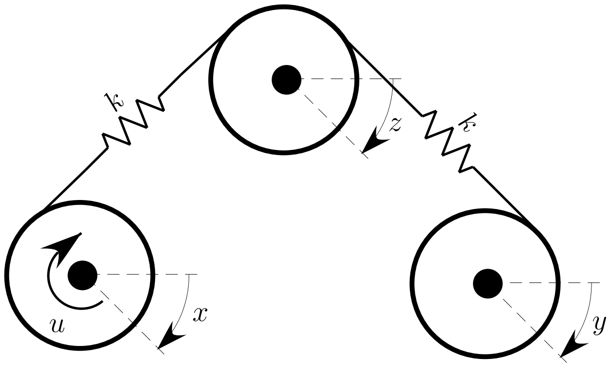
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compito di Fondamenti di Automatica del 10/9/2004

Cognome e nome: ________________________________ Matr.: ____________

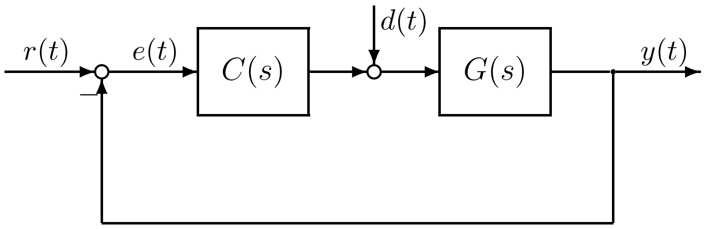
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. (7pt) Si consideri il seguente sistema meccanico.

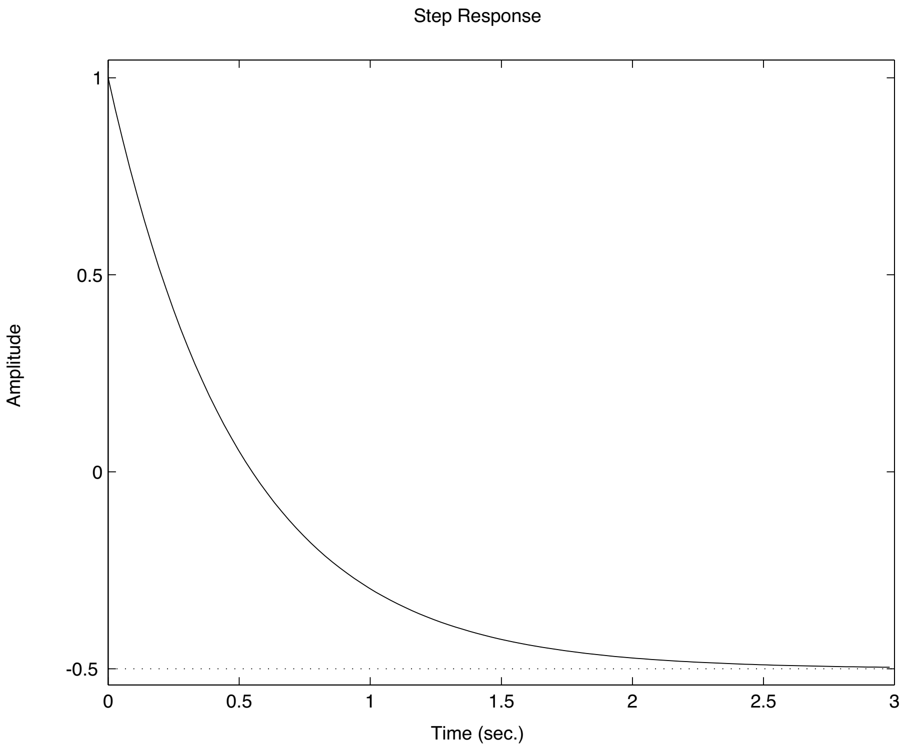


Si tratta di tre rulli di raggio R e momento di inerzia J che ruotano con attrito β attorno al loro asse e che sono connessi attraverso un cavo elastico con costante elastica k. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y.

Esercizio 2.(7pt) Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che $C(s) = \frac{K}{s^2}$ e $G(s) = \frac{s+a}{s+2}$. Supponiamo che, per $K = 0$, quando $d(t) = 1$ (gradino unitario) l'uscita $y(t)$ e' illustrata in figura



1. Determinare la costante a.

2. Determinare il luogo dei poli in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino asintoti, punti doppi, eventuali intersezioni con l'asse immaginario e angoli di ingresso/uscita.
3. Determinare il luogo dei poli in catena chiusa al variare di $K < 0$.
4. Determinare il valore di K per il quale il sistema in catena chiusa ha risposta impulsiva contente il modo e^{-t}.

Esercizio 3.(6pt) Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $C(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (determinare eventuali asintoti e intersezioni con asse reale).
3. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso il criterio di Nyquist.

Esercizio 4.(4pt) Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

dove $K > 0$.
1. Calcolare la funzione sensibilita' della funzione di trasferimento dall'ingresso r all'uscita y rispetto al parametro K.
2. Supponiamo che $r(t) = t + \sin t$ e $d(t) = 0$. Determinare l'andamento dell'errore a regime in funzione di K.

Esercizio 5.(6pt) Si consideri un sistema avente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+20}$$

Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:
a. errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,1$;
b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 20$ rad/s;
c. margine di fase $m_\varphi = 45^o$.

$\boxed{\text{ES. 1}}$ Le equazioni del moto sono

$$-J\ddot{x} - \beta\dot{x} - K(Rx - Rz)R + u = 0$$

$$-J\ddot{z} - \beta\dot{z} - k(Rz - Rx)R - k(Rz - Ry)R = 0$$

$$-J\ddot{y} - \beta\dot{y} - K(Ry - Rz)R = 0$$

Passando alle trasformate di Laplace

$$\begin{cases} (Js^2 + \beta s + kR^2)X(s) = KR^2 Z(s) + U(s) \\ (Js^2 + \beta s + kR^2)Z(s) = kR^2 X(s) + kR^2 Y(s) \\ (Js^2 + \beta s + kR^2)Y(s) = KR^2 Z(s) \end{cases}$$

$$Z(s) = \frac{Js^2 + \beta s + kR^2}{kR^2}\, Y(s)$$

$$\frac{(Js^2 + \beta s + kR^2)^2}{kR^2}\, Y(s) = kR^2 X(s) + kR^2 Y(s)$$

$$X(s) = \left\{ \frac{(Js^2 + \beta s + kR^2)^2}{(kR^2)^2} - 1 \right\} Y(s) = \frac{(Js^2 + \beta s + kR^2)^2 - (kR^2)^2}{(KR^2)^2}\, Y(s)$$

$$(Js^2 + \beta s + kR^2)\,\frac{(Js^2 + \beta s + kR^2)^2 - (kR^2)^2}{(kR^2)^2}\, Y(s) = (Js^2 + \beta s + kR^2)Y(s) + U(s)$$

$$Y(s)\left\{(Js^2 + \beta s + kR^2)\right\}\left\{\frac{(Js^2 + \beta(s) + kR^2)^2 - 2(kR^2)^2}{(kR^2)^2}\right\} = U(s)$$

Quindi la funzione di trasferimento è

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(kR^2)^2}{(Js^2 + \beta s + kR^2)\left[(Js^2 + \beta s + kR^2)^2 - 2(kR^2)^2\right]}$$

Es. 2

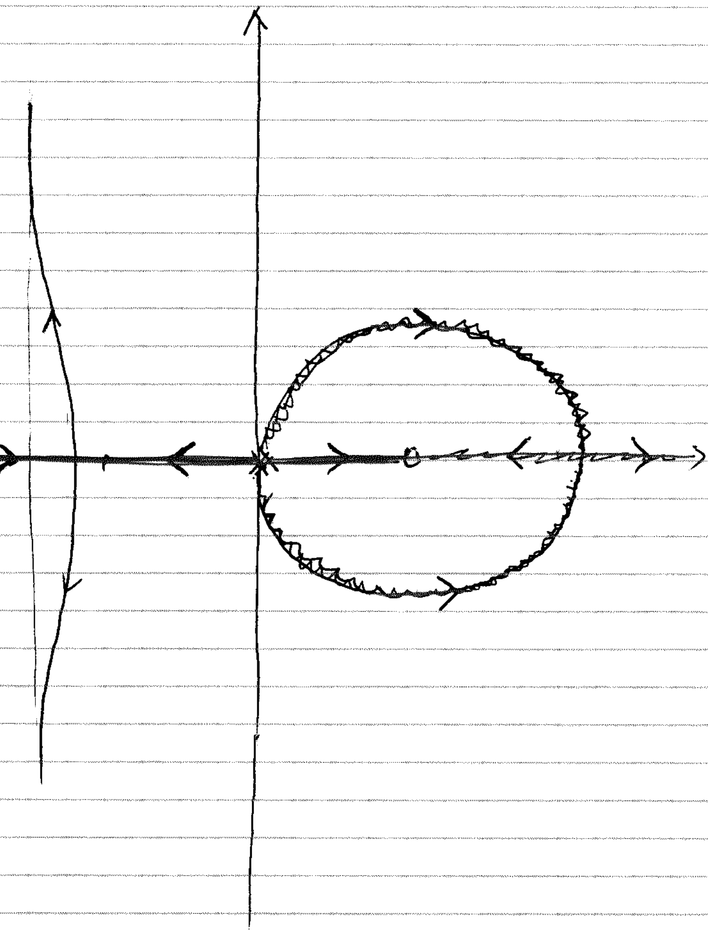
Dalla figura si deduce che il valore a regime di $y(t)$ è $-0{,}5 = -\frac{1}{2}$
che deve coincidere con $G(0) = \frac{a}{2}$. Da ciò consegue che $\boxed{a = -1}$

Funzione di trasferimento in catena chiusa è

$$T(s) = \frac{k(s-1)}{s^2(s+2)+k(s-1)}$$

Si tratta di determinare il luogo di

$$s^2(s+2)+k(s-1)=0$$



Asintoti: 2 asintoti con centro

$$\sigma_a = \frac{\sum P_i - \sum z_i}{2} = \frac{-3}{2}$$

Punti doppi

$$\begin{cases} s^2(s+2)+k(s-1)=0 \\ 2s(s+2)+s^2+k=0 \end{cases}$$

$$k = -s(3s+4)$$

$$s^2(s+2)-s(3s+4)(s-1)=0$$

$$s^2+2s-3s^2+3s-4s+4=0$$

$$2s^2-s-4=0 \qquad s_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{33}}{4} \begin{cases} 1.68 \\ -1.18 \end{cases}$$

Tabella di Routh $\qquad s^3+2s^2+ks-k$

3	1	k
2	2	$-k$
1	$\frac{3}{2}k$	
0	$-k$	

Per $k>0$ 1 variazione
Per $k<0$ 2 variazioni
Nessuna intersezione con asse immaginario

$k = +\frac{1}{2}$

4. Perché la risposta impulsiva contenga il modo e^{-t} è necessario che $s=-1$ sia polo di $T(s)$ e quindi che $s=-1$ sia radice di $s^2(s+2)+k(s-1)$. Ciò equivale a porre $(-1)^2(-1+2)+k(-1-1)=0$

ES. 3

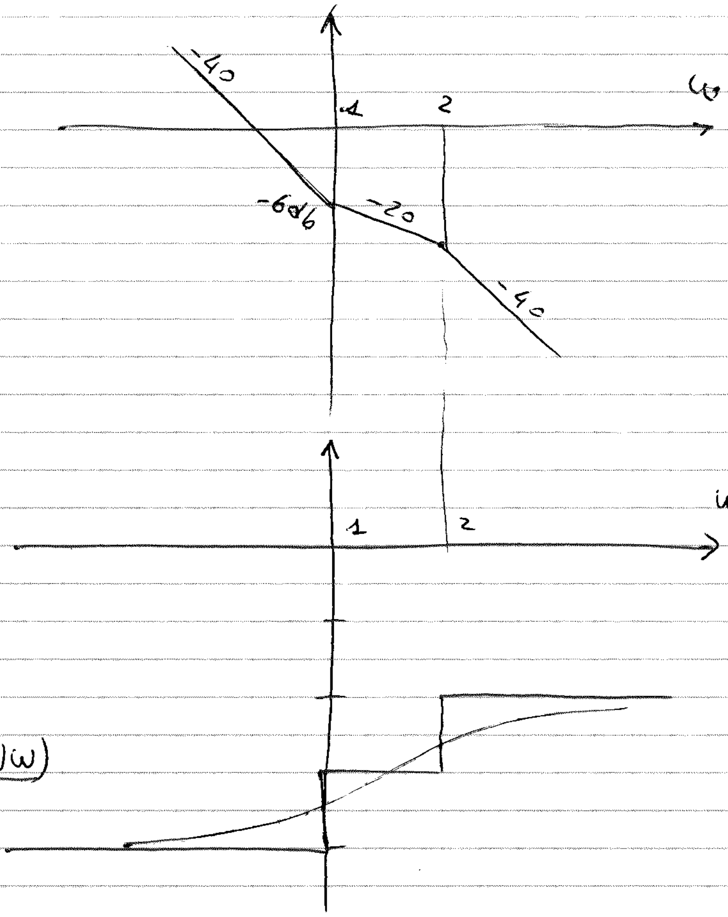
Forma di Bode

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s-2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1+s}{s^2(1-s/2)}$$

$T_1 = 1 \qquad \omega_1 = 1 = 1/|T_1|$

$T_2 = -\frac{1}{2} \qquad \omega_2 = 2 = 1/|T_2|$

$K_B = -\frac{1}{2} \qquad |K_B|_{db} = -6\ db$

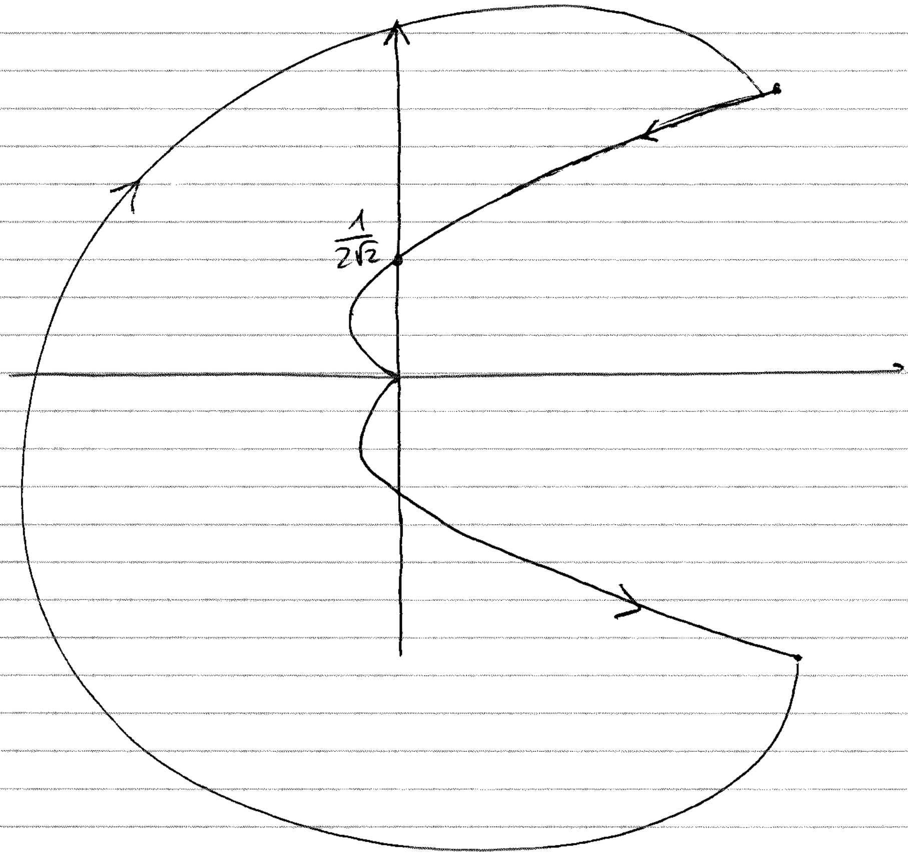


Nyquist

$$G(j\omega) = \frac{1+j\omega}{-\omega^2(-2+j\omega)} = \frac{(1+j\omega)(-2-j\omega)}{-\omega^2(4+\omega^2)}$$

$$Re\, G(j\omega) = \frac{2-\omega^2}{\omega^2(4+\omega^2)}$$

$$Im\, G(j\omega) = \frac{3}{\omega(4+\omega^2)}$$



$Re = 0$ se $\omega = \sqrt{2}$

In tal caso

$$Im = \frac{3}{\sqrt{2}\,6} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Criterio di Nyquist

$P = 1 \qquad Z = P - N$

Se $K > 0$, $-\frac{1}{K} < 0$

allora $N = -1$ e quindi $Z = 2$ (2 poli instabili in catena chiusa)

Se $K < 0$, $-\frac{1}{K} > 0$ allora $N = 0$ e quindi $Z = 1$

(1 polo instabile in catena chiusa)

ES. 4

1. Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento tra u e y.
Usando le formule

$$S^T_k(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}\,S^C_k(s) \qquad S^C_k(s) = \frac{k}{C(s)}\frac{\partial C}{\partial k} = \frac{k\,s}{k}\frac{1}{s} = 1$$

Si ottiene

$$S^T_k(s) = \frac{s(s^2-1)}{s(s^2-1)+k}$$

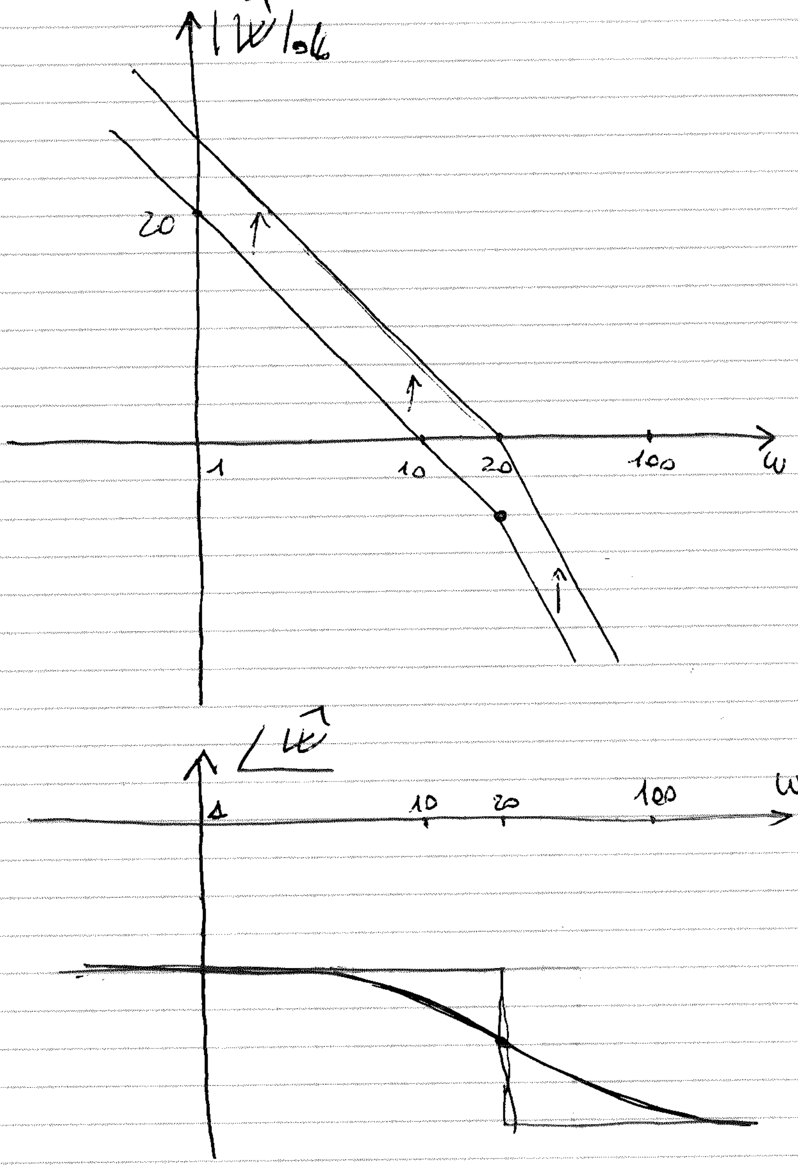
2. Preliminarmente effettuiamo l'analisi di stabilità.
(L'errore a regime ha senso solo per i valori di K che stabilizzano il sistema in catena chiusa)
Si noti che la funzione di trasferimento da $r(t)$ a $e(t)$ è

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{s(s^2-1)}{s(s^2-1)+k} = \frac{s(s^2-1)}{s^3-s+k}$$

Per la regola di Cartesio $T_{re}(s)$ è instabile $\forall K$.

$\boxed{\text{Es. 5}}$

Il controllore deve aggiungere un polo nell'origine e portare il guadagno di Bode complessivo a 10



Ciò è possibile se

$$C(s) = \frac{200}{s}\bar{C}(s)$$

In tal caso

$$\hat{W}(s) = \frac{200}{s}G(s) = \frac{10}{s\left(1+\frac{s}{20}\right)}$$

Dai diagrammi di Bode di $\hat{W}(s)$ si deduce che è sufficiente utilizzare uno amplificatore statico

<u>Calcolo analitico</u>

$$|C(20j)G(20j)| = 1$$

$$|\bar{C}(20j)||\hat{W}(20j)| = 1$$

$$K = \frac{1}{|\hat{W}(20j)|} = \frac{1}{\frac{10}{|20j|\left|1+\frac{20j}{20}\right|}} = \frac{1}{\frac{10}{20\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}$$