Soluzione
Primo compitino di Fondamenti di Automatica, Prof. M. Pavon , 14.5.2005

Esercizio 1–[punti 8]

Si consideri un motore in c.c. comandato sull'armatura. Sia $v_a(t)$ la tensione impressa al circuito di armatura e sia $\theta(t)$ la posizione angolare dell'albero motore. Si sa che il rotore ha momento d'inerzia $J = 5\,kg \cdot m^2$ e costante della forza d'attrito viscoso $F = 0.002\,N \cdot m \cdot sec/rad$. Si sa inoltre che l'induttanza e la resistenza dell'armatura sono rispettivamente $L_a = 0.2H$, $R_a = 10\Omega$. Si assuma che le costanti di coppia ed elettrica siano uguali con $K_m = K_e = 10$. **a**) Si calcoli la funzione di trasferimento $W(s) = \hat{\theta}(s)/\hat{v}_a(s)$; **b**) si fornisca una rappresentazione di stato di tale sistema.

Soluzione

(a)

$$W(s) = \frac{K_m}{s\left[(Js+F)(L_a s + R_a) + K_m K_e\right]} = \frac{10}{s^3 + (50.0004)s^2 + (100.02)s}.$$

(b) La realizzazione canonica controllabile è

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -100.02 & -50.0004 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [10 \;\; 0 \;\; 0], \quad J = 0.$$

Alternativamente, prendendo come vettore di stato

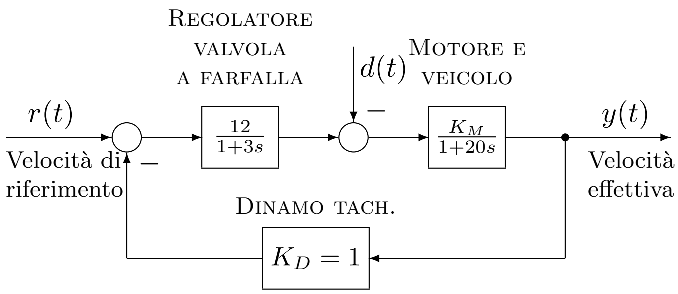
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ i_a \end{pmatrix},$$

si ottiene la realizzazione

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.0004 & 2 \\ 0 & -50 & -50 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \;\; 0 \;\; 0], \quad J = 0.$$

Esercizio 2–[punti 10]

Si consideri il sistema di controllo della velocità di un'automobile:



(1)

dove $d(t)$ modella le inaspettate variazioni di pendenza della strada.

(a) si determini la trasferenza da $d(t)$ a $y(t)$;

(b) si determini, nel caso $d(t) \equiv 0$, la velocità a regime in corrispondenza all'ingresso di riferimento $r(t) = 60\mathbb{1}(t)$ Km/h, con $K_M = 100$;

(c) Si calcoli infine la variazione della risposta a regime in questione, in corrispondenza ad una variazione relativa di K_M del 5%.

Soluzione

(a)

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{d}(s)} = -\frac{\frac{K_M}{1+20s}}{\frac{(1+3s)(1+20s)+12K_M}{(1+3s)(1+20s)}} = -\frac{K_M(1+3s)}{60s^2+23s+12K_M+1} \tag{2}$$

(b) Osservando che la trasferenza a catena chiusa W qui sotto è propria e stabile, si ottiene

$$W(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{12K_M}{60s^2+23s+12K_M+1}, \qquad W(0) = \frac{12K_M}{12K_M+1}, \tag{3}$$

$$y(\infty) = \frac{1200}{1201} \cdot 60 \simeq 59.95 \text{ Km/h}. \tag{4}$$

(c)

$$G(s) = \frac{12\,K_M}{(1+3s)(1+20s)}\,, \tag{5}$$

$$S^W_{K_M}(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{(1+3s)(1+20s)}{60s^2+23s+12K_M+1}, \tag{6}$$

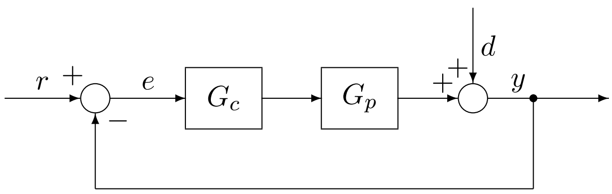
che è pure propria e stabile. Ne segue che

$$\delta y(\infty) = \delta W(0) \cdot 60 = W(0)\, S^W_{K_M}(0)\, \frac{\delta K_M}{K_M} \cdot 60 \tag{7}$$

$$= \frac{1200}{1201} \cdot \frac{1}{1201} \cdot 0.05 \cdot 60 \simeq 0.0025 \text{ Km/h}. \tag{8}$$

Esercizio 3–[punti 10]

Si consideri il seguente sistema a catena chiusa con i disturbi riportati all'uscita



in cui

$$G_p(s) = \frac{10}{s(s+2)}, \quad G_c(s) = K_c. \tag{9}$$

(a) Sia $d(t) \equiv 0$. Si trovi per quali valori positivi di K_c l'errore a regime $e_{r,1} := \lim_{t\to\infty} e(t)$ in risposta alla rampa unitaria $r(t) = t\mathbb{1}(t)$ ha modulo minore di 0.1.

(b) Per $K_c = 2/5$, si calcolino il tempo al picco t_p e la sovraelongazione massima M.

(c) Si supponga ora $G_c(s) = \frac{K_c}{s}$, $r(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbb{1}(t)$ e $d(t) \equiv 0$. Per quali valori positivi di K_c il modulo di $e(t)$ è asintoticamente minore di 0.1?

Soluzione

(a) Il sistema è a retroazione unitaria e

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{10K_c}{s(s+2)}.$$

Inotre $W(s)$ data da

$$W(s) = \frac{10K_c}{s^2+2s+10K_c}$$

è propria e stabile per ogni valore positivo di K_c. Ne segue che lo stesso è vero per la trasferenza da r ad e $W_e(s) = 1 - W(s)$. Essendo il sistema di Tipo 1, si ha che $e_{r,1} = 1/K_v = \frac{1}{5K_c}$. Per $K_c > 0$, segue che $|e_{r,1}| = \frac{1}{5K_c} < 0.1$ se e solo se $K_c > 2$.

(b) Per $K_c = 2/5$, si ottiene $\omega_n = 2$ e $\zeta = 1/2$. Dalle note formule segue che $t_p = \pi/\sqrt{3} \simeq 1.81$ e $M \simeq 0.16$ (o $M \simeq 16\%$).

(c) Ora

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{10K_c}{s^2(s+2)}, \quad W(s) = \frac{10K_c}{s^3+2s^2+10K_c}, \quad W_e(s) = 1 - W(s) = \frac{s^2(s+2)}{s^3+2s^2+10K_c}.$$

Otteniamo

$$\hat{e}(s) = W_e(s)\hat{r}(s) = \frac{s^2(s+2)}{s^3+2s^2+10K_c} \cdot \frac{1}{s^3} = \frac{s+2}{s(s^3+2s^2+10K_c)}.$$

Osserviamo che $\hat{e}(s)$, oltre ad un polo semplice nell'origine, ne ha sicuramente altri in $\Re[s] \geq 0$ visto che a $P(s) = s^3 + 2s^2 + 10K_c$ manca il monomio di grado uno. Più precisamente, osserviamo che il polinomio $P(s)$ ha sicuramente degli zeri in $\Re[s] > 0$ per ogni $K_c > 0$. Infatti possiamo escludere che $P(s)$ abbia zeri sull'asse immaginario. Ciò discende dal fatto che s non divide $P(s)$ e che se $s^2 + \omega_0^2$ dividesse $P(s)$, allora il polinomio si potrebbe fattorizzare nella forma $P(s) = (s^2 + \omega_0^2)(s - z_0)$ e non mancherebbe il monomio di grado uno. Concludiamo che $P(s)$ ha almeno uno zero in $\Re[s] > 0$ (il *Criterio di Routh* fornisce immediatamente che per ogni $K_c > 0$ $P(s)$ ha *due* zeri in $\Re[s] > 0$). Ne segue che, per ogni $K_c > 0$, $e(t)$ diverge.

Esercizio–4 [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Nell'esercizio precedente con G_c e G_p dati da (9), si supponga che $r(t) = 7\mathbb{1}(t)$ e che $d(t) = (4 + 2\cos t)\mathbb{1}(t)$. Per quali valori positivi di K_c il modulo di $e(t)$ è asintoticamente minore di 1?

Soluzione Per il principio di sovrapposizione, $e(t) = r(t) - y_r(t) - y_d(t)$. Siccome r è di tipo gradino e il sistema è di Tipo 1, sappiamo che $r(t) - y_r(t)$ tende asintoticamente a zero. Ancora per lo stesso principio, possiamo scrivere $y_d(t) = y_d^1(t) + y_d^2(t)$, dove $y_d^1(t)$ è la parte dovuta a $d_1(t) = 4\mathbb{1}(t)$ e $y_d^2(t)$ è la parte dovuta a $d_2(t) = 2\cos t\mathbb{1}(t)$. Essendo il sistema di Tipo 1, $y_d^1(t)$ tende asintoticamente a zero. Quindi, per rispondere alla domanda, è sufficiente trovare i valori $K_c > 0$ per cui $|y_d^2(\infty)| < 1$. Essendo il disturbo riportato all'uscita sappiamo che

$$\frac{\hat{y}_d^2(s)}{\hat{d}_2(s)} = S_G^W(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{s(s+2)}{s^2+2s+10K_c}.$$

Osserviamo ancora che S_G^W è propria e stabile per ogni $K_c > 0$. Dal noto teorema sulla risposta a regime dei sitemi BIBO stabili con ingressi sinusoidali otteniamo che la parte in regime permanente di $y_d^2(t)$ è

$$y_{drp}^2(t) = 2|S_G^W(j)|cos(t + \mathrm{Arg}S_G^W(j)).$$

Ne segue che $|y_d^2(\infty)| < 1$ per quei K_c per cui $|S_G^W(j)| < 1/2$. Imponendo $|S_G^W(j)|^2 < 1/4$, si ottiene la disequazione

$$100K_c^2 - 20K_c - 15 > 0.$$

I K_c positivi per cui è verificata sono quelli che soddisfano $K_c > 1/2$.