FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2003-2004)

2^o compitino e primo appello sessione estiva - 23 giugno 2004

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Corso di laurea: ______________________________ Docente: __________

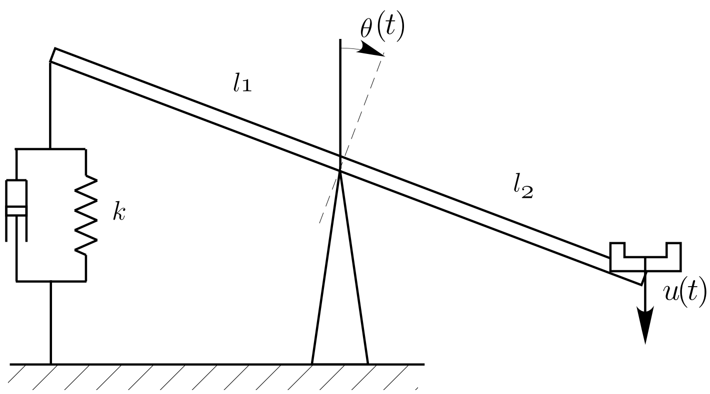
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 2,3,4) tempo: 2 e 1/4 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4) tempo: 3 ore

Tema A

Esercizio 1A. Data una bilancia, cioé il seguente sistema meccanico



dove le lunghezze dei bracci sono $l_1 = 2, l_2 = 1$, il momento d'inerzia vale $J = 1$, la costante elastica della molla é $k = 25$ ed il coefficiente di attrito viscoso b é un parametro (non ne é assegnato un valore preciso). Sia $u(t)$ la forza verticale (peso dell'oggetto) applicata al piatto di destra della bilancia, e $\theta(t)$ l'angolo indicato dalla bilancia. Si assuma infine la molla in posizione di riposo quando $u = 0$ e $\theta = 0$. É richiesto di:

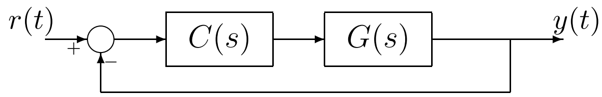
1. Scrivere un modello differenziale che esprima il legame tra $u(t)$ e $\theta(t)$;

2. Dopo aver linearizzato il sistema, calcolare la funzione di trasferimento tra u e θ, e determinare, in particolare, il valore di θ a regime corrispondente ad un ingresso a gradino;

3. Determinare il minimo valore di b, sia b^*, tale per cui la bilancia non presenta oscillazioni in corrispondenza ad un ingresso a gradino;

4. Scrivere un modello di stato per il sistema (con b parametro).

Esercizio 2A. Si consideri lo schema in figura



e si supponga che $C(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)(1+\frac{s}{10})} .$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$;
2. Studiare (tramite il criterio di Nyquist) la stabilitá del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K;
3. Individuare, nelle varie situazioni di instabilitá che si possono manifestare, quanti poli a parte reale strettamente positiva viene a possedere il sistema in catena chiusa.

Esercizio 3A. Si consideri lo schema della figura precedente dove $C(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{(s^2+5)}{s(s^2-a^2)}$$

dove $a > 0$.

1. Si determini il valore di a, sapendo che 1 é punto doppio del luogo delle radici per $K > 0$;
2. Si disegni il luogo delle radici per $K > 0$, e si deduca per quali valori di K l'anello chiuso é stabile (se non siete riusciti a calcolare a nel punto precedente, prendete $a = 3$).

Esercizio 4A. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{s+10}{s(s+1)^2}$$

1. Si determini la struttura di un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

$$a)\ \omega_a \tilde{=} 10, \quad b)\ PM \geq 15^o, \quad c)\ |e_{rp}| \leq 0.1$$

   dove e_{rp} é l'errore a regime permanente alla rampa unitaria;
2. **(Facoltativo)** Si progetti, almeno approssimativamente, il compensatore di cui al punto precedente.

FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2003-2004)

2° compitino e primo appello sessione estiva - 23 giugno 2004

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Corso di laurea: ______________________________ Docente: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili.

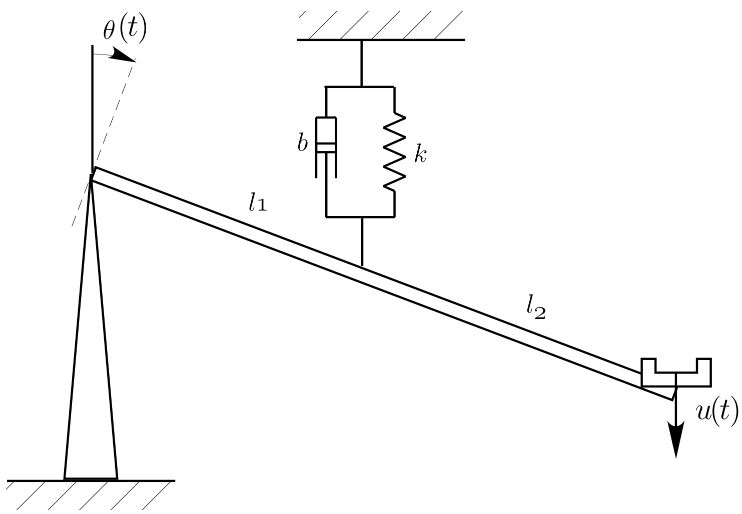
Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

Secondo compitino (Esercizi 2,3,4) tempo: 2 e 1/4 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4) tempo: 3 ore

Tema B

Esercizio 1B. Data una bilancia, cioé il seguente sistema meccanico



dove le lunghezze dei bracci (dal perno alla molla e dalla molla al piatto della bilancia, rispettivamente) sono $l_1 = 1, l_2 = 2$, il momento d'inerzia vale $J = 1$, la costante elastica della molla é $k = 25$ ed il coefficiente di attrito viscoso b é un parametro (non ne é assegnato un valore preciso). Sia $u(t)$ la forza verticale (peso dell'oggetto) applicata al piatto di destra della bilancia, e $\theta(t)$ l'angolo indicato dalla bilancia. Si assuma infine la molla in posizione di riposo quando $u = 0$ e $\theta = 0$. É richiesto di:

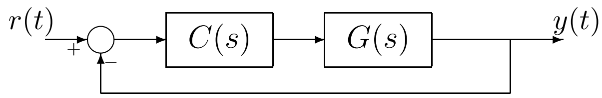
1. Scrivere un modello differenziale che esprima il legame tra $u(t)$ e $\theta(t)$;

2. Dopo aver linearizzato il sistema, calcolare la funzione di trasferimento tra u e θ, e determinare, in particolare, il valore di θ a regime corrispondente ad un ingresso a gradino;

3. Determinare il minimo valore di b, sia b^*, tale per cui la bilancia non presenta oscillazioni in corrispondenza ad un ingresso a gradino;

4. Scrivere un modello di stato per il sistema (con b parametro).

Esercizio 2B. Si consideri lo schema in figura



e si supponga che $C(s) = K$ e sia

$$G(s) = \frac{10s - 1}{(s+1)(10s+1)}$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$;
2. Studiare (tramite il criterio di Nyquist) la stabilitá del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K;
3. Individuare, nelle varie situazioni di instabilitá che si possono manifestare, quanti poli a parte reale strettamente positiva viene a possedere il sistema in catena chiusa.

Esercizio 3B. Si consideri lo schema della figura precedente dove $C(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{(s^2 - 1)}{s(s^2 + a^2)}$$

dove $a > 0$.

1. Si determini il valore di a, sapendo che -2 é punto doppio del luogo delle radici per $K > 0$;
2. Si disegni il luogo delle radici per $K > 0$, e si deduca per quali valori di K l'anello chiuso é stabile (se non siete riusciti a calcolare a nel punto precedente, prendete $a = 2$).

Esercizio 4A. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$\frac{s+1}{s(s+1/10)^2}$$

1. Si determini la struttura di un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

$$a)\ \omega_a \tilde{=} 1, \quad b)\ PM \geq 15^o, \quad c)\ |e_{rp}| \leq 0.1$$

   dove e_{rp} é l'errore a regime permanente alla rampa unitaria;
2. **(Facoltativo)** Si progetti, almeno approssimativamente, il compensatore di cui al punto precedente.

ES 1 A

1) $J\ddot{\theta} = -k(l_1 \sin\theta) l_1 \cos\theta - b\left(\frac{d}{dt} l_1 \sin\theta\right) l_1 \cos\theta + l_2 u \cos\theta$

$J\ddot{\theta} = -k\, l_1^2 \sin\theta\cos\theta - b\, l_1^2 (\cos\theta)^2 \dot{\theta} + l_2 \cos\theta\, u$

2) Linearizzo $\sin\theta \simeq \theta$ $\cos\theta \simeq 1$

$J\ddot{\theta} = -k l_1^2 \theta - b l_1^2 \dot{\theta} + l_2 u$

Sostituiamo $J=1$ $l_1=2$ $l_2=1$ $k=25$

$\ddot{\theta} + 4b\dot{\theta} + 100\theta = u$ $W(s) = \frac{1}{s^2+4bs+100}$ $W(0) = \frac{1}{100}$

θ regime $= \frac{1}{100}$ ampiezza gradino

3) Non ci sono oscillazioni $\Leftrightarrow$ radici del denominatore sono reali

$\Leftrightarrow$ $4b^2 - 100 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $b \geq 5$ $\Rightarrow$ $b^* = 5$

4) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -4b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ ponendo $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

$\theta = [1 \;\; 0]\, x$

ANALOGAMENTE AL PRECEDENTE

ES 1 B

1) $J\ddot{\theta} = -k l_1^2 \sin\theta\cos\theta - \left(b \frac{d}{dt} l_1 \sin\theta\right) l_1 \cos\theta + (l_1 + l_2) u \cos\theta$

2) $J\ddot{\theta} = -k l_1^2 \theta - b l_1^2 \dot{\theta} + (l_1 + l_2) u$ $\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + 25\theta = 3u$

$W(s) = \frac{3}{s^2 + bs + 25}$ $W(0) = \frac{3}{25}$

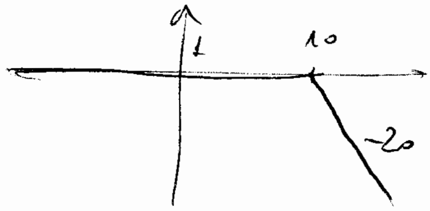
3) Non ci sono oscillazioni $\Leftrightarrow$ $b^2 - 100 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $b \geq 10$ $\Rightarrow b^* = 10$

4) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$ $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

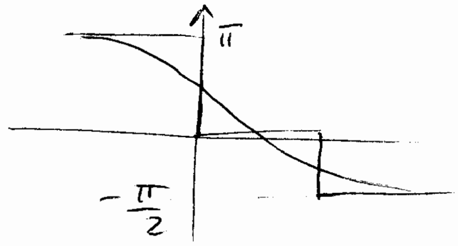
$\theta = [1 \;\; 0]\, x$

Forma di Bode

ES 2A $G(s) = (-1)\dfrac{1-s}{(1+s)(1+\frac{s}{10})}$

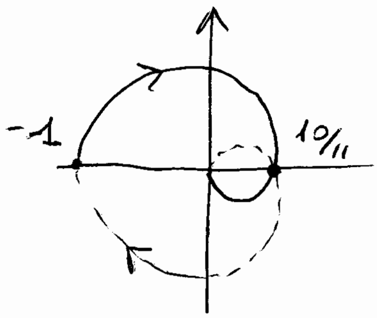


$$\mathrm{Re}\, G(j\omega) = \frac{-1 + \frac{6}{5}\omega^2}{(1+\omega^2)(1+\frac{\omega^2}{100})}$$



$$\mathrm{Im}\, G(j\omega) = \frac{\frac{\omega}{10}(21-\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+\frac{\omega^2}{100})}$$

$\mathrm{Im} = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{21} \Rightarrow \mathrm{Re} = \frac{10}{11}$



Criterio Nyquist $Z = P - N$ $(P=0)$

$-\frac{1}{k} < -1$ $(0<k<1)$ $N=0 \Rightarrow Z=0$ stabile

$-1 < -\frac{1}{k} < 0$ $(k>1)$ $N = -1 \Rightarrow Z=1$ 1 instabile

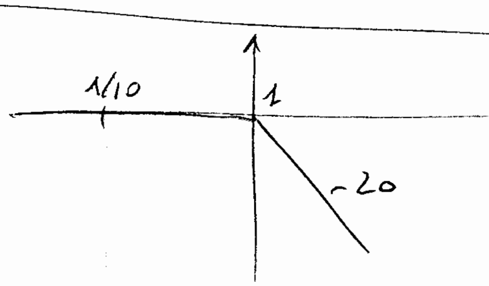
$0 < -\frac{1}{k} < \frac{10}{11}$ $(k < -\frac{11}{10})$ $N=-2 \Rightarrow Z=2$ 2 instabili

$-1/k > \frac{10}{11}$ $(-\frac{11}{10} < k < 0)$ $N=0 \Rightarrow Z=0$ stabile

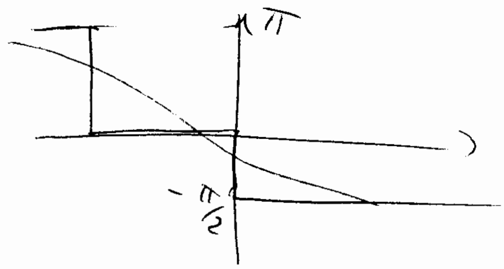
---

Forma di Bode

ES 2B $G(s) = (-1)\dfrac{1-10s}{(1+s)(1+10s)}$



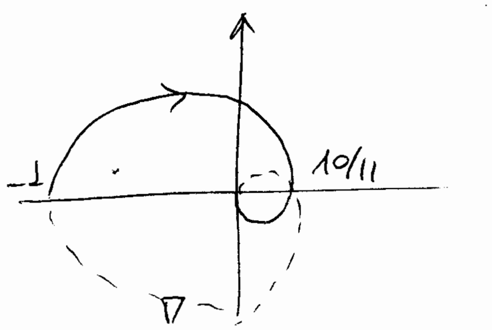
$$\mathrm{Re}(G(j\omega)) = \frac{120\omega^2 - 1}{(1+\omega^2)(1+100\omega^2)}$$



$$\mathrm{Im}(G(j\omega)) = \frac{\omega[21-100\omega^2]}{(1+\omega^2)(1+100\omega^2)}$$

$\mathrm{Im} = 0$ $\omega = \frac{\sqrt{21}}{10}$ $\mathrm{Re} = \frac{10}{11}$

Applicazione del Criterio di Nyquist è identico al precedente



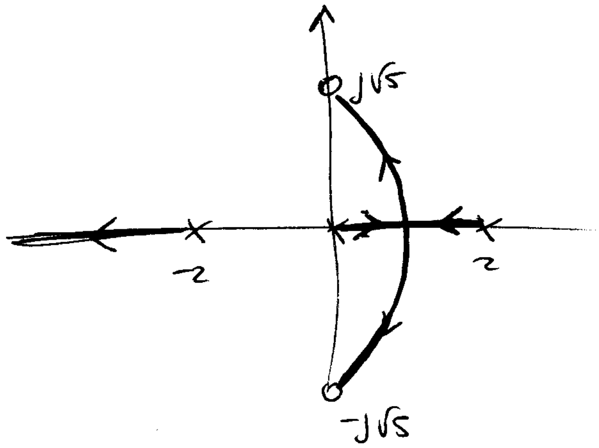
ES 3A Equazione dei punti doppi

$$\begin{cases} s(s^2-a^2)+k(s^2+5)=0 \\ 3s^2-a^2+2ks=0 \end{cases}$$

$s=1$ è punto doppio quindi deve ~~...~~ essere soluzione del sistema con k corrispondente >0. Sostituiamo $s=1$ nell'equazione

$$\begin{cases} 1(1-a^2)+k(1+5)=0 \\ 3\cdot 1-a^2+2k\cdot 1=0 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{a^2-3}{2} \Rightarrow 1-a^2+3a^2-9=0 \Rightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a=2$$

Si vede dal luogo che ci sono sempre 2 poli instabili



Routh s^3+ks^2-4s+5

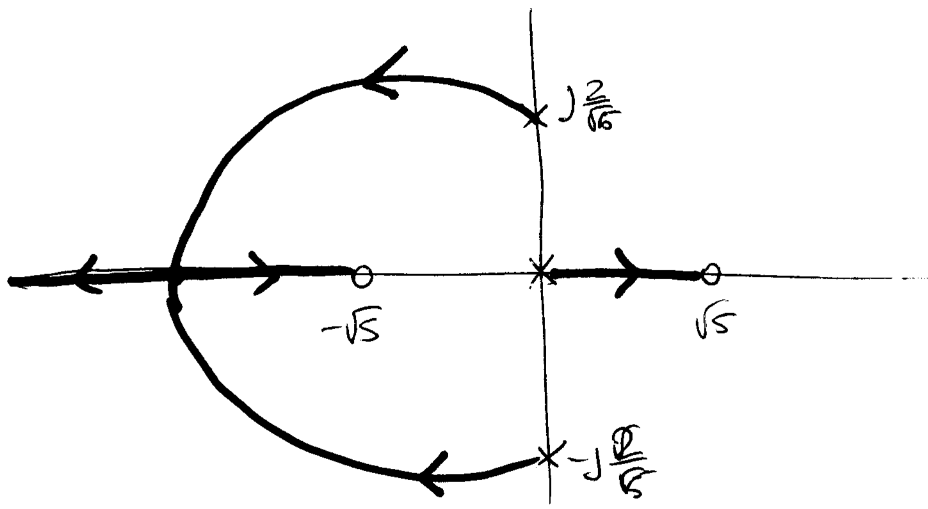
Per certo ha coeff. sia positivi che negativi $\Rightarrow$ instabile

ES 3B

$$\begin{cases} s(s^2+a^2)+k(s^2-1)=0 \\ 3s^2+a^2+2ks=0 \end{cases} \qquad s=-2 \begin{cases} -2(4+a^2)+k(4-1)=0 \\ 3\cdot 4+a^2+2k\cdot(-2)=0 \end{cases}$$

$$k=3+\frac{a^2}{4} \Rightarrow -8-2a^2+3\left(3+\frac{a^2}{4}\right)=0 \Rightarrow 1=\frac{5}{4}a^2 \Rightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Si vede dal luogo che c'è sempre almeno un polo instabile



ES 4A)

$G(s) = 10 \frac{1+s/10}{s(1+s)^2}$

$k_c = 1 \quad h_c = 0$

$\hat{W}(s) = G(s)$

$|\hat{W}(10j)|^2 = 100 \frac{2}{100(101)^2} \simeq \frac{2}{10.000}$

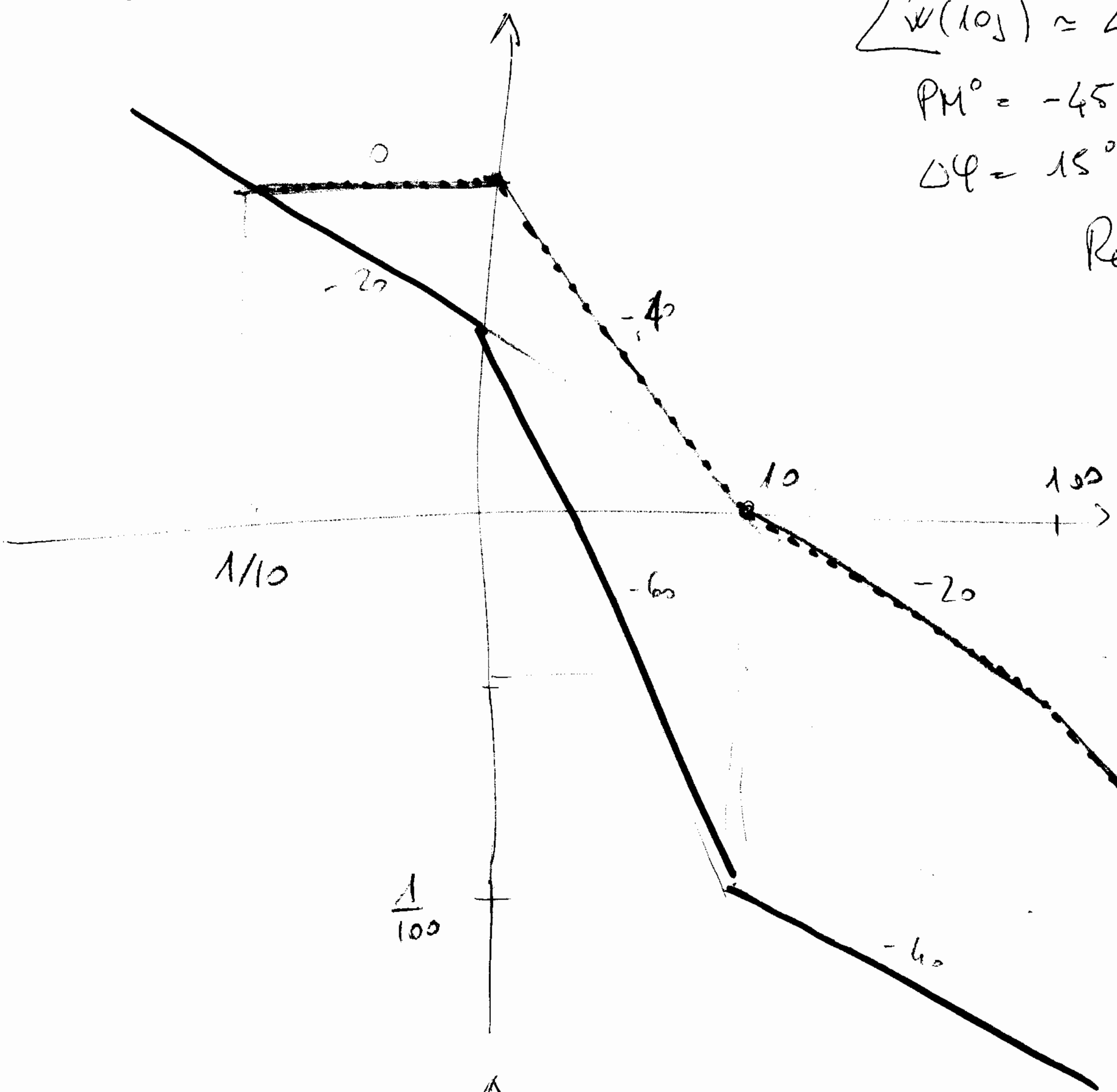
$C = \frac{1}{|\hat{W}(10j)|} = \frac{100}{\sqrt{2}} > 1$

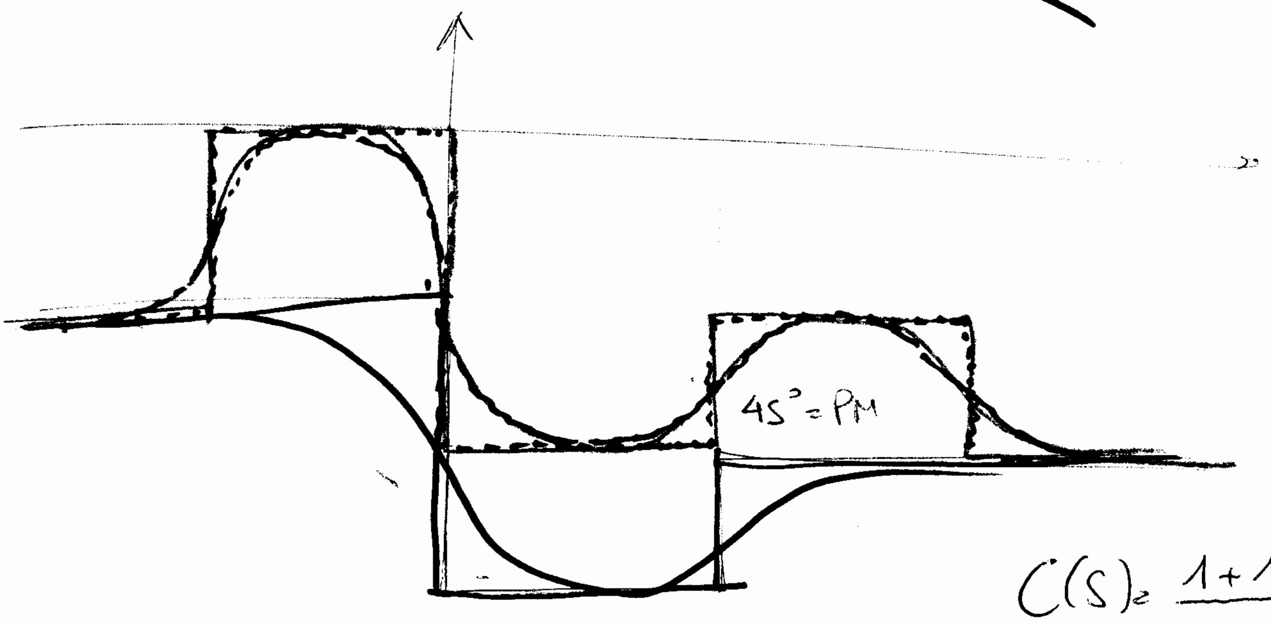
$\angle \hat{W}(10j) \simeq 45-90-180$

$PM° = -45$

$\Delta\varphi = 15° > 0$

Rete anticipatrice





$C(s) = \frac{1+10s}{1+0.01s}$

ES 48

$G(s) = 100 \frac{1+s}{s(1+10s)^2}$

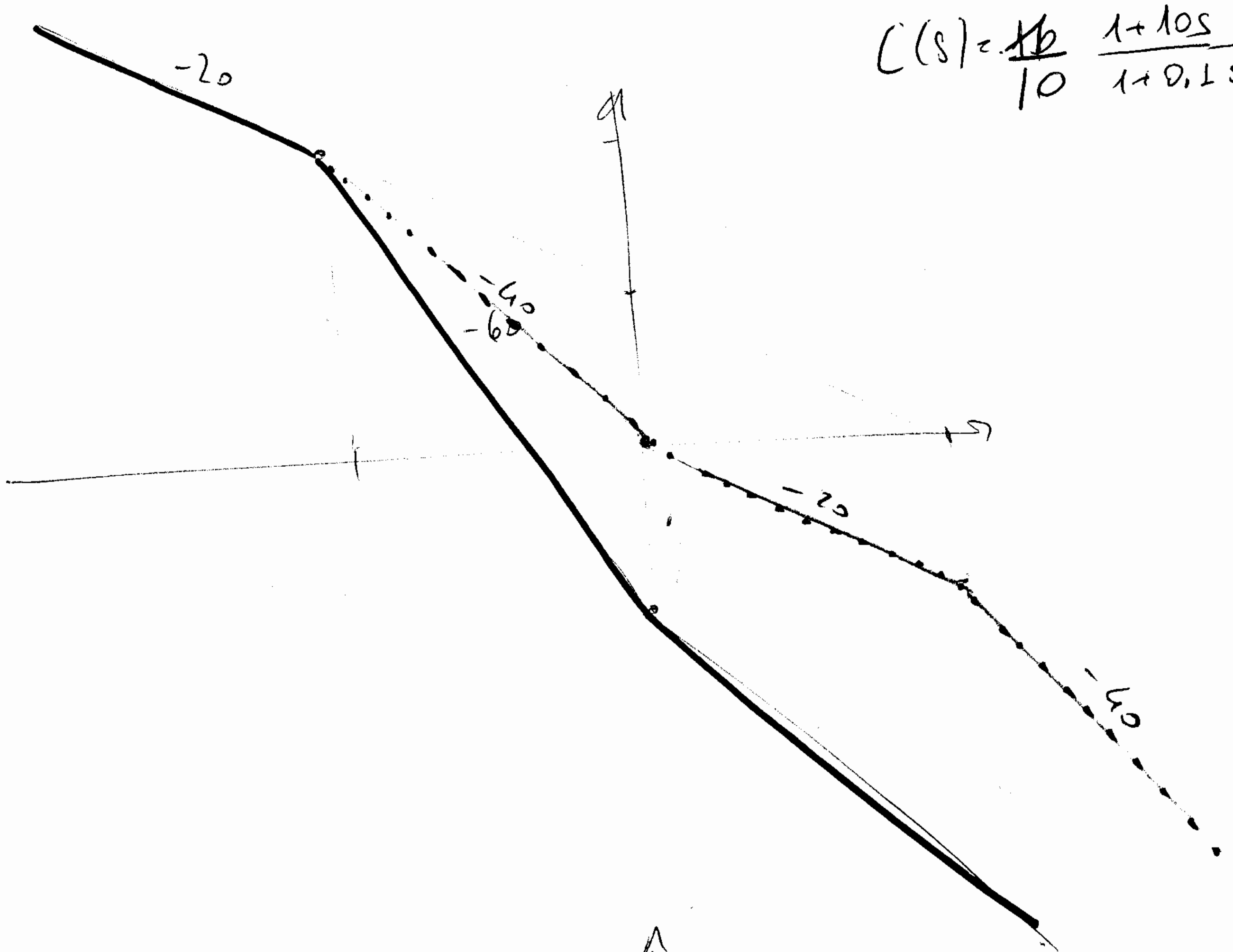
$\boxed{h_c = 0 \quad K_c = 0.1}$

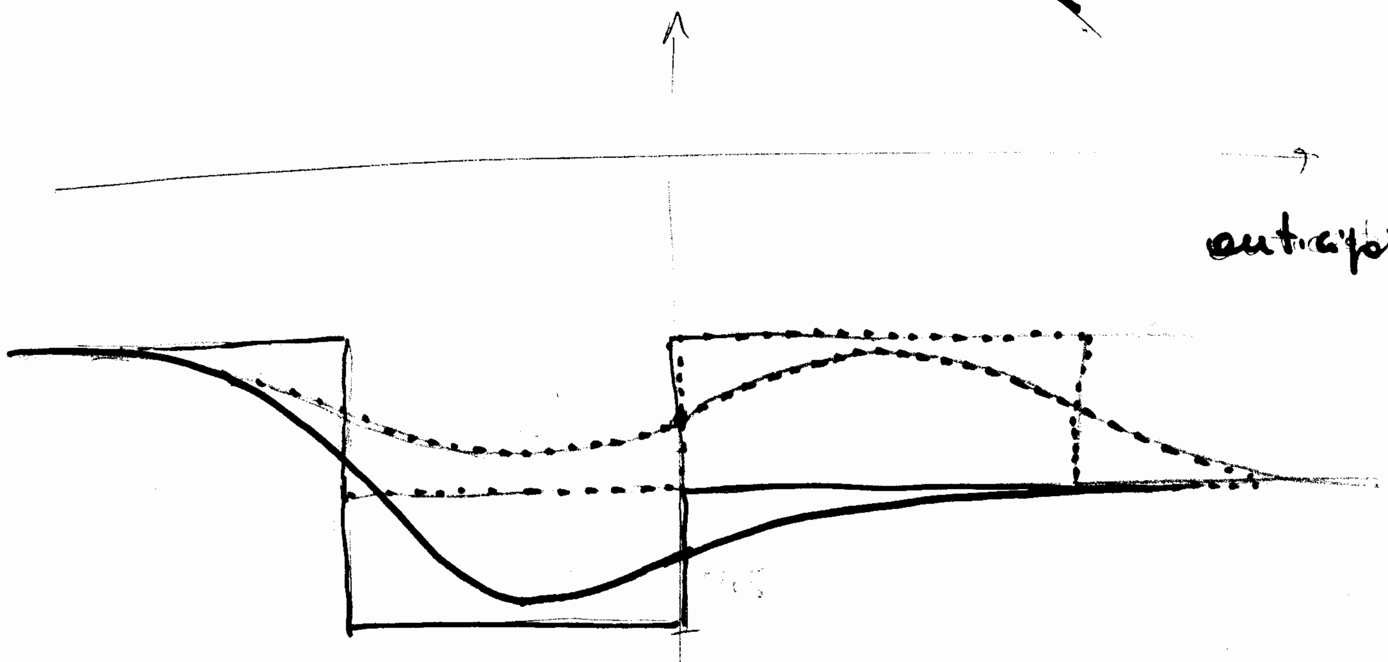
$\hat{G}(s) = 10 \frac{1+s}{s(1+10s)^2}$

$|\hat{G}(j)|^2 = 100 \frac{2}{(101)^2} \simeq \frac{1}{50}$ $\boxed{C=50}$

$\angle \hat{G}(j) = 45 - 90 - 180 = -225$ $\boxed{\Delta\varphi = 60}$

$C(s) = \frac{\cancel{16}}{10} \frac{1+10s}{1+0.1s}$





antisimmetria