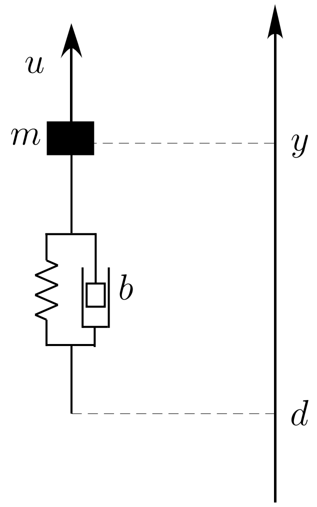
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 8/11/2007

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Si tratta di una sospenzione che consiste in una massa m collegata alla ruota (di massa trascurabile) attraverso uno smorzatore con costante di attrito b e una molla con costante elastica k. Si supponga che la molla abbia lunghezza a riposo L, cioe' che la forza elastica applicata alla massa sia

$$F_y = -k(y - d - L)$$

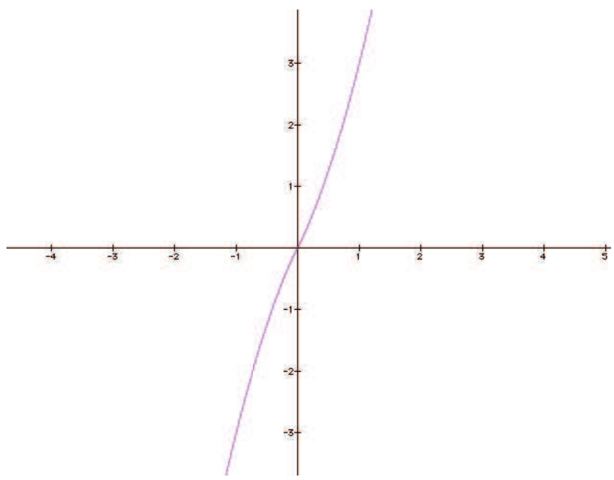
Sulla massa agisce una forza di controllo u mentre la posizione della ruota d e' da cosiderarsi un disturbo. Sulla massa agisce anche la forza di gravita' mg dove g e' l'accelerazione di gravita'.

1. Determinare le equazioni del moto del sistema meccanico. Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ sapendo che $u(t) = 0$ e $d(t) = 0$. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$.

2. Supponiamo ora che la forza elastica applicata alla massa sia una funzione non lineare delle posizioni, cioe'

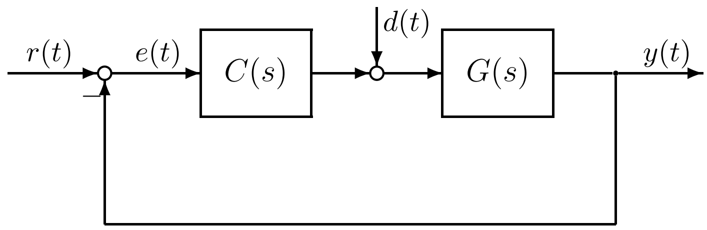
$$F_y = -k\ g(y - d - L)$$

dove $g(x) = x(2 + |x|)$ (si noti che e' una fuzione dispari). Il grafico di questa funzione e' mostrato nella seguente figura.



Determinare l'evoluzione di equilibrio $y(t) = \bar{y}$ sapendo che $u(t) = 0$ e $d(t) = 0$. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y}$ sotto l'ipotesi che $u(t)$ e $\tilde{y}(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

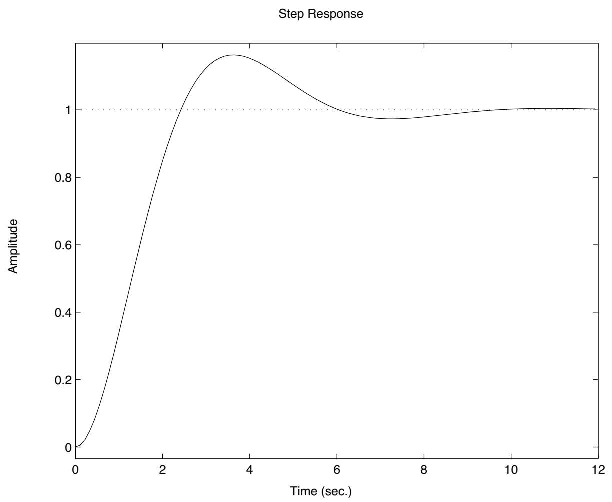


Si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 + s + a}$$

dove $a \geq 0$.

1. Determinare i valori di K e a che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
2. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$. Determinare la funzione sensibilita' di $T(s)$ rispetto al parametro a.
3. Determinare a sapendo che, prendendo $K = 0$ e applicando un disturbo $d(t)$ a gradino unitario si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



4. Determinare l'errore $e(t)$ a regime in funzione di K sapendo che $r(t) = 2t$ e $d(t) = sin(t)$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = \frac{K}{s + a} \qquad G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2}.$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che -1 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, angoli di uscita, intersezione asse immaginario).

$\boxed{\text{ES 1}}$

1) Equazioni del moto

$$-m\ddot{y} - b(\dot{y} - \dot{d}) - k(y - d - L) - mg + u = 0$$

Se $u(t) = 0$, $d(t) = 0$ e $y(t) = \bar{y}$ costante allora $\dot{y} = \ddot{y} = 0$, $\dot{d} = 0$

e quindi l'equazione diventa

$$-k(\bar{y} - L) - mg = 0 \qquad \bar{y} = L - \frac{mg}{k}$$

Sia $\tilde{y}(t) = y(t) - \bar{y}$ da cui $\dot{\tilde{y}} = \dot{y}$ e $\ddot{\tilde{y}} = \ddot{y}$. Sostituendo nelle equazioni del moto si ottiene

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}} - \dot{d}) - k(\tilde{y} + \cancel{\bar{y}} - d - \cancel{L}) - \cancel{mg} + u = 0$$

Passando alle trasformate di Laplace si ottiene

$$(ms^2 + bs + k)\tilde{Y}(s) = (bs + k)D(s) + U(s)$$

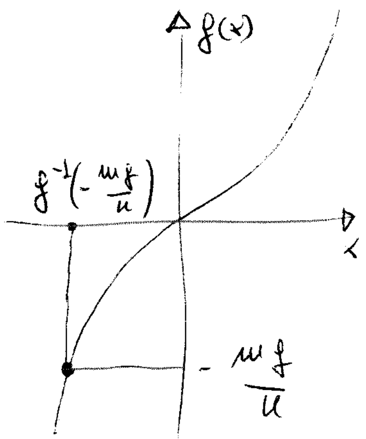
La funzione di trasferimento è $\tilde{Y}(s)/U(s) = \dfrac{1}{ms^2 + bs + k}$

2) Equazioni del moto

$$-m\ddot{y} - b(\dot{y} - \dot{d}) - kg(y - d - L) - mg + u = 0$$

Sapendo che $u = d = 0$ e che $\dot{d} = \dot{y} = \ddot{y} = 0$ e $y(t) = \bar{y}$ si ottiene

$$-kg(\bar{y} - L) - mg = 0 \Rightarrow \bar{y} = L + g^{-1}\left(-\frac{mg}{k}\right)$$



Siccome $-\frac{mg}{k}$ è negativo, mi interessa invertire la funzione $g(x)$ per $x < 0$

$g(x) = x(2 - x)$ se $x < 0$

Dobbiamo risolvere quindi l'equazione $g(x) = -\frac{mg}{k}$ che corrisponde

$$x(2 - x) = -\frac{mg}{k}$$

$$x^2 - 2x - \frac{mg}{k} = 0 \qquad x_{12} = 1 \pm \sqrt{1 + mg/k}$$

Mi interessa solo la soluzione < 0

quindi $\quad x = 1 - \sqrt{1 + mg/k}$ $\quad$ da cui si ottiene

$$\bar{y} = L + 1 - \sqrt{1 + mg/k}$$

infine se $\tilde{y}$ e d sono piccoli, allora

$$f(y-d-L) = f(\tilde{y} + \bar{y} - d - L) \simeq f(\bar{y}-L) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{y}-L} (\tilde{y}-d)$$

Si noti che $\quad f(\bar{y}-L) = -\dfrac{mg}{k}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{y}-L} = 2 - 2x\Big|_{x=\bar{y}-L} = 2(1-\bar{y}+L) = 2\sqrt{1+mg/k}$$

Sostituendo nelle equazioni del moto si ottiene

$$-m\ddot{\tilde{y}} - b(\dot{\tilde{y}} - \dot{d}) - k\left[-\cancel{\frac{mg}{k}} + 2\sqrt{1+\frac{mg}{k}}\,(\tilde{y}-d)\right] - \cancel{mg} + u = 0$$

Con calcoli analoghi ai precedenti, passando per le trasformate di Laplace, si ottiene

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + 2k\sqrt{1 - \frac{mg}{k}}}$$

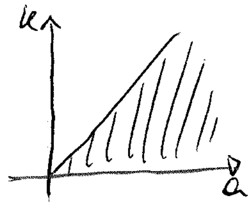
$\boxed{\text{ES 2}}$

1) $T_{ry}(s) = \dfrac{CG}{1+CG} = \dfrac{k}{s(s^2+s+a)+k} = \dfrac{k}{s^3+s^2+as+k}$

tabella di Routh

3	1	a
2	1	k
1	$a-k$	
0	k	

Stabilità per $0<K<a$



2) $T(s) = \dfrac{k}{s^3+s^2+as+k}$

$$S_a^T(s) = \frac{a}{T}\frac{\partial T}{\partial a} = a\,\frac{s^3+\cancel{s^2+as+k}}{\cancel{k}}\;\frac{-\cancel{k}s}{(s^3+s^2+as+k)^2} = \frac{-as}{s^3+s^2+as+k}$$

3) Per $k=0$ la funzione di trasferimento tra d e y è

$G(s) = \dfrac{1}{s^2+s+a}$ Dalla figura si osserva che il guadagno a regime deve essere 1 e quindi $G(0)=1$ da cui segue che $a=1$

4) Il calcolo degli andamenti a regime hanno senso solo per i valori di k che rendono BIBO stabile il sistema e quindi per $0<k<1$. Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

i) $r(t)=2t$, $d(t)=0$ $\quad T_{re}(s) = \dfrac{1}{1+CG} = \dfrac{s(s^2+s+1)}{s(s^2+s+1)+k}$

$R(s) = \dfrac{1}{s^2}$ $\quad E(s) = T_{re}(s)\dfrac{1}{s^2} = \dfrac{s^2+s+1}{s(s^2+s+1)+k}\,\dfrac{1}{s}$

$E(s)$ ha un polo nell'origine e gli altri poli stabili. Quindi

$e(t) \simeq E(s)s\big|_{s=0} = \dfrac{1}{k}$

(ii) $r(t)=0$ $d(t)=\sin(t)$ $\quad e(t) \simeq |T_{de}(j)|\sin(t+\angle T_{de}(j))$

$T_{de}(s) = \dfrac{-s}{s(s^2+s+1)+k}$ $\quad T_{de}(j) = \dfrac{-j}{k-1} = \dfrac{j}{1-k}$ $\quad |T_{de}(j)| = \dfrac{1}{1-k}$ $\quad \angle T_{de}(j) = \dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{ES 3}}$

Dobbiamo studiare il luogo di

$$s^2(s+a)+k(s^2+1)=0$$

1) Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+a)+k(s^2+1)=0 \\ 2s(s+a)+s^2+2ks=0 \end{cases}$$

Sappiamo che $s=-1$ è punto doppio e quindi risolve il sistema

$$\begin{cases} a-1+2k=0 \\ -2(a-1)+1-2k=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-\cancel{1}-2a+2+\cancel{1}=0 \\ k=-\frac{a-1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2 \\ k=-1/2 \end{cases}$$

2) C'è un solo asintoto e quindi non è necessario calcolarlo

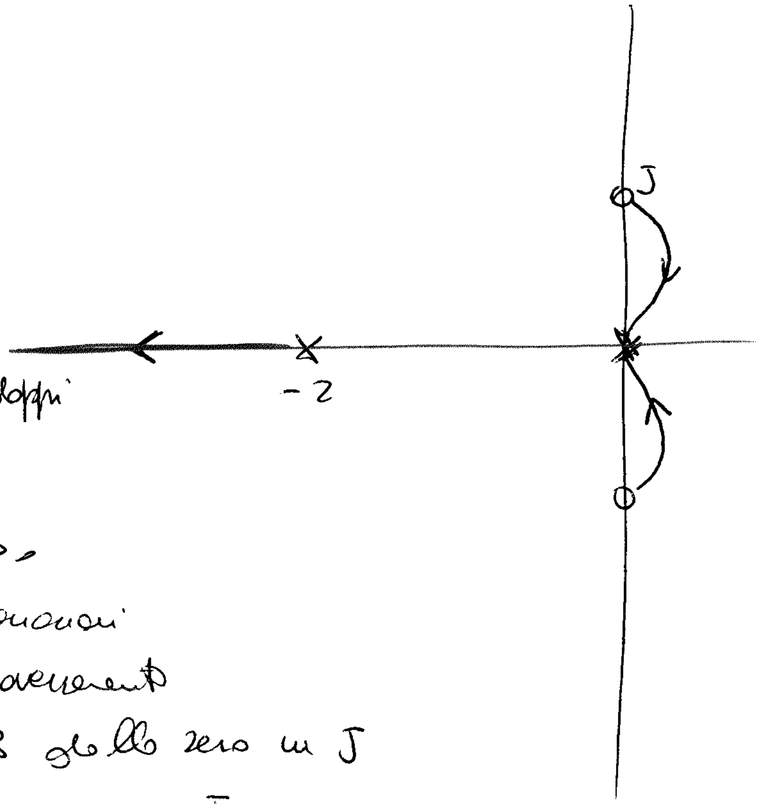
Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+2)+k(s^2+1)=0 \\ \cancel{s}(3s+4)+2k\cancel{s}=0 \end{cases} \qquad k=-\frac{3s+4}{2} \qquad s^3+2s^2-\frac{3s+4}{2}(s^2+1)=0$$

$$2s^3+\cancel{4s^2}-3s^3-\cancel{4s^2}-3s-4=0$$

$s^3+3s+4=0$ Sappiamo che una soluzione è $s=-1$ quindi $s+1$ divide il polinomio

$$\begin{array}{l|l} s^3+0+3s+4 & s+1 \\ \hline s^3+s^2 & s^2-s+4 \\ \hline -s^2+3s+4 & \\ -s^2-s & \\ \hline 4s+4 & \end{array}$$



radici s^2-s+4 sono complesse e quindi non ci sono altri punti doppi

Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 0 \\ 2 & k+2 & k \\ 1 & \frac{-k}{k+2} & \\ 0 & k & \end{array}$$

Si vede che per $k>0$ si ha sempre 2 variazioni e quindi nessun attraversamento

Angoli uscita β dallo zero in j

$$\sum \angle s-z_i - \sum \angle s-p_i = \pi \qquad s \simeq j$$

$$\beta+\angle j-(-j)-\left[\angle j-0+\angle j-0+\angle j-(-2)\right]=\pi \Rightarrow \begin{array}{l} \beta+\cancel{\pi/2}-\cancel{\pi/2}-\pi/2-\angle 2+j=\pi \\ \beta=\frac{3}{2}\pi+\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \end{array}$$