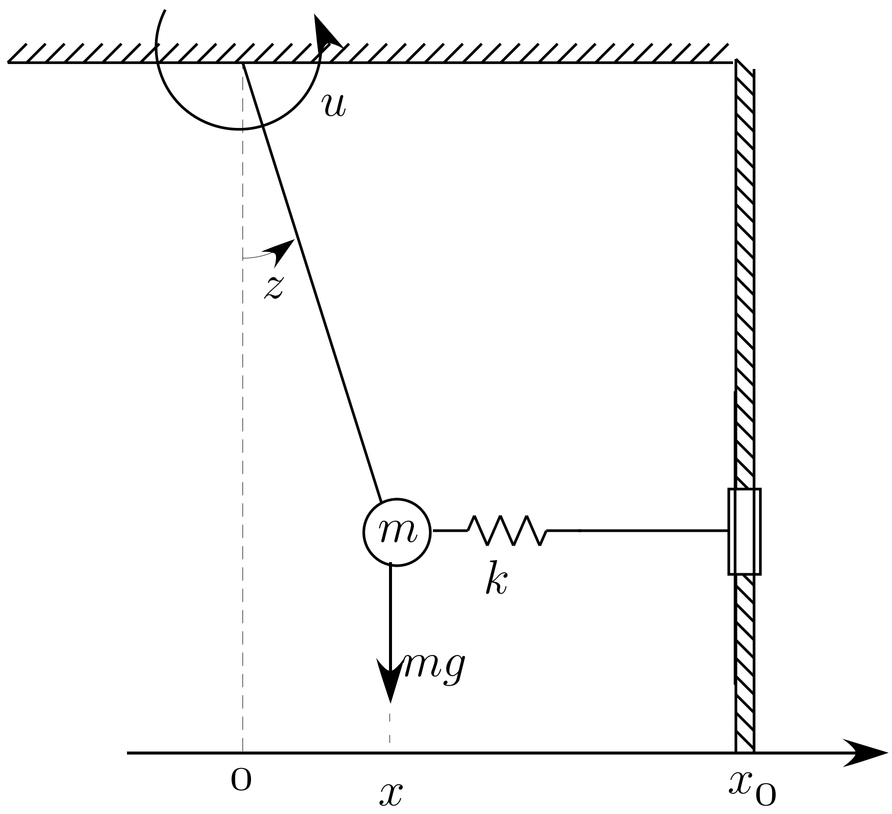
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 3/11/2006

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico.

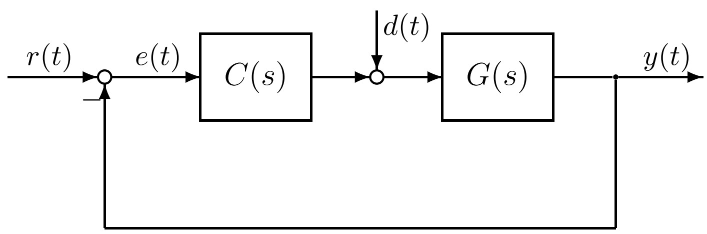


Si tratta di un pendolo sul quale agisce una coppia u, incenierato in un perno sul quale ruota con costante di attrito viscoso rotazionale trasurabile. Sia y la posizione angolare, m la massa dell'estremita' del pendolo e l la sua lunghezza. Sia g la accelerazione di gravita'. Si suppone che il pendolo sia incernierato a una molla (con lunghezza a riposo nulla) la cui altra estremita' scorre lungo la parete in maniera tale che la molla sia sempre orrizontale.

1. Determinare le equazioni del moto del pendolo. Determinare x_0 in modo tale che in condizioni di equilibrio ($u = 0$) si ha $z(t) = 45^o$ per tutti i t.

2. Determinare la funzione di trasferimento tra ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t) := z(t) - 45^o$ sotto l'ipotesi che sia $u(t)$ che $y(t)$ siano piccoli.

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

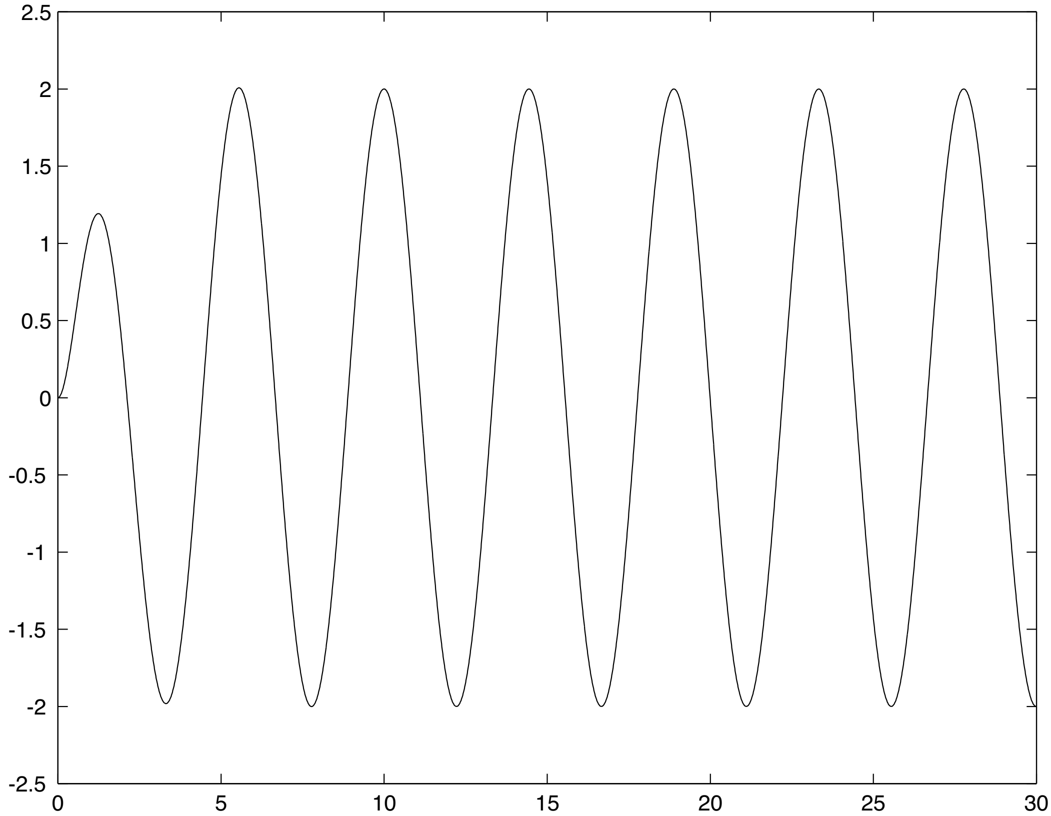


Si supponga che

$$C(s) = Ks \qquad G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + a}$$

dove $a \geq 0$.

1. Determinare a sapendo che se $k = 4$ e $r(t) = sin(\sqrt{2}t)$ si osserva l'uscita $y(t)$ mostrata in figura.



Supponiamo ora che a sia dato dal valore calcolato al punto precedente (altrimenti porre $a = 1$).

2. Determinare i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.

3. Determinare i valori di K per i quali nel sistema in catena chiusa il segnale di disturbo $d(t) = sin(\sqrt{2}t)$ risulta attenuato in uscita di almeno 10 volte .

4. Determinare i valori di K per i quali il sistema in catena chiusa ha risposta al gradino con sovraelongazione $S \leq 4.3\%$ ($S = e^{-\pi/\tan\theta}$).

Esercizio 2. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui

$$C(s) = K\frac{s}{s+a} \qquad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \,.$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che -2 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.

2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ (si determinino asintoti, punti doppi, angoli di uscita, intersezione asse immaginario.

3. Determinare il valore di K in corrispondenza del quale il luogo ammette il punto doppio in -2. Determimare i rimanenti punti del luogo in corrispondenza a tale K.

$\boxed{\text{Es } 1}$

equazioni del moto

$$x = l \sin z$$

$$-J\ddot{z} - mgl \sin z - k(x - x_0)\, l \cos z + u = 0 \qquad J = ml^2$$

Supponiamo ora che $z(t) = 45°$ $\forall t$ e $u(t) = 0$ $\forall t$. Allora $\ddot{z} = 0$ $\forall t$ e quindi l'equazione diventa

$$-mgl \cancel{\sin 45°} - k(\overset{l \sin 45°}{x} - x_0)\cancel{l}\, \cancel{\cos 45°} = 0$$

$$mg + k\left(l\frac{\sqrt{2}}{2} - x_0\right) = 0 \qquad \boxed{x_0 = l\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{mg}{k}}$$

Se ora $z(t) = 45° + y(t)$, $u(t) = u(t)$ con $y(t), u(t)$ piccoli

Allora $\ddot{z} = \ddot{y}$. Inoltre si ottiene

$$J\ddot{y} + mgl \sin(45 + y) - k(\overset{l \sin(45+y)}{x} - l\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{mg}{k})\, l \cos(45 + y) = u$$

$$J\ddot{y} + mgl \sin(45 + y) + kl^2 \sin(45 + y)\cos(45 + y)$$
$$- kl^2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45 + y) - mgl \cos(45 + y) = u$$

Dobbiamo linearizzare sapendo che y piccolo $f(y) \simeq f(0) + f'(0)y$

$$\sin(45 + y) \simeq \sin(45) + \cos(45)\, y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$\cos(45 + y) \simeq \cos(45) - \sin(45)\, y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

derivata $\sin(x)\cos(x)$

$$\sin(45 + y)\cos(45 + y) \simeq \sin(45)\cos(45) + [\cos^2(45) - \sin^2(45)]\, y = \frac{1}{2}$$

$$J\ddot{y} + \cancel{mgl\frac{\sqrt{2}}{2}} + mgl\frac{\sqrt{2}}{2}y + \cancel{\frac{kl^2}{2}} - kl^2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) - mgl\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) = u$$

$$J\ddot{y} + \left(mgl\sqrt{2} + \frac{kl^2}{2}\right)y = u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2 + mgl\sqrt{2} + \frac{kl^2}{2}}$$

$\boxed{\text{ES } 2}$

1) $T_{ry}(s) = \frac{k s}{s^2 - 2s + a + ks}$ $\quad k = 4 \quad$ $T_{ry}(s) = \frac{4s}{s^2 + 2s + a}$

Dalla figura si osserva che asintoticamente $y(t)$ è sinusoidale con ampiezza 2 e quindi

$|T_{ry}(\sqrt{2} j)| = 2 \Rightarrow \frac{|4\sqrt{2} j|^2}{(a-2)^2 + 8} = 4$ $\qquad \cancel{32} = 4(a-2)^2 + \cancel{32}$ $\quad \boxed{a = 2}$

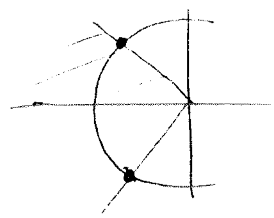
2) $s^2 - 2s + 2 + ks$ è stabile $\Leftrightarrow$ $k \geq 2$

3) $T_{dy}(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 2 + ks}$

$|T_{dy}(2j)|^2 = \frac{1}{|\cancel{-2} - 2\sqrt{2} j + \cancel{2} + k\sqrt{2} j|} = \frac{1}{\sqrt{2}(k-2)} < \frac{1}{10}$ $\qquad \sqrt{2}(k-2) > 10$

$k > 2 + \frac{10}{\sqrt{2}}$

4) $\delta \leq 0.043 \Rightarrow \theta \leq 45$



le radici dominanti di $s^2 - 2s + 2 + ks$ devono avere $\theta \leq 45°$

$s_{1,2} = \frac{-(k-2) \pm \sqrt{(k-2)^2 - 8}}{2} = \frac{-(k-2) \pm \sqrt{k^2 - 4k - 4}}{2}$

Se $k \geq 2 + 2\sqrt{2}$ le radici sono reali e quindi non c'è sovraelongazione.

Se $2 \leq k \leq 4$ le radici sono complesse.

Per avere $\theta \leq 45$ si deve avere

$-\mathrm{Re}\, s_1 \geq \mathrm{Im}\, s_1$

$k - 2 \geq \sqrt{4k - k^2 + 4}$

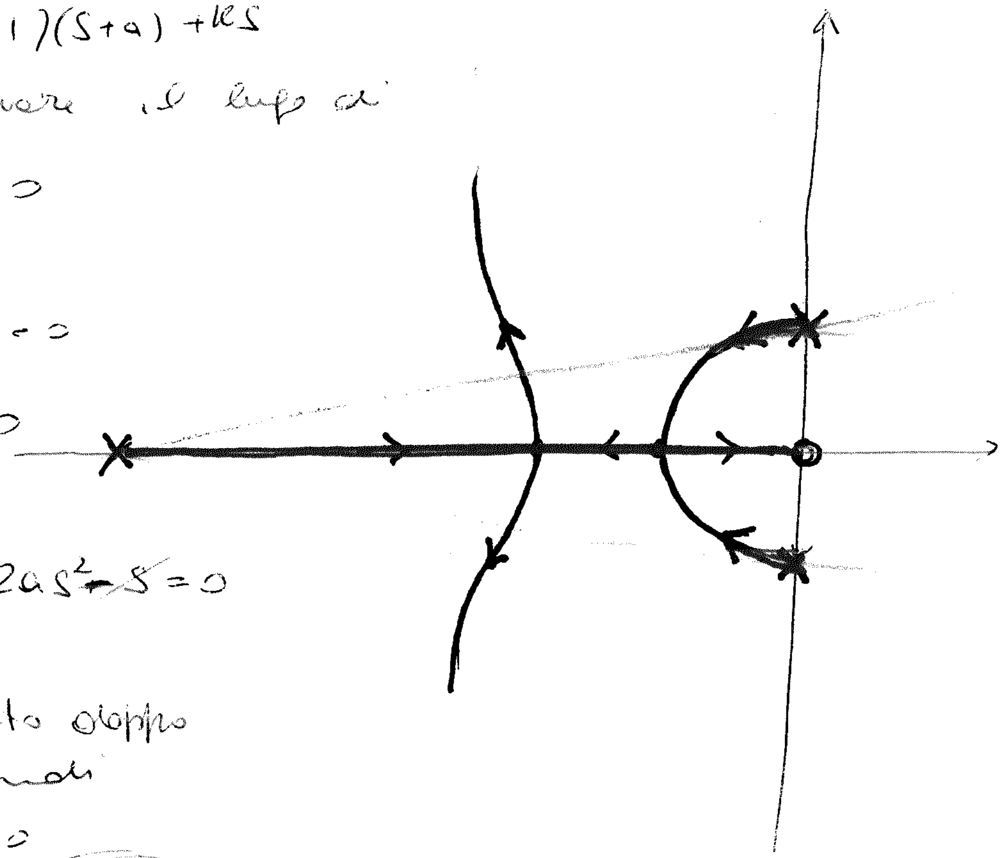
$(k-2)^2 \geq 4k - k^2 + 4 \qquad k^2 - 4k \geq 0 \qquad \boxed{k \geq 4}$

$\boxed{ES.3}$

$$T(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{ks}{(s^2+1)(s+a)+ks}$$

Quindi dobbiamo trovare il luogo di

$$(s^2+1)(s+a)+ks=0$$



Punti doppi

$$\begin{cases} s^3+as^2+s+a+ks=0 \\ 3s^2+2as+1+k=0 \end{cases}$$

$$K=-3s^2-2as-1$$

$$s^3+as^2+\cancel{s}+a-3s^3-2as^2-\cancel{s}=0$$

$$2s^3+as^2-a=0$$

Deve esserci un punto doppio in $s=-2$ e quindi

$$2(-2)^3+a(-2)^2-a=0$$

$$-16+4a-a=0 \qquad a=\frac{16}{3}$$

$$K=-3(-2)^2-2\frac{16}{3}(-2)-1=$$

$$=-12+\frac{64}{3}-1=\frac{25}{3}$$

Altri punti doppi

$$\begin{array}{l|l} 2s^3+\frac{16}{3}s^2+0s-\frac{16}{3} & s+2 \\ \hline 2s^3+4s^2 & 2s^2+\frac{4}{3}s-8/3 \\ \hline \frac{4}{3}s^2+0s-\frac{16}{3} & \\ \frac{4}{3}s^2+\frac{8}{3}s-\frac{16}{3} & \\ \hline -\frac{8}{3}s-\frac{16}{3} & \\ -8/3\,s-\frac{16}{3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$3s^2+2s-4=0$$

$$s_{12}=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{3}= \begin{cases} -1.63 \\ 0.86 \end{cases}$$

Asintoti

$$\sigma_a=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{2}=\frac{8}{3}$$

Angoli di uscita

$$\sum \angle s-z_i - \sum \angle s-p_i = \pi$$

$$s \approx j$$

$$\angle j-0 - \angle j-(-j) - \alpha - \angle j-(-\tfrac{16}{3}) = \pi$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\alpha-\angle 16/3+j=\pi$$

$$\alpha=-\pi-\angle 16/3+j \simeq -190°$$

Per $K=\frac{25}{3}$ gli altri punti del lu

$$\begin{array}{l|l} s^3+\frac{16}{3}s^2+\frac{28}{3}s+\frac{16}{3} & s^2+4s+4 \\ \hline s^3+4s^2+4s & s+\frac{4}{3} \\ \hline \frac{4}{3}s^2+\frac{16}{3}s+\frac{16}{3} & \\ \frac{4}{3}s^2+\frac{16}{3}s+\frac{16}{3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Quindi il rimanente punto è $-\frac{4}{3}$