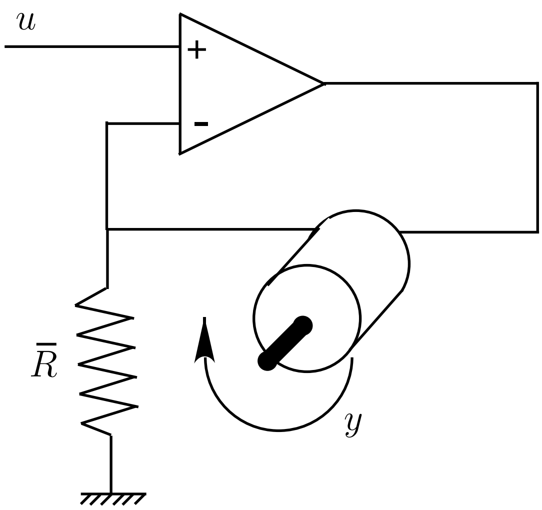
Compito di Fondamenti di Automatica del 11/1/2006

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Corso di Laurea: ____

INFORMAZIONE: Esercizi 1,2,3,4 6
ALTRI: Esercizio 1 (domande 1 e 3), Esercizio 2 (domande 1 e 2), Esercizio 3 (domande 1,2 e 3), Esercizio 4 e Esercizio 5.

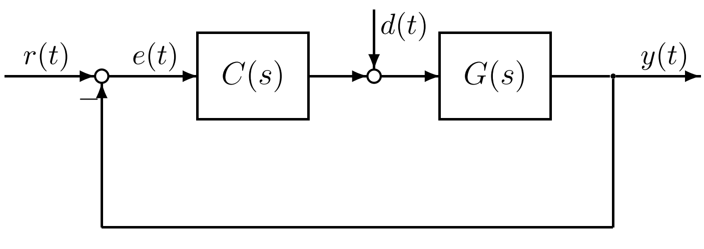
Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema elettromeccanico



Si tratta di un motore in continua alimentato da un amplificatore operazionale. Siano J il momento di inerzia e b la costante di attrito del motore, R la resistenza e L l'induttanza del motore e H la costante elettromeccanica. Supponiamo inoltre che l'amplificatore operazionale abbia amplificazione finita, ma molto elevata A.

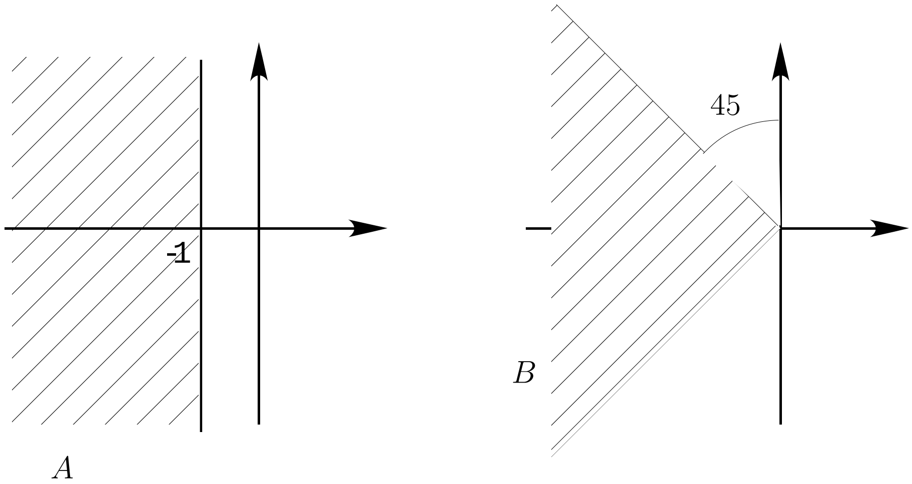
1. Determinare la funzione di trasferimento tra la tensione di ingresso u dell'amplificatore e la velocita' di rotazione y dell'asse del motore.
2. Determinare per quali valori di A la funzione di trasferimento e' BIBO stabile.
3. Determinare la stessa funzione di trasferimento nel caso in cui $A \to +\infty$.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.



Si supponga che $C(s) = K$ e $G(s) = \frac{(s+2)(s+4)}{s^2}$.

1. Si tracci il luogo dei poli del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$. Si determinino gli eventuali asintoti, gli eventuali punti doppi e le eventuali intersezioni con l'asse immaginario;
2. determinare i valori di $K > 0$ per i quali il luogo appartiene alla regione A del piano complesso.
3. determinare i valori di $K > 0$ per i quali il luogo appartiene alla regione B del piano complesso.



Esercizio 3. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = K \qquad G(s) = \frac{(1-s)^2}{s(1+s)^2}$$

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$.
2. Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (determinare eventuali asintoti e intersezioni con asse reale e immaginario).
3. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di $K > 0$ attraverso il criterio di Nyquist.
4. Determinare il margine di fase del sistema al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = \frac{K}{s} \qquad G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

dove $K > 0$.
Supponiamo che $r(t) = 1 + \sin t$ e $d(t) = t$. Determinare l'andamento dell'errore a regime in funzione di K.

Esercizio 5. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. errore a regime in risposta alla rampa ≥ 0.01;
2. margine di fase $m_\phi \geq 60^0$;
3. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 1$.

Esercizio 6. Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Attraverso la sintesi diretta basata sul compensatore a due parametri si determini i compensatori in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:

1. i compensatori devona avere poli in -1;
2. errore a regime nullo in risposta al gradino;
3. sistema in catena chiusa con modi del tipo $t^i e^{-2t}$.

ES.1

Sia v la tensione ai capi del motore e i la corrente che l'attraversa. Allora si ha

$$\begin{cases} L\dot{i} + Ri = v - H\dot{y} \\ J\ddot{y} + b\dot{y} = Hi \end{cases} \quad \text{motore}$$

Inoltre abbiamo che la tensione di uscita v_0 dell'amplificatore è data da

$$v_0 = A(v_+ - v_-)$$

dove $v_+ = u$

$v_- = \bar{R} i$

Infine $v = v_0 - v_- = A(u - \bar{R}i) - \bar{R}i = Au - (A+1)\bar{R}i$

Passando alle Laplace trasformate

$$\begin{cases} (Ls + R) I(s) = V(s) - HY(s) \\ (Js + b) Y(s) = H I(s) \\ V(s) = A U(s) - (A+1)\bar{R} I(s) \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{Js + b}{H} Y(s)$$

$$V(s) = AU(s) - \frac{(A+1)\bar{R}}{H}(Js+b) Y(s)$$

$$(Ls+R)\frac{Js+b}{H} Y(s) = A U(s) - \frac{(A+1)\bar{R}}{H}(Js+b)Y(s) - HY(s)$$

$$\left[(Ls+R)(Js+b) + (A+1)\bar{R}(Js+b) + H^2\right] Y(s) = HAU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{HA}{(Js+b)(Ls+R+(A+1)\bar{R}) + H^2} \xrightarrow{A \to +\infty} \frac{H\cancel{A}}{\cancel{A}\bar{R}(Js+b)}$$

$$= \frac{HA}{JLs^2 + [bL + J(R + (A+1)\bar{R})]s + b(R + (A+1)\bar{R}) + H^2}$$

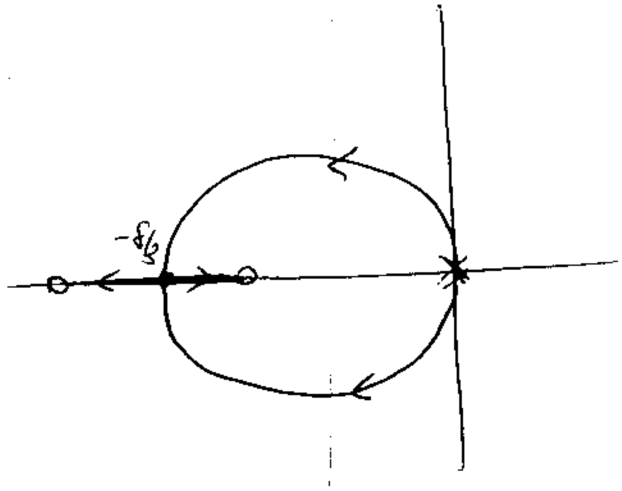
è stabile per Routh se e solo se
tutti i coefficienti sono > 0

$$\begin{cases} bL + J\left(R + (A+1)\bar{R}\right) > 0 \\ b\left(R + (A+1)\bar{R}\right) + H^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+1 > -\dfrac{bL}{J\bar{R}} - \dfrac{R}{\bar{R}} \\ A+1 > -\dfrac{H^2}{b\bar{R}} - \dfrac{R}{\bar{R}} \end{cases}$$

$\boxed{\text{ES 2}}$

1) $s^2 + k(s+2)(s+4) = 0$



Punti doppi

$$\begin{cases} s^2 + k(s+2)(s+4) = 0 \\ 2s + k(2s+6) = 0 \end{cases}$$

$$k = -\frac{s}{s+3}$$

$$s^2 - \frac{s}{s+3}(s+2)(s+4) = 0$$

$$s(s+3) - (s+2)(s+4) = 0$$

$$\cancel{s^2} + 3s - \cancel{s^2} - 6s - 8 = 0$$

$$-3s - 8 = 0 \qquad s = -\frac{8}{3}$$

2) $s \longrightarrow s - 1$

$$(s-1)^2 + k(s-1+2)(s-1+4) = 0$$

$$(1+k)s^2 + s(-2+4k) + (1+3k) = 0$$

è stabile (per Cartesio) se e solo se (tenendo conto che $k>0$)

$$-2+4k > 0 \qquad \boxed{k > 1/2}$$

3) $s = -x + jx \qquad x > 0$

$$= x(-1+j)$$

$$s^2 + k(s^2 + 6s + 8) = x^2(\cancel{1} - \cancel{1} - 2j) + k(\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2jx^2 - 6x + j6x + 8) = 0$$

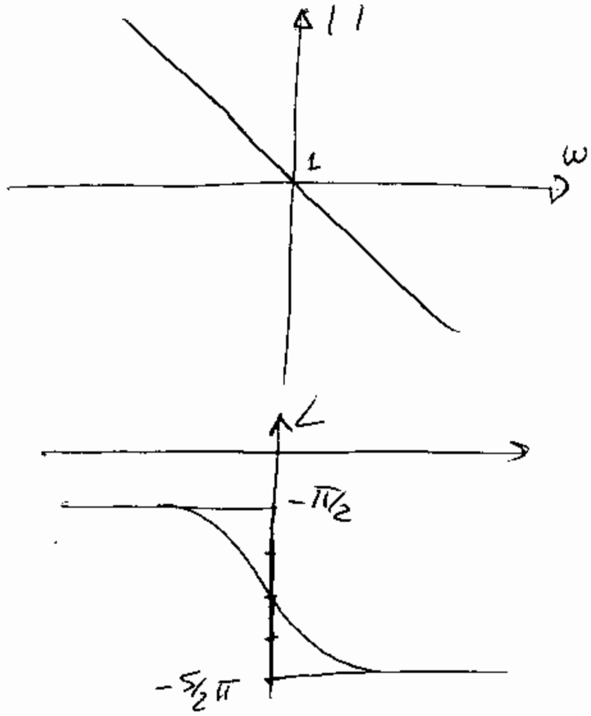
$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re} & \left\{ k(-6x+8) = 0 \right. \qquad \text{se } k \neq 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ \mathrm{Im} & \left\{ -2x^2 + k(-2x^2 + 6x) = 0 \right. \end{array}$$

$$-2\,\frac{16}{9} + k\left(-\frac{32}{9} + 8\right) = 0$$

$$k = \frac{32/9}{40/9} = \frac{4}{5}$$

$\boxed{\text{ES 3}}$

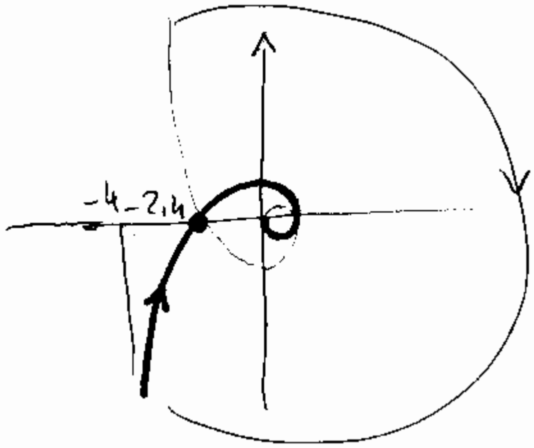
Bode



$$G(j\omega) = \frac{(1-\omega^2) - 2j\omega}{j\omega\left[(1-\omega^2)+2j\omega\right]}$$

$$= \frac{(1-\omega^2)^2 - 4\omega^2 - 4j\omega(1-\omega^2)}{j\omega\left[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$$Re = -\frac{4(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2+4\omega^2}$$



$$Im = -\frac{(1-\omega^2)^2-4\omega^2}{\omega\left[(1-\omega^2)^2+4\omega^2\right]}$$

$\omega = 0^+$ $\quad Im = \infty$

$\quad\quad\quad\quad Re = -4$

$Im = 0 \iff (1-\omega^2)^2 - 4\omega^2 = 0$

$\omega^2 = x \quad (x-1)^2 - 4x = 0 \quad x_{12} < \begin{matrix} 5.8 \\ 0.17 \end{matrix} \rightarrow \omega = 0.4 \rightarrow Re = -2.$

Criterio di Nyquist $\quad P = 0 \quad\quad Z = -N$

$-1/K < -2.4 \Rightarrow N = 0 \Rightarrow Z = 0 \quad$ Stabile

$-2.4 < -1/K < 0 \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = 2 \quad$ instabile

$0 < K < 0.45$

Margine di fase in funzione di K.

Si nota che, variando K, bode ~~moduli~~ fasi non cambia mentre i moduli sono traslati in alto o in basso a seconda che $K < 1$ o $K > 1$

Calcolo ω_A

$$|KG(j\omega_A)| = 1 \qquad K > 0$$

$$|G(j\omega_A)| = 1/K$$

$$\frac{1}{\omega_A}\frac{\cancel{|(1-\omega_A^2)+2j\omega_A|}}{\cancel{|(1-\omega_A^2)+2j\omega_A|}} = \frac{1}{\omega_A} \qquad \omega_A = K$$

$$m_\varphi = \pi + \angle KG(j\omega_A) = \pi + \angle G(j\omega_A)$$

$$= \pi + 4\angle 1+jK = \pi - 4\,\mathrm{arctg}\,K$$

ES 4

$$T_{re}(s) = \frac{1}{1+CG} = \frac{s(s+1)^2}{s(s+1)^2+k}$$

$$T_{de}(s) = \frac{-G}{1+CG} = \frac{-s}{s(s+1)^2+k}$$

s^3+2s^2+s+k

stabilità

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 1 \\ & 2 & k \\ & \frac{2-k}{2} & \\ & k & \end{array}$$

$0<k<2$

$r(t) = 1$

$e(t) \simeq T_{re}(0)\, 1 = 0$

$r(t) = \sin t$

$e(t) \simeq |T_{re}(j)| \sin\left(t + \angle T_{re}(j)\right)$

$$T_{re}(j) = \frac{j(\cancel{-1}+2j\cancel{+1})}{j(\cancel{-1}+2j\cancel{+1})+k} = \frac{-2}{k-2} = \frac{2}{2-k} \overset{>0 \text{ in } 0<k<2}{}$$

$|T_{re}(j)| = \frac{2}{2-k}$ $\qquad \angle T_{re}(j) = 0$

$r(t) \simeq \frac{2}{2-k} \sin t$

$d(t) = t \qquad D(s) = \frac{1}{s^2}$

$$E(s) = \frac{-s}{s(s+1)^2+k}\,\frac{1}{s^2} = \frac{-1}{s(s(s+1)^2+k)} = \frac{A}{s} + (\text{termini} \to 0)$$

$$A = \lim_{s\to 0} E(s)\, s = -\frac{1}{k}$$

$e(t) \simeq -\frac{1}{k}$

Quindi globalmente

$$e(t) \simeq \frac{2}{2-k} \sin t - \frac{1}{k}$$

ES 5

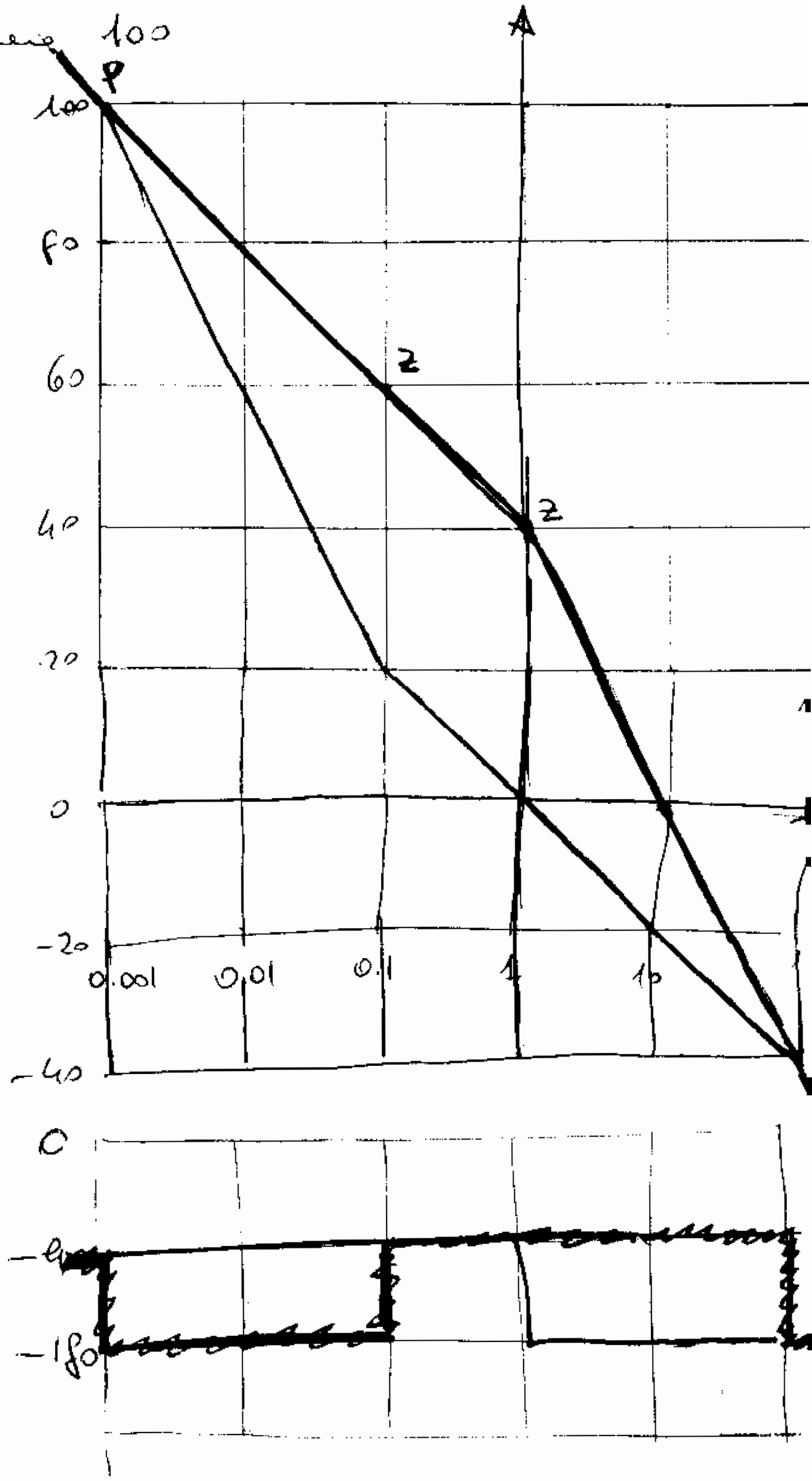
Serve un polo nell'origine e guadagno di Bode almeno 100

$$C(s) = \frac{100}{s}\,\bar{C}(s)$$

$$\hat{W}(s) = \frac{100}{s}\,G(s) = \frac{100}{s(s+1)}$$

Serve una rete a sella

$$\bar{C}(s) = \frac{1+1000s}{1+10s}\;\frac{1+s}{1+s/100}$$



$\boxed{\text{ES 6}}$

$C_u(S) = \dfrac{n_u(S)}{S+1}$

$C_y(S) = \dfrac{n_y(S)}{S+1} \qquad \Delta(S) = S+1$

$a(S) = S^2 \qquad \mu = 2$

$b(S) = 1$

$d(S) = (S+2)^2 \alpha$

Funzione di trasferimento in ciclo chiuso

per avere errore a regime nullo bisogna che

$T(S) = \dfrac{b(S)}{d(S)} \qquad T(0) = 1 \iff d(0) = b(0) \iff \alpha = 1/4$

$n_y(S)\,a(S) + n_y(S)\,b(S) = (d(S) - a(S))\,\Delta(S) =$

$= \left(\frac{1}{4}(S+2)^2 - S^2\right)(S+1)$

$= -3/4\,S^3 + 1/4\,S^2 + 2S + 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

$n_y(S) = X_1 S + X_0 = 2S + 1$

$n_u(S) = y_1 S + y_0 = -3/4\,S + 1/4$

$C_y(S) = \dfrac{2S+1}{S+1}$

$C_u(S) = \dfrac{-3/4\,S + 1/4}{S+1}$