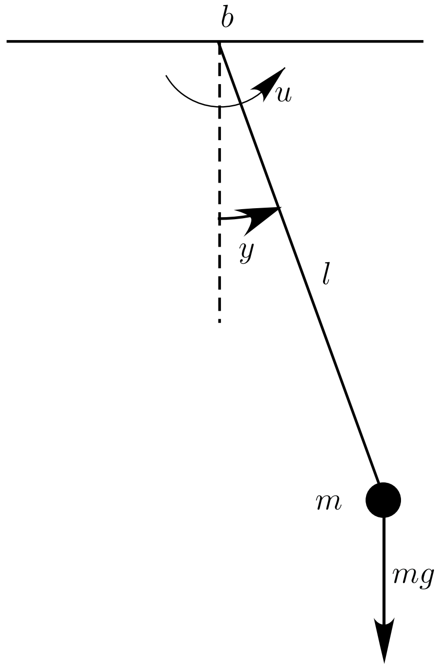
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 4/11/2005

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. (6pt) Si consideri il seguente sistema meccanico.

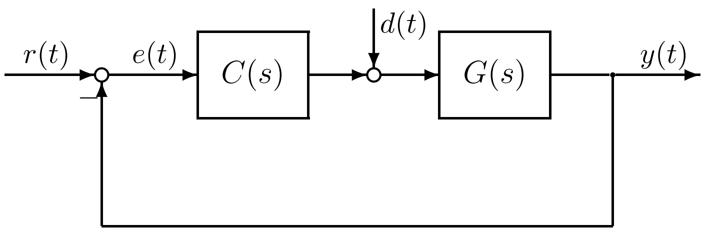


Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incenierato in un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale b. Sia y la posizione angolare, m la massa dell'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'.

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo e la funzione di trasferimento tra l'ingrasso u e l'uscita y sapendo che entrambi i segnali sono sufficentemente piccoli. Determinare per quali valori dei parametri non ci sono modi oscillatori nella risposta impulsiva del sistema.

2. Supponiamo ora di voler tenere bloccato il pendolo su una posizione angolare fissa $y(t) = \bar{y}$. Quale coppia $u(t) = \bar{u}$ deve essere applicata? Se ora applichiamo un ingresso $u(t)$ tale che $\delta u(t) := u(t) - \bar{u}$ e' piccolo al quale corrisponde una uscita $y(t)$ tale che $\delta y(t) := y(t) - \bar{y}$ e' piccolo, determinare la funzione di trasferimento tra $\delta u(t)$ e $\delta y(t)$. Per quali valori di $\bar{y}$ questa funzione di trasferimento e' BIBO stabile?.

Esercizio 2.(8pt) Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

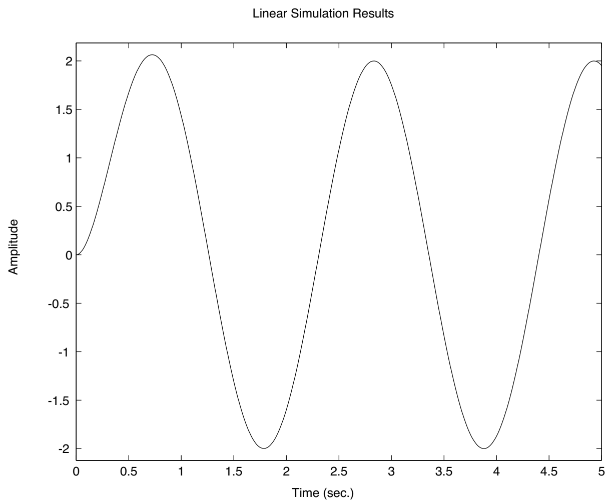


Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s+a}$$

dove $a \geq 0$.

1. Determinare a sapendo che se $d(t) = 10sin(3t)$ e $K = 0$ (catena aperta) si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



Supponiamo ora che a sia dato dal valore calcolato al punto precedente (altrimenti porre $a = 1$).

2. Determinare i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

3. Determinare la funzioni di trasferimento $T(s)$ dagli ingressi r all'uscita y e la funzione sensibilita' di T rispetto alle variazioni del parametro a. Determinare i valori di K tali che a una variazione $\Delta a/a = 10\%$ corrisponda una variazione del quandagno in continua minore o uguale a 1%.

4. Determinare i valori di K per i quali nel sistema in catena chiusa il segnale di disturbo $d(t) = sin(t)$ risulta attenuato in uscita di almeno 5 volte .

5. Determinare i valori di K per i quali il sistema in catena chiusa ha risposta al gradino con sovraelongazione $S \leq 4.3\%$ ($S = e^{-\pi/\tan\theta}$).

Esercizio 3.(8pt) Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura precedente dove

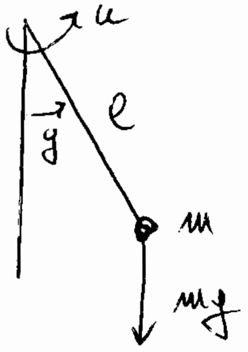
$$C(s) = \frac{K}{s}, \qquad G(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino gli asintoti, i punti doppi e le intersezioni con l'asse immaginario.

2. Determinare i valori di $K > 0$ tali che il sistema in catena chiusa ha solo modi esponenziali non oscillatori.

3. Determinare i valori di K tali che il sistema in catena chiusa contiene modi puramente oscillatori (ne' convergenti, ne' divergenti). Determinare gli eventuali altri modi del sistema.

$\boxed{\text{Es 1}}$



1) Equazioni del moto

$$-ml^2\ddot{y} - b\dot{y} - mgl\sin y + u = 0$$

Linearizzazione $y \approx 0$ $u \approx 0$ $\Rightarrow \sin y \approx y$

$$-ml^2\ddot{y} - b\dot{y} - mgl\,y + u = 0 \qquad Y(s) = \mathcal{L}[y] \quad U(s) = \mathcal{L}[u]$$

$$(ml^2 s^2 + bs + mgl)Y = U$$

$$W(s) = \frac{1}{ml^2 s^2 + bs + mgl}$$

ottengo modi non oscillatori $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4m^2l^3g \geq 0$

$\Leftrightarrow b \geq 2\sqrt{m^2l^3g}$

2) $y(t) = \bar{y}$ $\quad \dot{y}(t) = 0 \quad \ddot{y}(t) = 0$ dalla equazione del moto
$u(t) = \bar{u}$ $\quad \Rightarrow mgl\sin\bar{y} = \bar{u}$

Bisogna applicare una coppia $\boxed{\bar{u} = mgl\sin\bar{y}}$

$y(t) = \bar{y} + \delta y$
$u(t) = \bar{u} + \delta u$ sostituisco nelle equazioni del moto
$\dot{y} = \delta\dot{y} \quad \ddot{y} = \delta\ddot{y}$

$$ml^2\delta\ddot{y} + b\delta\dot{y} + mgl\sin(\bar{y} + \delta y) = \bar{u} + \delta u$$

se δy è piccolo allora $\sin(\bar{y} + \delta y) \approx \overbrace{\sin\bar{y} + (\cos\bar{y})\delta y}^{\text{espansione di Taylor}}$

$$ml^2\delta\ddot{y} + b\delta\dot{y} + \cancel{mgl\sin\bar{y}} + mgl(\cos\bar{y})\delta y = \cancel{\bar{u}} + \delta u$$

$Y(s) = \mathcal{L}[\delta y]$ $\quad U(s) = \mathcal{L}[\delta u]$

$$[ml^2 s^2 + bs + mgl\cos\bar{y}]Y(s) = U(s)$$

$$W(s) = \frac{1}{ml^2 s^2 + bs + mgl\cos\bar{y}}$$

che è BIBO per regola di Cartesio se e solo se $\cos\bar{y} > 0$

$-\frac{\pi}{2} < \bar{y} < \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{Es 2}}$

1) Dalla figura si deduce che asintoticamente (a regime) $y(t)$ è un segnale sinusoidale di ampiezza $= 2$.
Quindi deve essere

$$10\,|G(j3)| = 2 \qquad |G(j3)| = \frac{1}{5}$$

infatti passo da ampiezza 10 ad ampiezza 2 e quindi ho una attenuazione di $1/5$

$$|G(j3)| = \frac{1}{|j3+a|^2} = \frac{1}{\sqrt{9+a^2}} = \frac{1}{5} \quad . \quad 9+a^2 = 25 \quad a = 4$$

2) $T_{ry}(s) = \dfrac{K}{s(s+4)+K}$ BIBO $\iff \boxed{K \geq 0}$ per regola di Cartesio

3) $T(s) = \dfrac{k}{s(s+a)+k}$

$$S_a^T(s) = \frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a} = a\,\frac{s(s+a)+k}{k}\;\frac{-ks}{(s(s+a)+k)^2} = \frac{-as}{s(s+a)+k}$$

Si noti che $S_a^T(0) = 0$ e quindi il guadagno in continua è insensibile alla variazione di a.
Ciò è confermato dal fatto che $T(0) = 1$ non è dipendente da a. La risposta è quindi $\boxed{\forall k > 0}$

4) $T_{dy}(s) = \dfrac{s}{s(s+4)+k}$

$$|T_{dy}(j)| \leq 1/5 \iff |T_{dy}(j)|^2 \leq \frac{1}{25} \iff \frac{1}{|k-1+4j|^2} \leq \frac{1}{25}$$

$$(k-1)^2 + 16 \leq 25 \iff (k-1)^2 \leq 9 \iff K \leq -2 \text{ o } \boxed{K \geq 4}$$

No perché $k \leq 0$ è instabile

5) $S \leq 0.043 \iff tg\,\theta \leq 1 \qquad tg\,\theta = \dfrac{\text{parte immaginaria}}{-\text{parte reale}}$

$s(s+4)+k = 0$

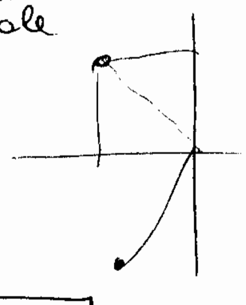
$s^2 + 4s + k = 0$

$s_{12} = -2 \pm \sqrt{4-k}$

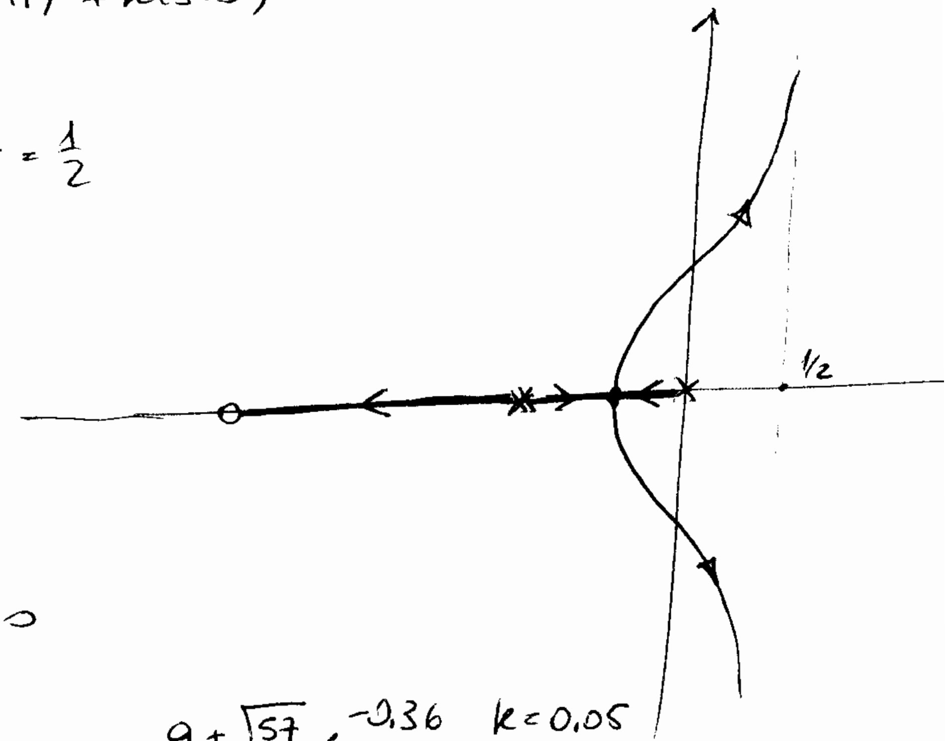
Se $0 < k \leq 4$ le radici reali e quindi non ho sovraelongazione. Per $k > 4$

$s_{12} = -2 \pm j\sqrt{k-4}$

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{k-4}}{2} \leq 1 \iff \boxed{k \leq 8}$$



$\boxed{\text{Es 3}}$ $\quad T(s) = \dfrac{k(s+3)}{s(s+1)^2 + k(s+3)} \Rightarrow \boxed{s(s+1)^2 + k(s+3) = 0}$



1) Asintoti

$$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

Punti doppi

$$\begin{cases} s(s+1)^2 + k(s+3) = 0 \\ (s+1)^2 + s\,2(s+1) + k = 0 \end{cases}$$

$k = -(s+1)[s+1+2s]$

$s(s+1)^{\cancel{2}} - \cancel{(s+1)}(3s+1)(s+3) = 0$

$s^2 + \cancel{s} - 3s^2 - 9s - \cancel{s} - 3 = 0$

$2s^2 + 9s + 3 = 0 \qquad s_{12} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{57}}{4} \begin{cases} -0.36 & k = 0.05 \\ -4.13 \end{cases}$

Intersezione asse immaginario: tabella di Routh $s^3 + 2s^2 + (k+1)s + 3k$

3	1	$k+1$
2	2	$3k$
1	$\frac{2-k}{2}$	
0	$3k$	

Stabilità per $0 < K < 2$

per $k = 2$ riga nulla

$\cancel{2}s^2 + 3\cdot\cancel{2} = 0$ le radici del polinomio originale

$s_{12} = \pm j\sqrt{3}$

2) Modi non oscillatori $0 < K < 0.05$

3) Per $K = 2$ il polinomio ammette radici $\pm j\sqrt{3}$

e quindi ammette modi $\sin\sqrt{3}\,t$

Per ottenere l'altro modo deve determinare la rimanente radice attraverso la divisione di $s(s+1)^2 + 2(s+3)$ per s^2+3

$$\begin{array}{l|l} s^3 + 2s^2 + 3s + 6 & s^2+3 \\ \cline{2-2} s^3 \qquad\quad + 3s & s+2 \\ \hline 0 \quad 2s^2 \qquad + 6 & \\ \quad\;\; 2s^2 \qquad + 6 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

l'altro modo è e^{-2t}