Esercitazione

Partiamo col modello non lineare

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(M, X, B, D, L, V, F, q_F, z_F) \\ \dot{M} = f_2(M, B, D, L, V, F, q_F) \end{cases}$$

dove $X_1, \dots, X_N$ (concentrazioni)

$M_1, \dots, M_N$ (masse) sono $2N$ stati

B, D, L, V, F, q_F, z_F 7 ingressi

di cui B, D, L, V controlli

F, q_F, z_F disturbi

SIMULAZIONE SISTEMA NONLINEARE

Gli ingressi sono settati ai valori nominali

$\bar{B} = 0{,}5$

$\bar{D} = 0{,}5$

$\bar{L} = 2{,}70629$

$\bar{V} = 3{,}20629$ $\Rightarrow$ Valori di equilibrio di stato

$\bar{F} = 1$ $\bar{M}_1 = \dots = \bar{M}_N = 0{,}5$

$\bar{z}_F = 0{,}5$ $\bar{X}_1 = 0{,}010,\ \bar{X}_2 = 0{,}014, \dots, \bar{X}_{41} = 0{,}99$

$\bar{q}_F = 1$

nel simulatore si hanno 82 stati

i primi 41 sono le concentrazioni $X_i(t)$

Simulazione 1

$X_1(0) = 0,5$

$M_i(0) = 0,5$ (Coincidono con i valori di equilibrio delle masse)

Si osserva che $M_i(t) = 0,5$ costanti

mentre le $x_i(t)$ convergono, dopo un transitorio, verso i valori di equilibrio.

Il sistema sembra stabile

Simulazione 2

$X_i(0) = 0$

$M_i(0) = 0,8$

Si osserva che $M_i(t)$ converge verso $0,5$ a parte $M_1(t)$ e $M_{41}(t)$ a causa degli autovalori in zero. La convergenza degli altri avviene in 4 minuti massimo. $x_i(t)$ convergono più lentamente (50 minuti)

Simulazione 3

$X_1(0) = 0$

$M_i(0) = 0,2$

Nelle simulazioni intervengono errori numerici

Si vede che le concentrazioni divergono.

Ciò è dovuto al fatto che [illegible]

STATI DI EQUILIBRIO

Si fa una simulazione per tempi lunghi

$M_i(0) = 0,5 \qquad X_i(0) = 0,5$

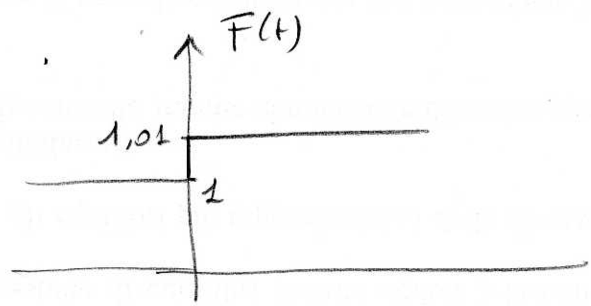
Si trova che $M_i(\infty) = 0,5 = \bar{M}_1$

$X_1(\infty) = \bar{X}_1$

Si plotta il profilo di $X_i(\infty)$ $i=1,..,41$

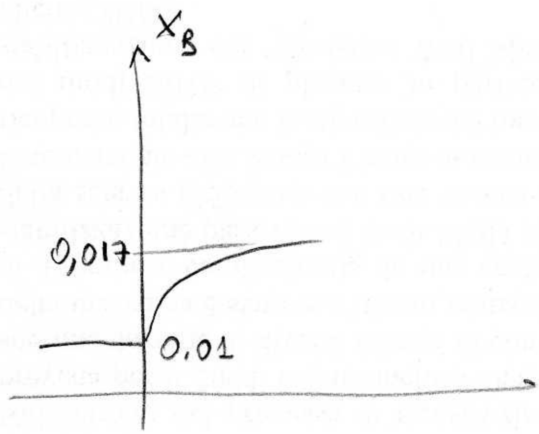
EFFETTO DEL DISTURBI

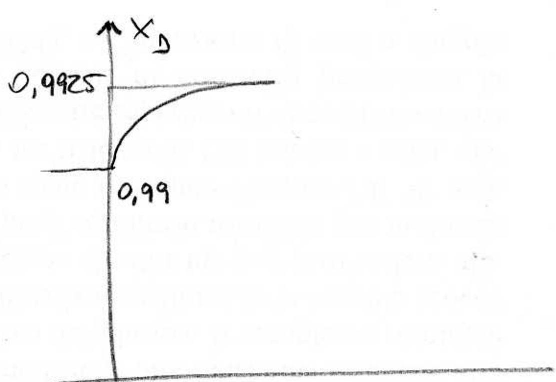
Il sistema non lineare viene inizializzato ai valori di equilibrio.



$F(t) = 1 + 0,01\, \delta^{(-1)}(t)$

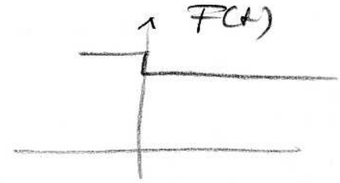
Valutiamo l'effetto sulle concentrazioni $X_D(t)$ e $X_B(t)$





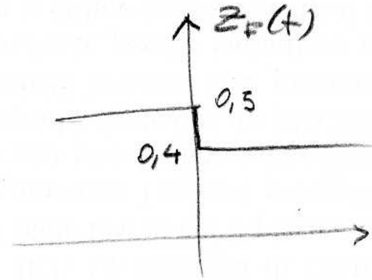
Facciamo altre due simulazioni con

$$F(t) = 1 - 0,001\,\delta^{(-1)}(t)$$



e poi con

$$z_F(t) = 0,5 - 0,1\,\delta^{(-1)}(t)$$



EFFETTO DEI DISTURBI NEL SISTEMA CONTROLLATO

Consideriamo nel sistema non lineare il controllo proporzionale

$$\tilde{D} = K_D\,\tilde{M}_D \qquad k_1 = k_2 = 10$$

$$\tilde{B} = K_B\,\tilde{M}_B$$

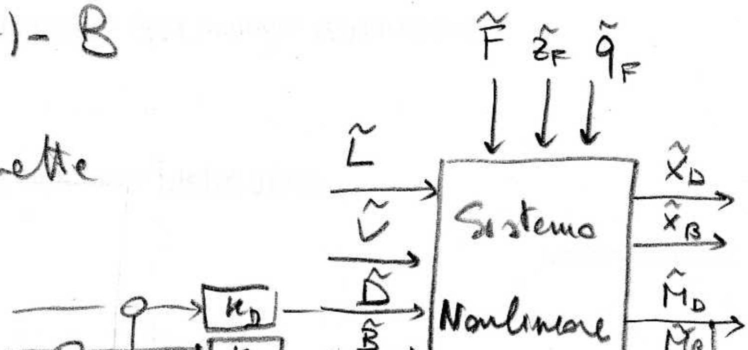
dove $\tilde{M}_D(t) = M_D(t) - \bar{M}_D \qquad M_D = M_N$

$$\tilde{M}_B(t) = M_B(t) - \bar{M}_B \qquad M_B = M_1$$

$$\tilde{D}(t) = D(t) - \bar{D}$$

$$\tilde{B}(t) = B(t) - \bar{B}$$

Questo controllo permette di stabilizzare M_D e M_B



Primo esperimento è con un impulso e gradino sul disturbo F

$$F(t) = 1 + 0{,}01\,\delta^{(-1)}(t) \longrightarrow \tilde{F}(t) = 0{,}01\,\delta^{(-1)}(t)$$

Si vede che l'evoluzione della massa

$M_B(t) = M_1(t)$ è molto diverso che nel caso non controllato (in cui avevamo una rampa)

Le evoluzioni di $X_B(t)$ e $X_D(t)$ sono poco diverse per i due sistemi

Secondo esperimento è con un disturbo

$$Z_F(t) = 0{,}5 - 0{,}1\,\delta^{(-1)}(t) \longrightarrow \tilde{Z}_F(t) = -0{,}1\,\delta^{(-1)}(t)$$

In questo caso tutte le evoluzioni sono circa le stesse nel caso controllato e non controllato

LINEARIZZAZIONE

Definiamo $\tilde{M}_1(t) \triangleq M_1(t) - \bar{M}_1 \qquad \tilde{x}_1(t) = x_1(t) - \bar{x}_1$

e analogamente $\tilde{B}(t), \tilde{D}(t), \tilde{L}(t), \tilde{V}(t), \tilde{F}(t), \tilde{z}_F(t)$

Consideriamo sempre $q_F(t) = \bar{q}_F = 1 \Rightarrow \tilde{q}_F(t) \equiv 0$

La linearizzazione è data dal sistema

$$
\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{V} \\ \tilde{D} \\ \tilde{B} \\ \tilde{F} \\ \tilde{z}_F \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \tilde{x}_D \\ \tilde{x}_B \\ \tilde{M}_D \\ \tilde{M}_B \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{M} \end{bmatrix}
$$

Si osserva che la matrice A ha tutti autovalori negativi a parte due che sono nulli.

LINEARIZZAZIONE DEL SISTEMA CONTROLLATO

Linearizziamo il sistema controllato con controllo

$$\tilde{D} = K_D \tilde{M}_D$$
$$\tilde{B} = K_B \tilde{M}_B$$

Otteniamo

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{X}} \\ \dot{\tilde{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{M} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \tilde{L} \\ \tilde{V} \\ \tilde{F} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_D \\ \tilde{X}_B \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{M} \end{bmatrix}.$$

Si nota che questa volta il sistema è stabile con autovalore dominante $= -0{,}052$ e quindi costante di tempo $T = \frac{1}{0{,}052} \simeq 190$

SCALATURA

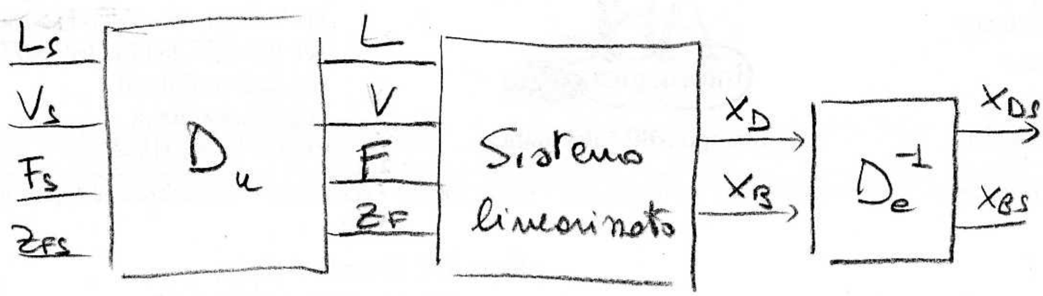
Scaliamo i disturbi in modo tale che

$$F_{scalato} = \frac{F}{0{,}2\,\bar{F}} = \frac{F}{0{,}2} \qquad Z_{F\,scalato} = \frac{Z_F}{0{,}2\,\bar{Z}_F} = \frac{Z_F}{0{,}1}$$

$$X_{D\,scalato} = \frac{X_D}{0{,}01} \qquad X_{B\,scalato} = \frac{X_B}{0{,}01}$$

Definisco

$$D_u = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0{,}2 \end{bmatrix} \qquad D_e = \begin{bmatrix} 0{,}01 & \\ & 0{,}01 \end{bmatrix}$$



Le matrici del sistema linearizzato diventano

$$A_s = A \qquad B_s = B D_u \qquad C_s = D_e^{-1} C$$

A_s ha gli stessi autovalori di A

Calcoliamo il guadagno in continua

$$G(s) = C_s (sI - A_s)^{-1} B_s \Big|_{s=0}$$

$$= \begin{bmatrix} 87,54 & -86,18 & 7,88 & 8,81 \\ 108,46 & -109,82 & 11,72 & 11,19 \end{bmatrix}$$

CONTROLLO DELLA COLONNA

Partiamo da un modello molto semplificato in cui

$$y = \begin{bmatrix} x_D \\ x_B \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} L \\ V \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} F \\ z_F \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_d(s)D(s)$$

dove

$$G(s) = \frac{1}{1+s75} \underbrace{\begin{bmatrix} 87,8 & -86,4 \\ 108,2 & -109,6 \end{bmatrix}}_{G(0)}$$

$$G_d(s) = \frac{1}{1+s75} \underbrace{\begin{bmatrix} 7,88 & 8,81 \\ 11,72 & 11,19 \end{bmatrix}}_{G_d(0)} \Rightarrow$$ i due disturbi sono altrettanto difficili da controllare

Cominciamo ad analizzare il controllo decentralizzato e quindi quali accoppiamenti ingresso uscita usare

Calcoliamo il RGA di $G(0)$

$$\Lambda(G(0)) = \begin{bmatrix} 35,1 & -34,1 \\ -34,1 & 35,1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{G_{21}(0)G_{12}(0)}{G_{22}(0)G_{11}(0)}} = 35,07$$

da cui si deduce che si tratta di un sistema difficile da controllare attraverso un controllo decentralizzato.

La singular value decomposition è

$$G(0) = \begin{bmatrix} 0,625 & -0,781 \\ 0,781 & 0,625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 197,2 & 0 \\ 0 & 1,39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,707 & -0,708 \\ -0,708 & -0,707 \end{bmatrix}$$

Il condition number è

$$\gamma(G(0)) = \frac{197,2}{1,39} = 141,7$$

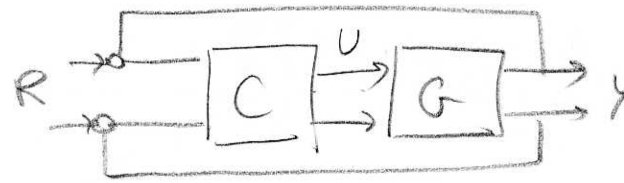
È alto anche il condition number minimizzato

$$\gamma^*(G(0)) = \min_{D_1, D_2} \gamma(D_1 G D_2) = 138$$

che conferma la difficoltà del controllo

CONTROLLO CON DISACCOPPIATORE

Consideriamo un controllo



$$U(s) = C(s)\left[R(s) - Y(s)\right]$$

con $C(s) = \frac{k}{s} G^{-1}(s)$

$$= \frac{k}{s}(1 + s\,75)\, G(0)^{-1}$$

$$Y(s) = G(s)C(s)\left[R(s) - Y(s)\right] = \begin{bmatrix} k/s & 0 \\ 0 & k/s \end{bmatrix}(R(s) - Y(s))$$

$$Y_1(s) = \frac{k}{s}(R_1(s) - Y_1(s)) \qquad Y_1(s) = \frac{k}{s+k} R_1(s) = \frac{1}{1+s\tau} R_1(s)$$

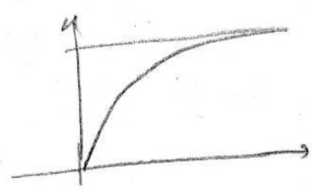
$$Y_2(s) = \frac{k}{s}(R_2(s) - Y_2(s)). \qquad Y_2(s) = \frac{k}{s+k} R_2(s) = \frac{1}{1+s\tau} R_2(s)$$

con $\tau = 1/k$

Scegliamo $k = 0{,}7 \Rightarrow \tau = 1{,}43$ minuti

Risposta al gradino

Se $r_1(t) = \delta^{(-1)}(t)$ $\quad Y_1(t)$



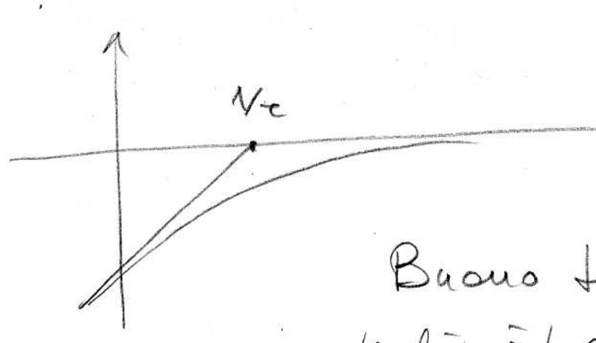
costante di tempo 1,43 minuti

$$Y_2(t) = 0$$

Funzione sensitività

$$S(s) = \left(I + G(s)C(s)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{k}{s} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{k}{s} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s+k} & 0 \\ 0 & \frac{s}{s+k} \end{bmatrix}$$

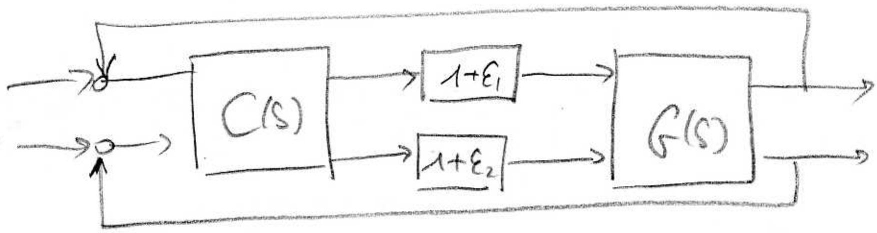
Bode di $\frac{s}{s+k}$



Sempre ≤ 1

Buona funzione sensitività

Supponiamo che ci siano delle perturbazioni



con $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ variazioni del 20% cioè

Supponiamo che $\varepsilon_1 = 0,2$ e $\varepsilon_2 = -0,2$

Analizziamo la stabilità $\quad D = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_2 \end{bmatrix}$

$$Y(s) = G(s) D C(s) \left[R(s) - Y(s) \right]$$

$$Y(s) = \left[I + G(s) D C(s) \right]^{-1} \left[G(s) D C(s) \right]$$

per determinare la stabilità calcoliamo i poli che saranno dati dagli zeri del $\det\left[I + G(s) D C(s) \right]$

$$\det\left[I + G(s) D C(s) \right] = \det\left[I + \frac{1}{\cancel{1+s75}} G(0) D \frac{k\cancel{(1+s75)}}{s} G(0)^{-1} \right]$$

$$= \det\left[\underset{\substack{\downarrow \\ G(0)G(0)^{-1}}}{I} + \frac{k}{s} G(0) D G(0)^{-1} \right]$$

$$= \det G(0) \left[I + \frac{k}{s} D \right] G(0)^{-1}$$

$$= \det\left[I + \frac{k}{s} D \right] = \det \begin{bmatrix} 1 + \frac{k}{s}(1+\varepsilon_1) & 0 \\ 0 & 1 + \frac{k}{s}(1+\varepsilon_2) \end{bmatrix}$$

$$= \left(1 + \frac{k}{s}(1+\varepsilon_1)\right)\left(1 + \frac{k}{s}(1+\varepsilon_2)\right) = \frac{\left(s + k(1+\varepsilon_1)\right)\left(s + k(1+\varepsilon_2)\right)}{s^2}$$

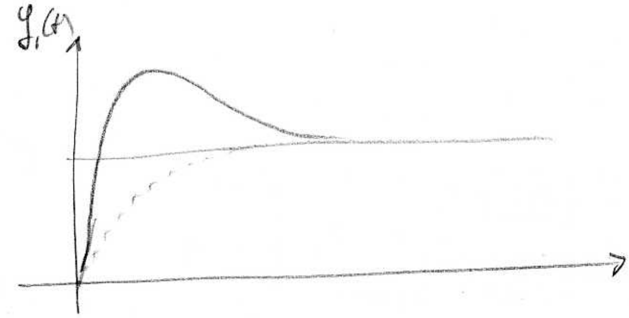
Si vede che il sistema mantiene la stabilità perché

$1+\varepsilon_1 > 0 \quad$ e $\quad 1+\varepsilon_2 > 0$

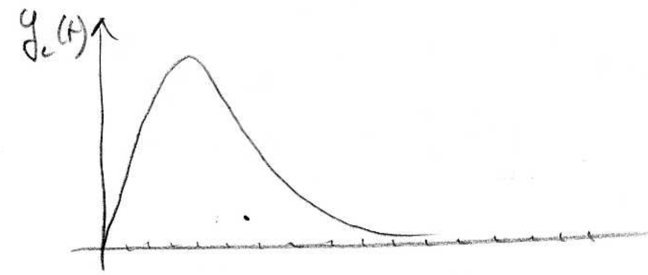
Tuttavia le prestazioni peggiorano notevolmente

Ad esempio nel transitorio

Se $r_1(t) = \delta^{(-1)}(t)$



tratteggiato è con $\varepsilon_1 = 0$



con $\varepsilon_1 = 0$ $y_2 \equiv 0$