + D \end{array}\right]$$

$$\text{rango}\begin{bmatrix} A-sI & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{rango}\left[\begin{array}{c|c} A - sI & B \\ \hline 0 & G(s) \end{array}\right] \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

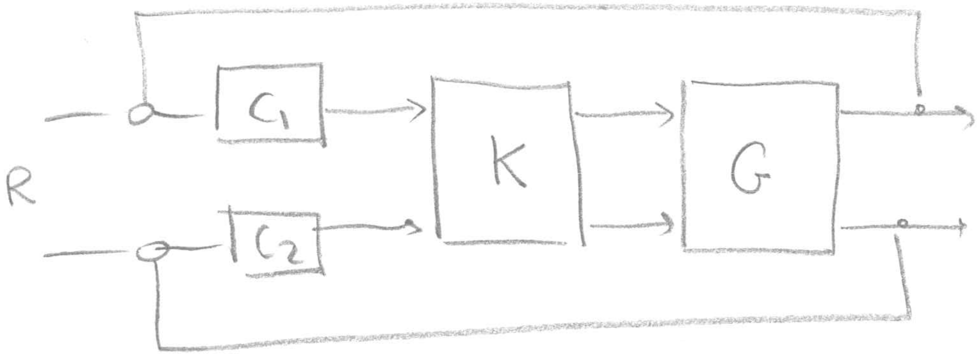
$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{p_1 \dots p_n\}$ $\quad$ rang $(A - sI) = n$

quindi $\text{rango}\left[\begin{array}{c|c} A - sI & B \\ \hline 0 & G(s) \end{array}\right] = n + \text{rango } G(s)$

Possiamo concludere che $\begin{bmatrix} A-sI & B \\ C & D \end{bmatrix}$ cala di rango se e solo se $G(s)$ cala di rango. $\square$

DISACCOPPIAMENTO

Un modo di procedere quando il controllo decentralizzato non è possibile a causa di una forte accoppiamento tra i vari ingressi e le varie uscite, allora si può cercare di diminuire tali accoppiamenti attraverso un precompensatore



$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = GKC\,[R - Y]$$

$$Y = (I + GKC)^{-1} R$$

Se progettiamo $K(s)$ in modo tale che

$G(s)\,K(s)$ sia diagonale (o quasi)

Allora potremmo applicare il controllo decentralizzato

a $\bar{G}(s) = G(s)\,K(s) = \begin{bmatrix} \bar{G}_1(s) & 0 \\ 0 & \bar{G}_2(s) \end{bmatrix}$

Quindi

$$K(s) = G(s)^{-1}\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} [G^{-1}(s)]_{11}\bar{G}_1(s) & [G^{-1}(s)]_{12}\bar{G}_2(s) \\ [G^{-1}(s)]_{21}\bar{G}_1(s) & [G^{-1}(s)]_{22}\bar{G}_2(s) \end{bmatrix}$$

Per la scelta di $\bar{G}(s)$ si devono considerare le seguenti vincoli

1) $K_{ij}(s) = [G_{ij}^{-1}(s)]_{ij}\,\bar{G}_j(s)$ deve essere realizzabile e quindi $\bar{G}_j(s)$ deve avere grado denominatore sufficientemente alto aggiungendo casomai un fattore tipo $\dfrac{1}{(s+\lambda)^{\nu}}$

2) $K_{ij}(s) = [G_{ij}^{-1}(s)]_{ij}\,\bar{G}_j(s)$ deve essere stabile

Noto che

$$\text{poli}\,(K(s)) \subseteq \text{poli}\left(G(s)^{-1}\right) \cup \text{poli}\left(\bar{G}(s)\right)$$

$$\text{zeri}\,(G(s)) \cup \text{poli}\left(\bar{G}(s)\right)$$

Quindi se $G(s)$ ha zeri instabili, potrebbero sorgere dei problemi. Una semplice soluzione è la seguente: se z è zero instabile di $G(s)$, allora esistono i,j tale che $[G^{-1}(s)]_{ij}$ avrà z come polo. Allora, siccome $k_{ij}(s) = [G^{-1}(s)]_{ij}\,\bar{G}_j(s)$ allora basterà prendere $\bar{G}_j(s)$ con zeri in z

Se $G(s)$ non ha zeri instabili, allora la sintesi di $K(s)$ è più semplice. Infatti possiamo prendere

$$K(s) = G^{-1}(s) \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+\lambda)^{\mu_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+\lambda)^{\mu_2}} \end{bmatrix}$$

Esempi

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

osservo che

$\det G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ e quindi $G(s)$ non ha zeri perchè di sicuro se z è zero $\Rightarrow \det(G(z)) = 0$

In effetti $G(z) = \frac{1}{z+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha sempre rango 2 per ogni $z \neq -1$.

$$G^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+1) & -(s+1) \\ -(s+1) & 2(s+1) \end{bmatrix}$$

Quindi prendendo $\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+10} \end{bmatrix}$, si ottiene

$$K(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+10} & -\frac{s+1}{s+10} \\ -\frac{s+1}{s+10} & 2\,\frac{s+1}{s+10} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

osservo che $\det G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{s+3-2-2}{(s+1)^2(s+3)}$

$$= \frac{s-1}{(s+1)^2(s+3)}$$

Quindi $z = 1$ è zero instabile. In effetti

$$G(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ che ha rango 1.

$$G^{-1}(s) = \frac{1}{\det(G(s))} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{2}{s+3} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \frac{(s+1)^2(s+3)}{1-s} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{2}{s+3} \\ -\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{(s+1)(s+3)}{s-1} & +2\frac{(s+1)^2}{s-1} \\ +\frac{(s+1)(s+3)}{s-1} & -\frac{(s+1)(s+3)}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$G^{-1}(s)\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{(s+1)(s+3)}{s-1}\bar{G}_1(s) & +2\frac{(s+1)^2}{s-1}\bar{G}_2(s) \\ +\frac{(s+1)(s+3)}{s-1}\bar{G}_1(s) & -\frac{(s+1)(s+3)}{s-1}\bar{G}_2(s) \end{bmatrix}$$

Conviene prendere

$$\bar{G}_1(s) = \bar{G}_2(s) = \frac{s-1}{(s+10)^2} \Rightarrow K(s) = \begin{bmatrix} -\frac{(s+1)(s+3)}{(s+10)^2} & +2\frac{(s+1)^2}{(s+10)^2} \\ +\frac{(s+1)(s+3)}{(s+10)^2} & -\frac{(s+1)(s+3)}{(s+10)^2} \end{bmatrix}$$

Con questa soluzione, alla fine $C_1(s)$ e $C_2(s)$ devono essere progettati per controllare due funzioni di trasferimento, entrambe a fase non minima.

Nota che, prendendo

$$K(s) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$G(s)K(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{3s+5}{(s+1)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

Quindi si nota che con questo semplice compensatore si riesce solo a triangolarizzare $G(s)$ ma col vantaggio di trovare nel secondo loop di controllo una funzione di trasferimento da controllare priva di zeri instabili

VARIANTI

1. DISACCOPPIAMENTO STATICO

In questo caso si prende $K(s) = K_0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ statico tale che

$$G(s)K\big|_{s=0} \text{ sia diagonale.}$$

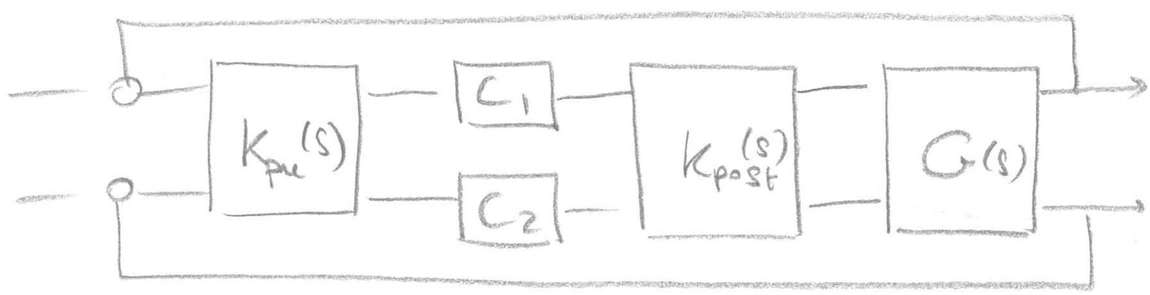
Ad esempio si può prendere $K = G(0)^{-1}$ se $G(0)$ è invertibile.

2. DISACCOPPIAMENTO CON PRE e POST COMPENSATORE

In questo caso si scelgono $K_{pre}(s)$ e $K_{post}(s)$ tali che

$$K_{pre}(s)\, G(s)\, K_{post}(s) = \bar{G}(s) \quad \text{diagonale}$$

Allora, otteniamo lo schema



si ha che

$$Y(s) = G(s)K_{post}(s)\overbrace{\begin{bmatrix} C_1(s) & 0 \\ 0 & C_2(s) \end{bmatrix}}^{C(s)} K_{pre}(s)\left\{R(s) - Y(s)\right\}$$

$$Y(s) = \left(I + G K_{post} C K_{pre}\right) R(s) =$$

Moltiplicando ambo i membri a sinistra per K_{pre} e definendo $\tilde{R} = K_{pre} R$ $\quad \tilde{Y} = K_{pre} Y$ si ottiene

$$\tilde{Y} = K_{pre} \left(I + G K_{post} C K_{pre}\right)^{-1} R$$

$$= \left(I + K_{pre} G K_{post} C\right)^{-1} \tilde{R}$$

$$= \left(I + \bar{G} C\right)^{-1} \tilde{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+\bar{G}_1 C_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+\bar{G}_2 C_2} \end{bmatrix}$$

Un caso particolare di questo schema è lo cosiddetto SVD controller.

Si prende una frequenza ω_0 (ad esempio $\omega_0 = 0$) di interesse e si considera la SVD di $G(j\omega_0)$

$$G(j\omega_0) = U \Sigma V^H$$

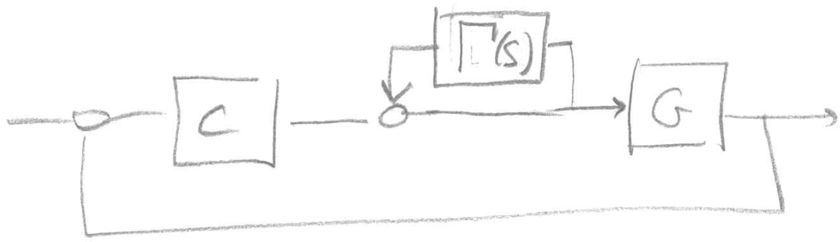
Si prende allora

$$K_{pre}(s) = U \quad e \quad K_{post}(s) = V^H$$

Si dimostra che questo schema porta in certi casi ad ottenere il controllore "migliore".

3. Disaccoppiamento all'indietro

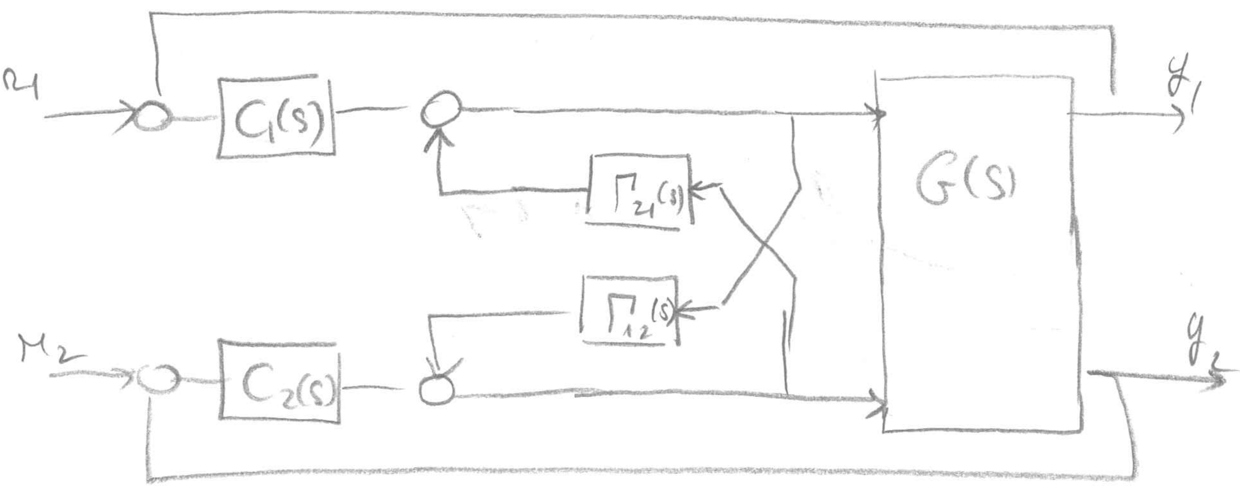
In questo schema si usa un compensatore con la seguente struttura



dove $\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(s) & \Gamma_{12}(s) \\ \Gamma_{21}(s) & \Gamma_{22}(s) \end{bmatrix}$

Nel caso particolare che $\Gamma(s) = \begin{bmatrix} 0 & \Gamma_{12}(s) \\ \Gamma_{21}(s) & 0 \end{bmatrix}$

lo schema precedente è equivalente al seguente



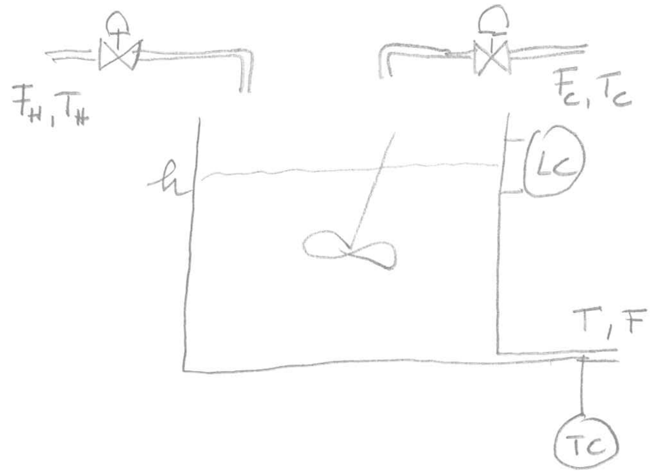
Con questo schema, se vogliamo rendere diagonale il sistema da controllare si deve trovare $\Gamma(s)$ tale che

$$G(s)\,(I-\Gamma(s))^{-1} = \tilde{G}(s)$$

$$\Gamma(s) = I + \tilde{G}(s)^{-1} G(s)$$

Esempio $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

Esempio: Serbatoio di miscelazione



A = area sezione serbatoio

F, F_H, F_C = flussi (m^3/min)

T, T_H, T_C = temperature (°C)

h = livello liquido (metri)

$T_H = 60°$ C

$T_C = 10°$ C

$A = 0{,}581$ m^2

$F = \beta\sqrt{h}$ (perché la pressione alla base è proporzionale a h e il flusso è proporzionale alla radice della pressione)

$$\beta = 53{,}9 \ \frac{\text{litri/min}}{\sqrt{\text{metri}}} = 0{,}0539 \ \frac{m^3/min}{\sqrt{m}}$$

V = volume (m^3) $\qquad V = hA$

$$\frac{dV}{dt} = F_H + F_C - F$$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{\beta}{A}\sqrt{h} + \frac{F_H}{A} + \frac{F_C}{A}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\cancel{c_p}\,\overbrace{\cancel{\rho}V}^{\text{massa}}\,T\right)}_{\text{entalpia totale}} = \cancel{c_p\rho}\,F_H T_H + \cancel{c_p\rho}\,F_C T_C - \cancel{c_p\rho}\,F T$$

$$\frac{d}{dt}(hT) = \frac{F_H T_H}{A} + \frac{F_C T_C}{A} - \cancel{\frac{FT}{A}}$$

$$h\frac{dT}{dt} + T\frac{dh}{dt} = h\frac{dT}{dt} + T\left[-\cancel{\frac{F}{A}} + \frac{F_H}{A} + \frac{F_C}{A}\right]$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_H T_H}{Ah} + \frac{F_C T_C}{Ah} - \frac{F_H}{Ah}T - \frac{F_C T}{Ah}$$

Linearizzazione

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = -\frac{\beta}{A}\frac{1}{2\sqrt{\bar{h}}}\,\tilde{h} + \frac{\tilde{F}_H}{A} + \frac{\tilde{F}_C}{A}$$

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = -\frac{\bar{F}_H + \bar{F}_C}{A\bar{h}}\,\tilde{T} - \left[-(\bar{F}_H + \bar{F}_C)\bar{T} + \bar{F}_H T_H + \bar{F}_C T_C\right]\frac{1}{A\bar{h}^2}\,\tilde{h}$$

$$+ \frac{T_H - \bar{T}}{A\bar{h}}\,\tilde{F}_H + \frac{T_C - \bar{T}}{A\bar{h}}\,\tilde{F}_C$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -\frac{\beta}{A}\frac{1}{2\sqrt{\bar{h}}} & 0 \\ \hline \frac{\bar{F}_H(\bar{T}-T_H) + \bar{F}_C(\bar{T}-T_C)}{A\bar{h}^2} & -\frac{\bar{F}_H + \bar{F}_C}{A\bar{h}} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{A} & \frac{1}{A} \\ \hline \frac{T_H - \bar{T}}{A\bar{h}} & \frac{T_C - \bar{T}}{A\bar{h}} \end{array}\right]$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Noto che $\bar{F}_H(\bar{T}-T_H) + \bar{F}_C(\bar{T}-T_C) = (\bar{F}_H + \bar{F}_C)\bar{T} - \bar{F}_H T_H - \bar{F}_C T_C = 0$

Quindi

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -0{,}05 & 0 \\ \hline 0 & -0{,}1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{c|c} 1{,}72 & 1{,}72 \\ \hline 50 & -50 \end{array}\right]$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1{,}72}{s+0{,}05} & \frac{1{,}72}{s+0{,}05} \\ \frac{50}{s+0{,}1} & \frac{-50}{s+0{,}1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34{,}4}{1+20s} & \frac{34{,}4}{1+20s} \\ \frac{500}{1+10s} & -\frac{500}{1+10s} \end{bmatrix}$$

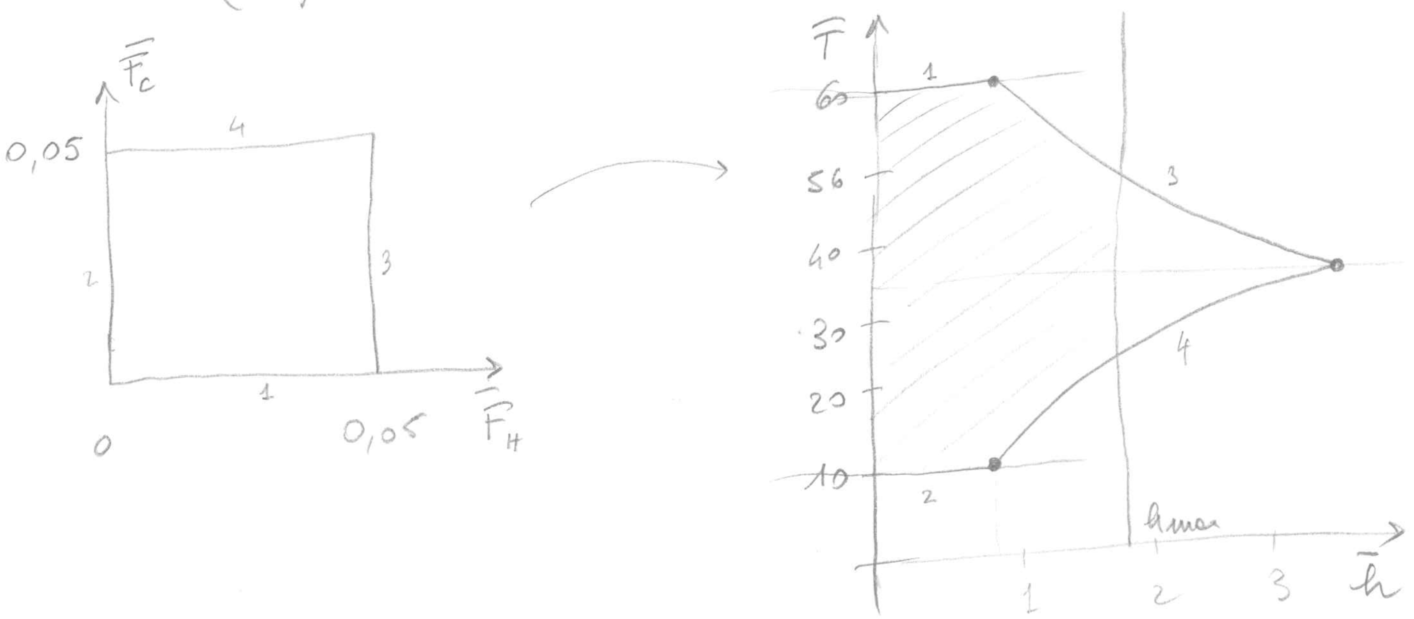
Ingressi sono espressi in m^3/minuto

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_H \\ \tilde{F}_C \end{bmatrix}_{\frac{m^3}{min}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1000} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_H \\ \tilde{F}_C \end{bmatrix}_{\frac{litri}{min}} \qquad Y(s) = G(s)\begin{bmatrix} \tilde{F}_H \\ \tilde{F}_C \end{bmatrix}_{\frac{m^3}{min}} = \frac{G(s)}{1000}\begin{bmatrix} \tilde{F}_H \\ \tilde{F}_C \end{bmatrix}_{\frac{l}{min}}$$

$$G(0) = \begin{bmatrix} 34{,}4 & 34{,}4 \\ 500 & -500 \end{bmatrix} \qquad RGA = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Noto che, se $\bar{F}_H, \bar{F}_C \in [0,\ 0{,}05]$ m^3/minuto allora possiamo determinare quali valori possono assumere $\bar{h}$ e $\bar{T}$ con le formule

$$\bar{h} = \left(\frac{\bar{F}_H + \bar{F}_C}{\beta}\right)^2 \qquad \bar{T} = \frac{T_H \bar{F}_H + T_C \bar{F}_C}{\bar{F}_H + \bar{F}_C}$$



Si consideri che il serbatoio ha un'altezza massima che nell'esempio vale $h_{max} = 1{,}72$ m

Supponiamo di voler ottenere $\bar{h} = 0{,}86$ m $\bar{T} = 35\,°C$

Allora si ottiene $\bar{F}_C = \bar{F}_H = 0{,}025$

↳ che è la metà dell'altezza totale del serbatoio $h_{max} = 1{,}72$ m

SCALATURA

Supponiamo che i due ingressi $F_C, F_H \in [0, 0.05]$

con valore nominale $\bar{F}_C = \bar{F}_H = 0.025$, Allora

$$\tilde{F}_C = F_C - \bar{F}_C \in [-0.025, 0.025]$$

$$\tilde{F}_H = F_H - \bar{F}_H \in [-0.025, 0.025]$$

Conviene scalare dividendo entrambe per 0,025

$$u_1 \triangleq \frac{\tilde{F}_H}{0.025} \qquad u_2 \triangleq \frac{\tilde{F}_C}{0.025} \qquad u_1, u_2 \in [-1, 1]$$

Il nostro obbiettivo è che il livello $h \in [0.34, 1.37]$

che corrisponde a $\bar{h} \pm 60\%$

Quindi $\tilde{h} \in [-0.516, +0.516]$

Conviene scalare $\tilde{h}$ dividendo per 0.516 m

$$y_1 = \frac{\tilde{h}}{0.516} \qquad y_1 \in [-1, 1]$$

Infine T potrà andare dal $T_H = 10$ allo $T_H = 60$

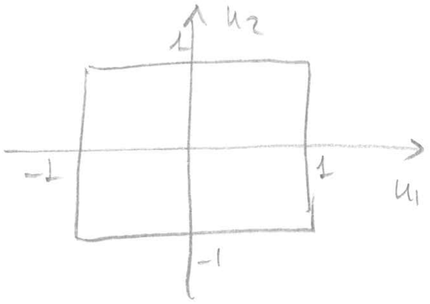
cioè $T \in [10, 60]$. Quindi conviene dividere per 25

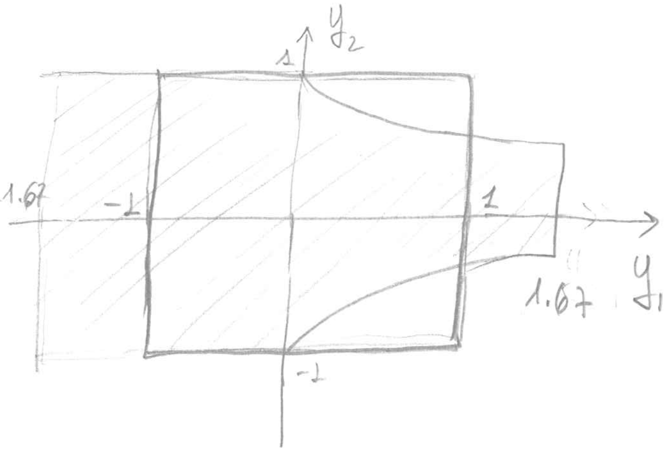
$$y_2 = \frac{\tilde{T}}{25} = \frac{T - \bar{T}}{25} = \frac{T - 35}{25} \quad \text{in modo che } y_2 \in [-1, 1]$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.516} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.516} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} G(s) \begin{bmatrix} \tilde{F}_H \\ \tilde{F}_C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{0.516} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} G(s) \begin{bmatrix} 0.025 & 0 \\ 0 & 0.025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.67}{1+20s} & \frac{1.67}{1+20s} \\ \frac{0.5}{1+10s} & \frac{-0.5}{1+10s} \end{bmatrix}$$

Dato la scalatura si ha che





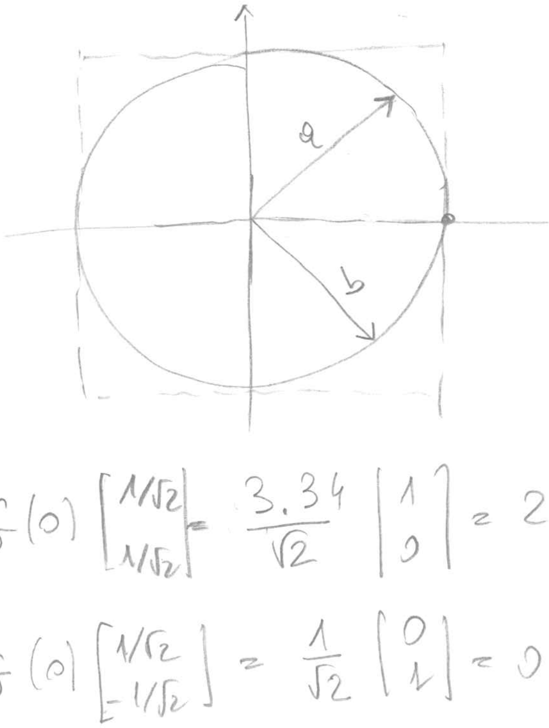
Se $h=0$ $\quad y_1 = \dfrac{0-\bar{h}}{0.516} = \dfrac{-0.86}{0.516} = -\dfrac{10}{6} = -1.67$

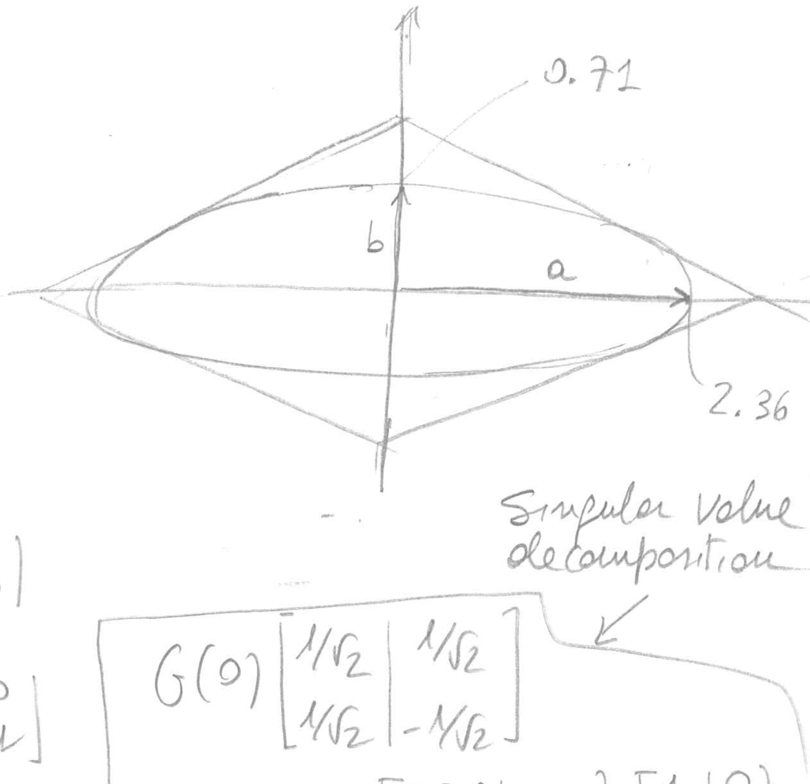
$h = h_{max} = 1.72 \qquad y_1 = 1.67$

Vogliamo analizzare ora il guadagno statico dopo la scalatura

$$G(0) = \begin{bmatrix} 1.67 & 1.67 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

Vediamo $G(0)$ come mappa da R^2 a R^2





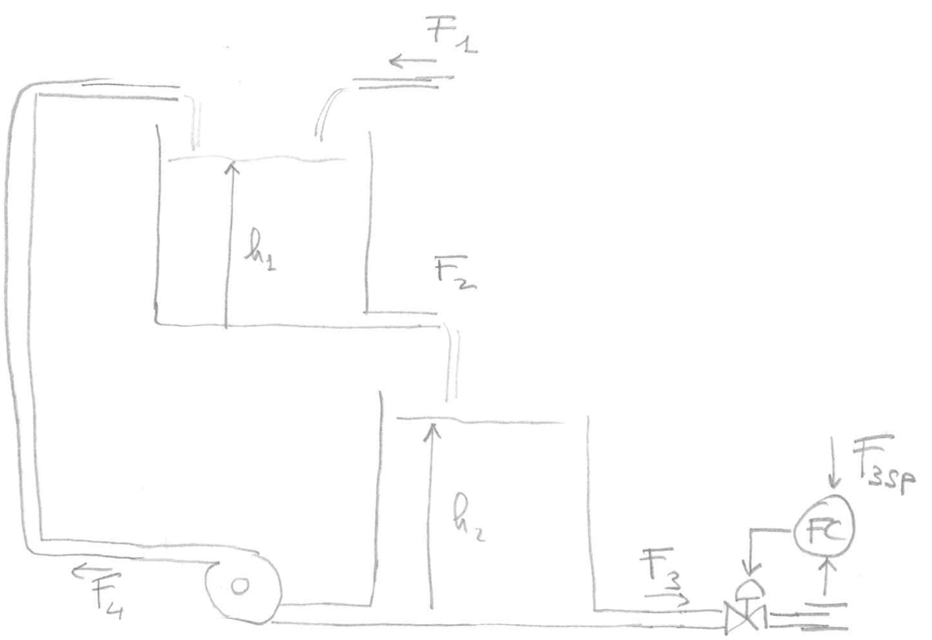
$$G(0)\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3.34}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2.36\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(0)\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.71\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Singular value decomposition

$$G(0)\left[\begin{array}{c|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2.36 & 0 \\ \hline 0 & 0.71 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esempio DOPPIO TANK



F_{3sp} flusso nominale uguale al set point del controllore di flusso

$$A_1 \rho \frac{d}{dt} h_1 = \rho [F_1 + F_4 - F_2]$$

$$A_2 \rho \frac{d}{dt} h_2 = \rho [F_2 - F_4 - F_3]$$

$F_2(t) = k\sqrt{h_1(t)}$

$F_3(t)$ disturbo $\qquad F_1(t)$ e $F_4(t)$ ingressi

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \dfrac{1}{A_1}\left[-k\sqrt{h_1} + F_1 + F_4\right] \\ \dot{h}_2 = \dfrac{1}{A_2}\left[k\sqrt{h_1} - F_4 - F_3\right] \end{cases}$$

$F_3(t) = \bar{F}_3 + \tilde{F}_3(t) \qquad F_1(t) = \bar{F}_1 + \hat{F}_1(t) \qquad F_4(t) = \bar{F}_4 + \hat{F}_4(t)$

$h_1(t) = \bar{h}_1 + \tilde{h}_1(t) \qquad h_2(t) = \bar{h}_2 + \hat{h}_2(t)$

$\bar{F}_3$ noto valore nominale del disturbo $\cong F_{3sp}$

$$\begin{cases} 0 = \cancel{\dfrac{1}{A_1}}\left[-k\sqrt{\bar{h}_1} + \bar{F}_1 + \bar{F}_4\right] \\ 0 = \cancel{\dfrac{1}{A_2}}\left[k\sqrt{\bar{h}_1} - \bar{F}_4 - \bar{F}_3\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{h}_1 = \left(\dfrac{\bar{F}_1 + \bar{F}_4}{k}\right)^2 \\[2ex] \bar{h}_1 = \left(\dfrac{\bar{F}_3 + \bar{F}_4}{k}\right)^2 \end{cases}$$

Noti i valori nominali di $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$ che voglio ottenere si ottiene

$$\begin{cases} \bar{F}_4 = k\sqrt{\bar{h}_1} - \bar{F}_3 \\ \bar{F}_1 = k\sqrt{\bar{h}_1} - \bar{F}_4 = \cancel{k\sqrt{\bar{h}_1}} - \cancel{k\sqrt{\bar{h}_1}} + \bar{F}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{F}_4 = k\sqrt{\bar{h}_1} - \bar{F}_3 \\ \bar{F}_1 = \bar{F}_3 \end{cases}$$

Così si ottengono i controlli nominali $\bar{F}_1$ e $\bar{F}_4$ a partire dal disturbo nominale e dai livelli nominali $\bar{h}_1$ e $\bar{h}_2$

Se $F_1(t) = \bar{F}_1$ e $h_1(0) = \bar{h}_1$ e $h_2(0) = \bar{h}_2$, allora

$h_1(t) = \bar{h}_1 \quad \forall t \qquad h_2(t) = \bar{h}_2 \quad \forall t$

<u>Linearizzazione</u>

$y = x$

$$\dot{\tilde{h}}_1 = \frac{1}{A_1}\left[-\frac{k}{2\sqrt{\bar{h}_1}}\tilde{h}_1 + \tilde{F}_1 + \tilde{F}_4\right]$$

$$\dot{\tilde{h}}_2 = \frac{1}{A_2}\left[+\frac{k}{2\sqrt{\bar{h}_1}}\tilde{h}_1 - \tilde{F}_4 - \tilde{F}_3\right]$$

$x = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{bmatrix} \qquad d = \tilde{F}_3$

$u = \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_4 \end{bmatrix}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{2\sqrt{\bar{h}_1}} & 0 \\ \frac{k}{2\sqrt{\bar{h}_1}} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} d$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Supponiamo che $\alpha \triangleq \dfrac{k}{2\sqrt{h_1}}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} d$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} s+\alpha & 0 \\ -\alpha & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & 0 \\ \frac{\alpha}{s(s+\alpha)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & \frac{1}{s+\alpha} \\ \frac{\alpha}{s(s+\alpha)} & -\frac{1}{s+\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{s+\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\alpha}{s} & -1 \end{bmatrix}$$

$$G(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \infty & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

non possiamo applicare RGA perché $G(s)$ ha 1 polo origine

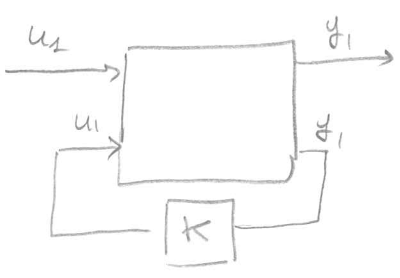
$\text{poli}(G(s)) = \{0, -\alpha\}$ $\qquad \det G(s) = \dfrac{-s-\alpha}{s(s+\alpha)^2} = -\dfrac{1}{s(s+\alpha)}$

$\text{zeri}(G(s)) =$

$$G^{-1}(s) = -s(s+\alpha) \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+\alpha} & -\frac{1}{s+\alpha} \\ -\frac{\alpha}{s(s+\alpha)} & \frac{1}{s+\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & s \\ \alpha & -s \end{bmatrix}$$

$Y_1 = \frac{1}{s+\alpha} u_1 + \frac{1}{s+\alpha} u_2$

$Y_2 = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)} u_1 + \frac{1}{s+\alpha} u_2 \qquad u_2 = k y_2$



$y_2 = \frac{\alpha}{s(s+\alpha)} u_1 - \frac{k}{s+\alpha} y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{\alpha}{s(s+\alpha+k)} u_1$

$y_1 = \left[\frac{1}{s+\alpha} + \frac{k}{s+\alpha} \frac{\alpha}{s(s+\alpha+k)} \right] u_1$

$\hat{G}_{11}(s) = \frac{1}{s+\alpha} + \frac{\alpha k}{(s+\alpha)(s+\alpha+k)s}$

$k = 0 \quad \hat{G}_{11} = \frac{1}{s+\alpha}$

$k = \infty \quad \hat{G}_{11} = \frac{1}{s}$

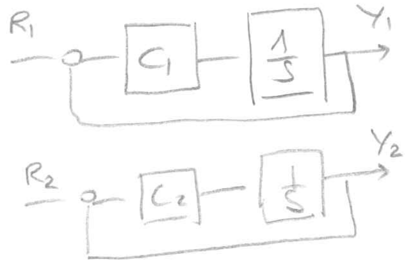
grande variazione

$$K(s) = G^{-1}(s)\,\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} s\tilde{G}_1 & s\tilde{G}_2 \\ \alpha \tilde{G}_1 & -s\tilde{G}_2 \end{bmatrix}$$

Scegliamo $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \frac{1}{s}$

$$K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\alpha}{s} & -1 \end{bmatrix}$$

Con questo precompensatore, dovremo poi controllare il sistema scalare $\frac{1}{s}$



Se $C_1 = K_1$ $\quad W_{R_1Y_1}(s) = \frac{K_1}{s+K_1}$

Disaccoppiamento all'indietro

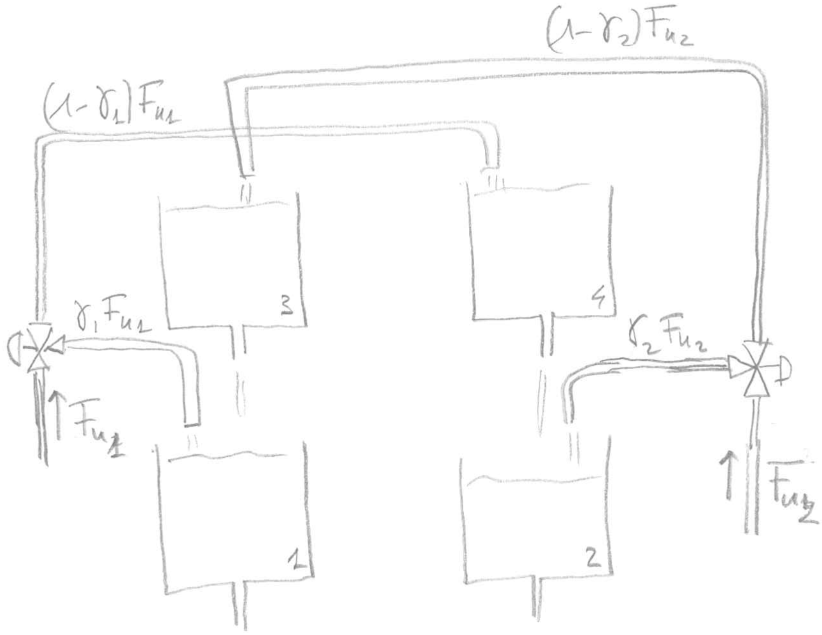
$$\Gamma(s) = I + \begin{bmatrix} 1/\tilde{G}_1 & 0 \\ 0 & 1/\tilde{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\alpha} & \frac{1}{s+\alpha} \\ \frac{\alpha}{s(s+\alpha)} & -\frac{1}{s+\alpha} \end{bmatrix}$$

Se $\tilde{G}_1 = \frac{1}{s+\alpha}$ $\quad \tilde{G}_2 = \frac{1}{s+\alpha}$

$$\Gamma(s) = I + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\alpha}{s} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{\alpha}{s} & 0 \end{bmatrix}$$

QUADRUPLE TANK (Bequette pag 423-451)

Abbiamo 4 serbatoi



A_i sezioni

$$\frac{dV_1}{dt} = -F_1 + F_3 + \gamma_1 F_{u1}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = -F_2 + F_4 + \gamma_2 F_{u2}$$

$$\frac{dV_3}{dt} = -F_3 + (1-\gamma_2) F_{u2}$$

$$\frac{dV_4}{dt} = -F_4 + (1-\gamma_1) F_{u1}$$

$$F_i = a_i \sqrt{2 g h_i}$$ dove a_i e g costanti

$$= \beta_i \sqrt{h_i} \qquad \beta_i = a_i \sqrt{2g}$$

$F_{u1} = k_1 v_1 \qquad F_{u2} = k_2 v_2 \qquad v_i$ tensioni applicate all'elettrovalvola

Noto che $V_i = A_i h_i$. Quindi

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{\beta_1}{A_1}\sqrt{h_1} + \frac{\beta_3}{A_1}\sqrt{h_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1$$

$$\frac{dh_2}{dt} = -\frac{\beta_2}{A_2}\sqrt{h_2} + \frac{\beta_4}{A_4}\sqrt{h_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2$$

$$\frac{dh_3}{dt} = -\frac{\beta_3}{A_3}\sqrt{h_3} + \frac{(1-\gamma_2) k_2}{A_3} v_2$$

$$\frac{dh_4}{dt} = -\frac{\beta_4}{A_4}\sqrt{h_4} + \frac{(1-\gamma_1) k_1}{A_4} v_1$$

uscite

$y_1 = k_c h_1$

$y_2 = k_c h_2$

1 Inroduzione

1.1 Descrizione del processo

Il sistema di figura (1) è composto da quattro serbatoi, ciascuno con un foro sul fondo, disposti su due colonne. Due pompe erogano le portate volumetriche k_1v_1 e k_2v_2, che a loro volta vengono suddivise in due parti da valvole a due vie. La frazione di flusso che entra nel serbatoio inferiore è data da $\gamma_ik_iv_i$, e $(1-\gamma_i)k_iv_i$ è la frazione di flusso che va nel serbatoio superiore.

Si indica con h_i, $i = 1, ..., 4$ il livello del liquido nei serbatoi, con A_i la loro sezione e con a_i la sezione del rispettivo foro. Un sensore per ciascuno dei due serbatoi inferiori misura il livello del liquido in essi, fornendo in uscita la variabile misurabile: $y_i = k_ch_i$, $i = 1, 2$. Gli ingressi di controllo del sistema sono le tensioni v_1, v_2 applicate alla pompe.

Vengono forniti dal testo del problema i parametri relativi a due punti di equilibrio, chiamati H_- e H^+. Dopo aver calcolato le equazioni dinamiche del sistema si calcoleranno gli stati di equilibrio $\mathbf{h}_-$ e $\mathbf{h}_+$. Si proseguirà linearizzando il sistema attorno ai due punti H_- e H^+, per poi progettare, sul sistema linearizzato, due controllori PI disaccoppiati per ciascun sistema. Infine si verificherà il funzionamento dei controllori sul sistema originale.

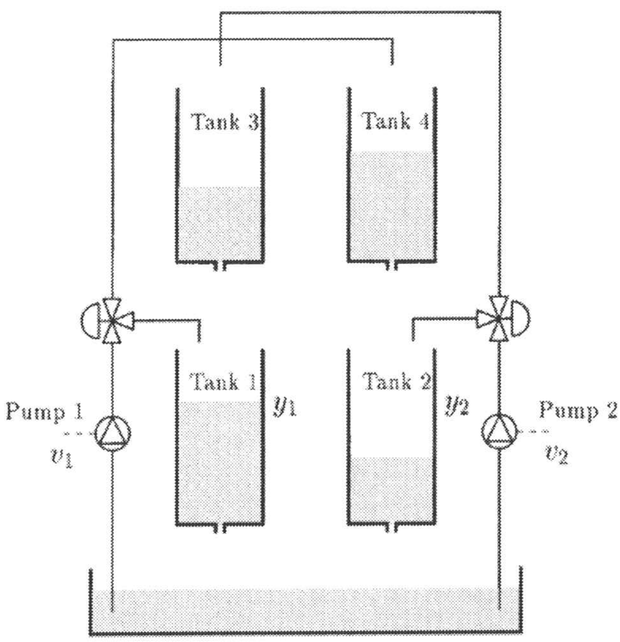


Figura 1: Processo Quadruple Tank

1.2 Valore dei parametri

Si riportano in seguito i valori forniti dal testo del problema.

$$A_1 = A_3 = 28 \text{ cm}^2 \qquad A_2 = A_4 = 32 \text{ cm}^2$$

$$a_1 = a_3 = 0.071 \text{ cm}^2 \qquad a_2 = a_4 = 0.057 \text{ cm}^2$$

$$kc = 0.50 \text{ V/cm}$$

$$g = 981 \text{ cm/s}^2$$

$$(v_1, v_2)^- = (3.00, 3.00), \quad (\gamma_1, \gamma_2)^- = (0.7, 0.6) \quad (k_1, k_2)^- = (3.33, 3.35)$$

$$(v_1, v_2)^+ = (3.15, 3.15), \quad (\gamma_1, \gamma_2)^+ = (0.43, 0.34) \quad (k_1, k_2)^+ = (3.14, 3.29)$$

La differenza sostanziale tra i due punti di equilibrio è la frazione di liquido che va nei serbatoi inferiori, determinata dai parametri (γ_1, γ_2). Per il primo punto la maggior parte del liquido finisce nei serbatoi 1 e 2, mentre nel secondo punto la maggior parte del liquido va nei due serbatoi superiori.

2 Dinamica del sistema

Per il principio di conservazione della massa la variazione della quantità di fluido nella vasca i-esima è data dalla differenza tra il flusso entrante e quello uscente. I serbatoi hanno sezione costante pertanto, come indice della quantità di liquido presente in essi, si può utilizzare il valore h_i, che è una quantità direttamente misurabile per i soli due serbatoi inferiori.

Il flusso entrante nei due serbatoi superiori è dato da:

$$\phi_i^{in} = \gamma_i k_i v_i$$

Il foro di ciascun serbatoio è di dimensione molto più piccola rispetto alla sezione del rispettivo serbatoio. Si ipotizza che il fluido sia ideale, ovvero incomprimibile e con coefficiente di viscosità nullo. È pertanto possibile utilizzare il teorema di Torricelli, che è un'applicazione dell'equazione di Bernoulli. Il teorema fornisce una formula per il calcolo della velocità di uscita di un liquido di altezza h_i da un foro:

$$v_i = \sqrt{2gh_i}$$

Il flusso uscente dai serbatoi perciò è dato da:

$$\phi_i^{out} = a_i v_i = a_i \sqrt{2gh_i}$$

Per il principio di conservazione della massa si possono quindi scrivere le equazioni del sistema:

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = \gamma_1 k_1 v_1 + \sqrt{2gh_3}\, a_3 - \sqrt{2gh_1}\, a_1 \\ A_2 \dot{h}_2 = \gamma_2 k_2 v_2 + \sqrt{2gh_4}\, a_4 - \sqrt{2gh_2}\, a_2 \\ A_3 \dot{h}_3 = (1 - \gamma_2) k_2 v_2 - \sqrt{2gh_3}\, a_3 \\ A_4 \dot{h}_4 = (1 - \gamma_1) k_1 v_1 - \sqrt{2gh_4}\, a_4 \end{cases}$$

12

dove con $\dot{h}_i$ si indica la derivata temporale di h_i.

Dividendo ciascuna equazione per A_i si ha:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1 + \frac{\sqrt{2gh_3}\, a_3}{A_1} - \frac{\sqrt{2gh_1}\, a_1}{A_1} \\ \dot{h}_2 = \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2 + \frac{\sqrt{2gh_4}\, a_4}{A_2} - \frac{\sqrt{2gh_2}\, a_2}{A_2} \\ \dot{h}_3 = \frac{(1-\gamma_2) k_2}{A_3} v_2 - \frac{\sqrt{2gh_3}\, a_3}{A_3} \\ \dot{h}_4 = \frac{(1-\gamma_1) k_1}{A_4} v_1 - \frac{\sqrt{2gh_4}\, a_4}{A_4} \end{cases} \tag{1}$$

che è il sistema che descrive la dinamica del processo.

3 Stati di equilibrio

Note le tensioni v_i e i parametri corrispondenti a due stati di equilibrio del sistema, e ponendo $\dot{h}_i = 0$, si calcolano i seguenti punti di equilibrio:

$$\mathbf{h}^*_- = \begin{bmatrix} 12.26 \\ 12.78 \\ 1.63 \\ 1.41 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}^*_+ = \begin{bmatrix} 12.44 \\ 13.17 \\ 4.73 \\ 4.99 \end{bmatrix}$$

Il sistema (1) è stato implementato in una funzione Matlab chiamata `qTank.m` (dove i parametri γ_i e k_i sono quelli relativi a H^+) e nella funzione `qTank_.m` relativamente a H_-. La funzione, riportata in appendice (A.2), è stata utilizzata per simulare il sistema non linearizzato in Simulink attraverso lo schema di figura (2). Come ingressi si sono presi i valori costanti delle

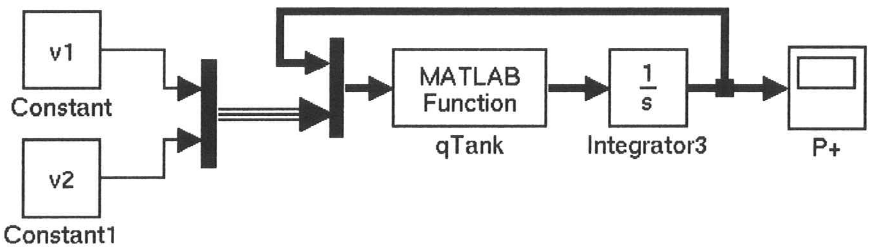


Figura 2: Schema per la simulazione del sistema non lineare

tensioni di alimentazione delle pompe relative ai due punti di equilibrio. Nell'integratore di figura (2) è possibile definire le condizioni iniziali del sistema, ovvero il livello del liquido in ciascun serbatoio all'istante iniziale. Eseguendo la simulazione con diverse condizioni iniziali, si vede che il sistema va a regime ai valori calcolati algebricamente, in un tempo dell'ordine di 400 secondi. Si ha in questo modo una prova empirica della stabilità dei due punti di equilibrio. Si veda un esempio di simulazione in figura (3).

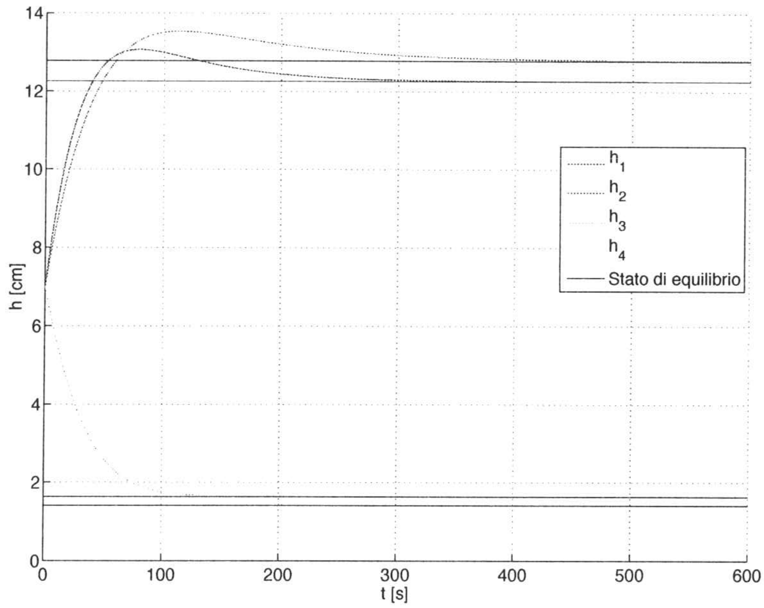


Figura 3: Simulazione del sistema non lineare con parametri relativi al punto H_- e con stato iniziale $\mathbf{h} = [7\ 7\ 7\ 7]'$

4 Linearizzazione del sistema

Si prosegue con la linearizzazione del sistema attorno ai due punti di equilibrio calcolati nel paragrafo precedente.
Il sistema (1) è della forma:

$$\dot{\mathbf{h}} = f(\mathbf{h}, \mathbf{v})$$

Definendo $x_i = h_i - h_i^*$ e $u_i = v_i - v_i^*$ esso si può approssimare, nell'intorno di un suo punto di equilibrio, con il sistema lineare:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{h}^*, \mathbf{v}^*) + \frac{\partial f}{\partial h}\Big|_{h=h^*,\ v=v^*} \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{h=h^*,\ v=v^*} \mathbf{u}$$

dove $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{h}^*, \mathbf{v}^*) = 0$ perchè è un punto di equilibrio.
Si trova allora il seguente sistema lineare in forma di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_1^*}} & 0 & \frac{a_3}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2h_3^*}} & 0 \\ 0 & -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2h_2^*}} & 0 & \frac{a_4}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2h_4^*}} \\ 0 & 0 & -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{\frac{g}{2h_3^*}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{\frac{g}{2h_4^*}} \end{bmatrix} \mathbf{x} \\
&+ \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}
\end{aligned} \tag{2}$$

La matrice di trasferimento del sistema (2) è data dalla formula:

$$G(s) = H(sI - F)^{-1}G$$

che per il punto H_- risulta:

$$G^-(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0416}{s+0.0160} & \frac{0.00105}{s^2+0.0600s+0.000705} \\ \frac{0.000519}{s^2+0.0443s+0.000367} & \frac{0.0314}{s+0.0110} \end{bmatrix}$$

zeri = $\begin{bmatrix} -0.0597 \\ -0.0110 \\ -0.0175 \\ -0.0160 \end{bmatrix}$

e per il punto H^+:

$$G^+(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.0241}{s+0.0159} & \frac{0.00100}{s^2+0.0417s+0.000411} \\ \frac{0.000494}{s^2+0.0285s+0.000192} & \frac{0.0175}{s+0.0109} \end{bmatrix}$$

zeri = $\begin{bmatrix} -0.0562 \\ 0.0128 \\ -0.0159 \\ -0.0109 \end{bmatrix}$

G^+ ha uno zero instabile 0.0128

Dalla matrice di trasferimento $G(s)$ si ricavano i poli del sistema tramite il comando Matlab `pole()`, che nel caso multivariabile calcola i poli di $\det(G(s))$. Le costanti di tempo sono legate ai poli dalla relazione:

$$T_i = -\frac{1}{p_i}$$

Risulta:

$$\begin{array}{ll} T_1^- = 62.4 & T_1^+ = 62.8 \\ T_2^- = 30.1 & T_2^+ = 56.6 \\ T_3^- = 90.6 & T_3^+ = 92.0 \\ T_4^- = 22.8 & T_4^+ = 38.7 \end{array}$$

Allo stesso risultato si poteva giungere calcolando gli autovalori della matrice F, che coincidono con i poli della funzione di trasferimento.

Le costanti di tempo sono tutte positive, pertanto si ha la conferma della stabilità asintotica dei due punti di equilibrio, sia per il sistema lineare, sia (per il criterio ridotto di Lyapunov) per il sistema non lineare. Si sono calcolati anche gli zeri delle due funzioni di trasferimento attraverso il comando Matlab `zero()` che funziona nel caso multivariabile come il comando `pole()`. Per il punto H_- gli zeri sono tutti reali negativi e la matrice inversa di $G(s)$ è ancora stabile. Per il punto H^+ si trova uno zero reale positivo, pertanto il secondo sistema non è a fase minima e la matrice inversa è instabile. Si vedrà nel seguito della relazione che questa proprietà pone dei limiti nelle prestazioni del sistema controllato in catena chiusa, e inoltre complica la scelta dei parametri per il controllore PI.

5 Simulazioni

Le simulazioni sono state fatte tramite il modello Simulink di figura (4). Da questo paragrafo per le simulazioni si considera il sistema a condizioni iniziali nulle.

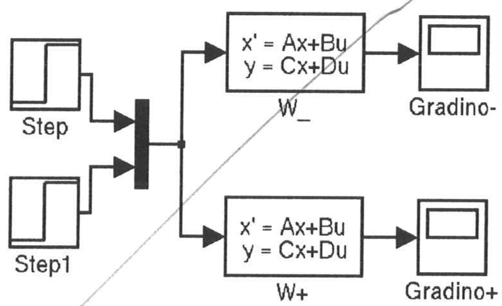


Figura 4: Schema per la simulazione del sistema lineare

Noto che

$$G^+(0.0128) = \begin{bmatrix} 0.8407 & 0.9049 \\ 0.6872 & 0.7396 \end{bmatrix}$$

e che se $v = \begin{bmatrix} -0.7326 \\ 0.6806 \end{bmatrix}$

Allora $G^+(0.0128)\, v = 0$

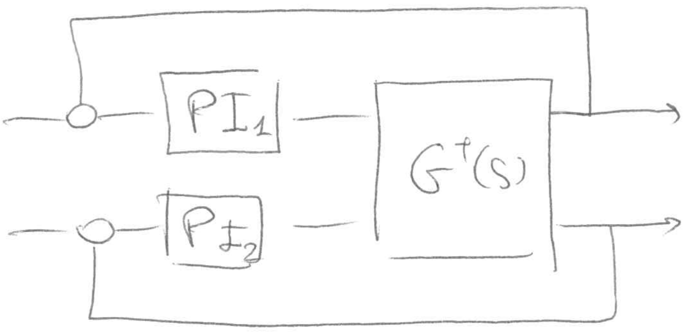
Se applichiamo un ingresso

$u(t) = v\, \delta^{(-1)}(t)$ dove $\delta^{(-1)}(t)$ è funzione a gradino

si noterà gli effetti tipici dello zero a fase non minima cioè la sottoelongazione

Cerchiamo ora un controllo per $G^+(s)$.

Un primo schema che si prova è quello decentralizzato



Dopo numerosi tentativi si trovano i seguenti regolatori PI

$K_{p_1}^+ = 4.5$ $\quad K_{p_2}^+ = -0.1$ $\quad PI_1(s) = 4.5 + \frac{0.09}{s}$

$K_{i_1}^+ = 0.09$ $\quad K_{i_2}^+ = -0.001$ $\quad PI_2(s) = -0.1 - \frac{0.001}{s}$

Consideriamo ora un controllo che disaccoppia gli ingressi e le uscite

Se prendiamo

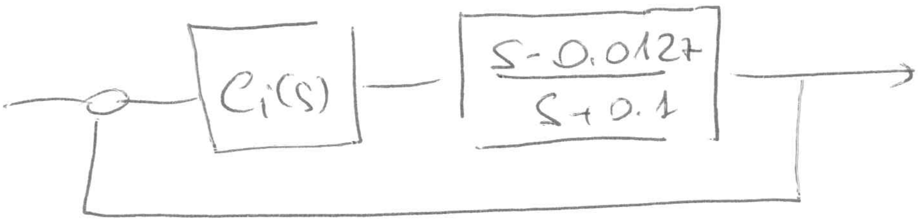
$$K(s) = G^{+-1}(s)\,\bar{G}(s)$$

dove $\bar{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-0.0127}{s+0.1} & 0 \\ 0 & \frac{s-0.0127}{s+0.1} \end{bmatrix}$

otteniamo che

$$G^{+}(s)\,K(s) = \bar{G}(s) \quad \text{diagonale}$$

Quindi basterà trovare due controllori $C_1(s)$ $C_2(s)$ scalari in modo da controllare



Con pochi tentativi (usando il luogo delle radici) si trova che $C_i(s) = \frac{k_i}{s}$ con

$k_i = -0.04$

Stabilizza il sistema. Possiamo quindi prendere come controllore

$$C(s) = K(s)C(s) = G^{+-1}(s)\,\bar{G}(s)\,C(s) \text{ è del III ordine}$$

cioè denominatore è di terzo grado

Luogo di

$$\frac{k(s-0.0127)}{s(s+0.1)}$$