

Contents

1	Diagrammi di Bode	3
1.1	Diagrammi di Bode delle funzioni elementari	6
1.1.1	La funzione elementare K_B/s^l	6
1.1.2	Funzione elementare $1 + sT$	7
1.1.3	Funzione elementare $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$	12
1.2	Tracciamento dei diagrammi di Bode	17
1.3	Sistemi passa tutto	19
1.4	Sistemi a fase minima e formula di Bode	20
1.5	Esempi di tracciamento di diagrammi di Bode	22
1.6	Determinazione dei margini di guadagno e di fase a partire dal diagramma di Bode	30

Chapter 1

Diagrammi di Bode

Abbiamo visto nel capitolo precedente che il diagramma di Nyquist fornisce un utile criterio per determinare la stabilità di un sistema e per trovare degli utile parametri come ad esempio il margine di fase. Tuttavia il diagramma di Nyquist, pur essendo semplice da definire, è spesso abbastanza difficile da tracciare. Soprattutto spesso non risulta intuitivo come agire sul guadagno d'anello $W(s)$ per modificare il suo diagramma di Nyquist in modo da assicurare ad esempio la stabilità in catena chiusa e un margine di fase sufficientemente elevato. Uno strumento più flessibile per raggiungere questo obiettivo è fornito dal diagramma di Bode.

Il diagramma di Bode consiste in realtà di due diagrammi che rappresentano il modulo $|W(j\omega)|$ e la fase $\angle W(j\omega)$ di $W(j\omega)$ al variare di ω . In realtà, come vedremo, in tali diagrammi l'ascissa non sarà semplicemente ω , ma piuttosto il logaritmo di ω , mentre nel diagramma che rappresenta $|W(j\omega)|$ si preferisce mettere sulle ordinate il logaritmo di $|W(j\omega)|$ (vedi figura 1.1). L'utilità di questa scelta sarà chiaro più avanti.

L'andamento di $W(j\omega)$ è noto quando sia conosciuto per i soli valori positivi della pulsazione ω , dato che

$$W(-j\omega) = \overline{W(j\omega)}.$$

Ciò implica che, per quanto riguarda il modulo e fase di $W(j\omega)$, si ha che

$$\begin{aligned} |W(-j\omega)| &= |W(j\omega)| \\ \angle W(-j\omega) &= -\angle W(j\omega). \end{aligned}$$

I diagrammi di Bode sono due: uno per il modulo $|W(j\omega)|, \omega \geq 0$ (detto anche diagramma dei "guadagni") e l'altro per la fase $\angle W(j\omega), \omega \geq 0$. In entrambi i casi la pulsazione è riportata in scala logaritmica cioè sull'ascissa compare $x = \log_{10} \omega$ e non ω (in alcuni casi si usano logaritmi in base 2 o in base e). Per il guadagno si usa una scala logaritmica in decibel, cioè sull'ordinata è riportato

$$y = |W(j\omega)|_{\text{dB}} := 20 \log_{10} |W(j\omega)|$$

e non $|W(j\omega)|$. Nel seguito si indicherà \log_{10} più semplicemente col simbolo \log . La fase viene espressa in radianti o in gradi.

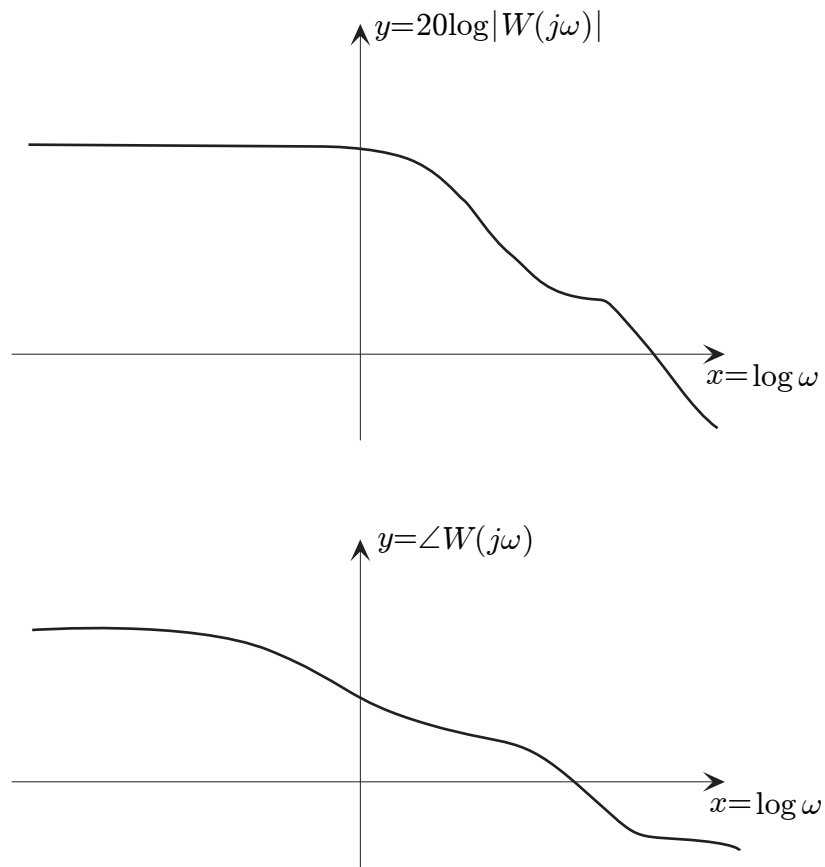


Figure 1.1:

Osservazione 1.1 Pur essendo l'ascissa logaritmica, si preferisce riportare sull'asse i valori effettivi della pulsazione e non di quelli del suo logaritmo. In altre parole nel punto di coordinate $x = \log \omega$ si preferisce riportare il valore di ω , anziché quello di x (vedi figura 1.2).

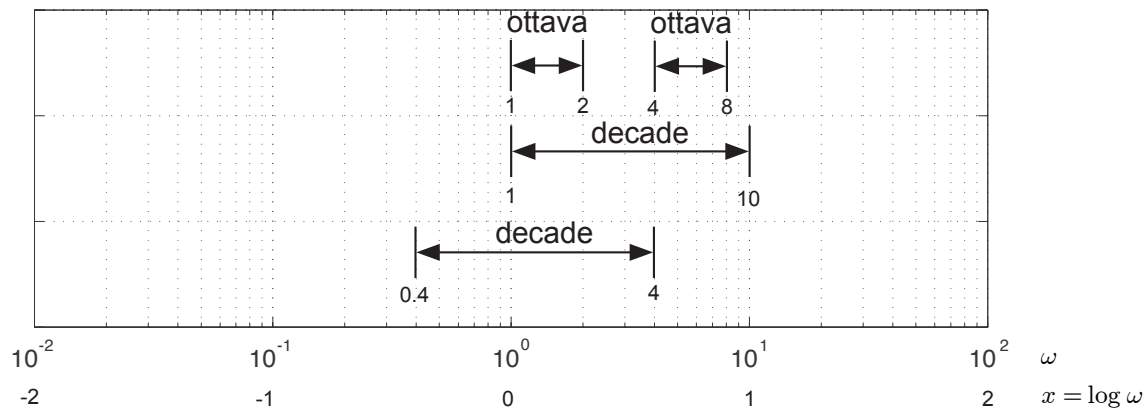


Figure 1.2:

Si noti che un incremento di 1 sull'asse delle ascisse corrisponde a una moltiplicazione per 10 di ω

$$\begin{array}{ccc} \omega & \longrightarrow & 10\omega \\ \log \downarrow & & \downarrow \log \\ x = \log \omega & \longrightarrow & x + 1 \end{array}$$

Un intervallo di pulsazioni compreso tra $\bar{\omega} \leq \omega \leq 10\bar{\omega}$, che corrisponde nella scala logaritmica in base 10 a un intervallo di ampiezza unitaria, viene detto **decade**. Analogamente una moltiplicazione per 2 corrisponde ad una traslazione di $\log 2$ ed un intervallo di pulsazioni compreso tra $\bar{\omega} \leq \omega \leq 2\bar{\omega}$, che corrisponde nella scala logaritmica in base 10 a un intervallo di ampiezza $\log 2$, viene detto **ottava**.

Si osservi che in generale il diagramma di Bode di $\bar{W}(s) := W(\alpha s)$, con $\alpha > 0$, coincide con la traslazione di $\log \alpha$ del diagramma di Bode di $W(s)$. Infatti, per quanto riguarda il diagramma del modulo, abbiamo che la funzione tracciata è $y = f(x) = 20 \log |W(j10^x)|$ per il diagramma di Bode di $W(s)$ e $y = \bar{f}(x) = 20 \log |\bar{W}(j10^x)|$ per il diagramma di Bode di $\bar{W}(s)$. Si noti ora che

$$\bar{f}(x) = 20 \log |\bar{W}(j10^x)| = 20 \log |W(j\alpha 10^x)| = 20 \log |W(j10^{(x+\log \alpha)})| = f(x+\log \alpha)$$

che conferma che il grafico di $\bar{f}(x)$ è la traslazione del grafico di $f(x)$. La stessa cosa accade per il diagramma delle fasi.

Per tracciare il diagramma di Bode è conveniente esprimere la funzione di trasferimento $W(s)$ nella cosiddetta forma di Bode come visto nella sezione ?? ottenendo

in questo modo

$$W(s) = \frac{K_B \prod_k (1 + sT_k)^{\nu_k} \prod_k \left(1 + 2\xi_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2}\right)^{\mu_k}}{s^l \prod_k (1 + s\bar{T}_k)^{\bar{\nu}_k} \prod_k \left(1 + 2\bar{\xi}_k \frac{s}{\bar{\omega}_{nk}} + \frac{s^2}{\bar{\omega}_{nk}^2}\right)^{\bar{\mu}_k}}$$

dove K_B è detto **guadagno di Bode** e l'intero l (che può essere positivo, nullo o negativo) è detto **tipo del sistema**.

Calcolando $W(s)$ in $s = j\omega$. Usando il fatto che per $a, b \in \mathbb{C}$ si ha che $|ab|_{dB} = |a|_{dB} + |b|_{dB}$, otteniamo per il diagramma dei moduli

$$\begin{aligned} |W(j\omega)|_{dB} &= |K_B/(j\omega)^l|_{dB} \\ &+ \sum_k \nu_k |1 + j\omega T_k|_{dB} - \sum_k \bar{\nu}_k |1 + j\omega \bar{T}_k|_{dB} + \\ &+ \sum_k \mu_k \left|1 + j2\xi_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2}\right|_{dB} - \sum_k \bar{\mu}_k \left|1 + j2\bar{\xi}_k \frac{\omega}{\bar{\omega}_{nk}} - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{nk}^2}\right|_{dB} \end{aligned}$$

Per il diagramma delle fasi, usando il fatto che per $a, b \in \mathbb{C}$ si ha che $\angle ab = \angle a + \angle b$, otteniamo

$$\begin{aligned} \angle W(j\omega) &= \angle K_B/(j\omega)^l \\ &+ \sum_k \nu_k \angle(1 + j\omega T_k) - \sum_k \bar{\nu}_k \angle(1 + j\omega \bar{T}_k) + \\ &+ \sum_k \mu_k \angle\left(1 + j2\xi_k \frac{\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2}\right) - \sum_k \bar{\mu}_k \angle\left(1 + j2\bar{\xi}_k \frac{\omega}{\bar{\omega}_{nk}} - \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{nk}^2}\right) \end{aligned}$$

Quindi il modulo in decibel e la fase si ottengono sommando algebricamente i moduli in decibel e le fasi corrispondenti ai singoli fattori della funzione di trasferimento. Ciò consente di ricondurre il tracciamento dei diagrammi del modulo e della fase a quelli di un numero finito di funzioni elementari ottenendo il diagramma finale per somma dei diagrammi elementari. Nel seguito considereremo il problema del tracciamento dei diagrammi elementari.

1.1 Diagrammi di Bode delle funzioni elementari

1.1.1 La funzione elementare K_B/s^l

Si noti che per $\omega > 0$ si ha che

$$y = \left| \frac{K_B}{(j\omega)^l} \right|_{dB} = 20 \log \left| \frac{K_B}{(j\omega)^l} \right| = 20 \log |K_B| - 20 \log \omega = 20 \log |K_B| - l20x$$

dove $x = \log \omega$ rappresenta l'asse delle ascisse e $y = |K_B/(j\omega)^l|_{\text{dB}}$ rappresenta l'asse delle ordinate del diagramma dei moduli. Si nota che in questo caso il diagramma dei moduli coincide con una retta che attraversa l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $|K_B|_{\text{dB}}$ con pendenza di $-l20$ decibel per decade. Si noti che se $|K_B| > 1$, allora $|K_B|_{\text{dB}} > 0$, mentre se $|K_B| < 1$, allora $|K_B|_{\text{dB}} < 0$.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi per $\omega > 0$ si ha che

$$y = \angle \left(\frac{K_B}{(j\omega)^l} \right) = \angle K_B - l \angle j\omega = \begin{cases} -l \frac{\pi}{2} & \text{se } K_B > 0 \\ -\pi - l \frac{\pi}{2} & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

dove $y = \angle(K_B/(j\omega)^l)$ rappresenta l'asse delle ordinate del diagramma delle fasi. Si nota che in questo caso il diagramma delle fasi coincide con una retta orizzontale che attraversa l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $-\pi/2$ se $K_B > 0$ o nel punto di coordinate $-\pi - \pi/2$ se $K_B < 0$.

Nella figura 1.3 sono illustrati gli andamenti del modulo e della fase di $-1/j\omega$ e di $10/(j\omega)^2$.

1.1.2 Funzione elementare $1 + sT$

Modulo Si noti che per $\omega > 0$ si ha che

$$y = f_T(x) := |1 + j\omega T|_{\text{dB}} = 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 10 \log(1 + T^2 10^{2x})$$

L'andamento di questa funzione è illustrato nella figura 1.5. Per quanto osservato precedentemente, si ha che

$$f_T(x) = f_1(x - \bar{x})$$

dove $\bar{x} = \log |\frac{1}{T}|$ è detto **punto di spezzamento** mentre la corrispondente pulsazione $\bar{\omega} = |\frac{1}{T}|$ è detta **pulsazione di spezzamento**. Quindi tutti i diagrammi dei moduli della funzione elementare $1 + j\omega T$ coincidono con quello in cui $T = 1$ a meno di una opportuna traslazione.

Analizziamo i valori asintotici

$$y = |1 + j\omega T|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} 20 \log |1| = 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \quad (x = \log \omega \rightarrow -\infty) \\ 20 \log |\omega T| = 20x + 20 \log |T| & \text{se } \omega \rightarrow +\infty \quad (x = \log \omega \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Quindi la approssimazione asintotica del modulo della funzione elementare $1 + sT$ è data da due rette, la prima $y = 0$ e la seconda $y = 20x + 20 \log |T|$ che ha pendenza 20 decibel per decade che interseca l'asse delle ascisse nel punto di spezzamento \bar{x} . Per questo motivo, per semplificare il tracciamento dei diagrammi dei moduli si approssima il diagramma questa funzione elementare con le due semirette (vedi figura 1.4)

- (a) la semiretta $y = 0$ che coincide con l'asse delle ascisse per $x \in (-\infty, \bar{x}]$.

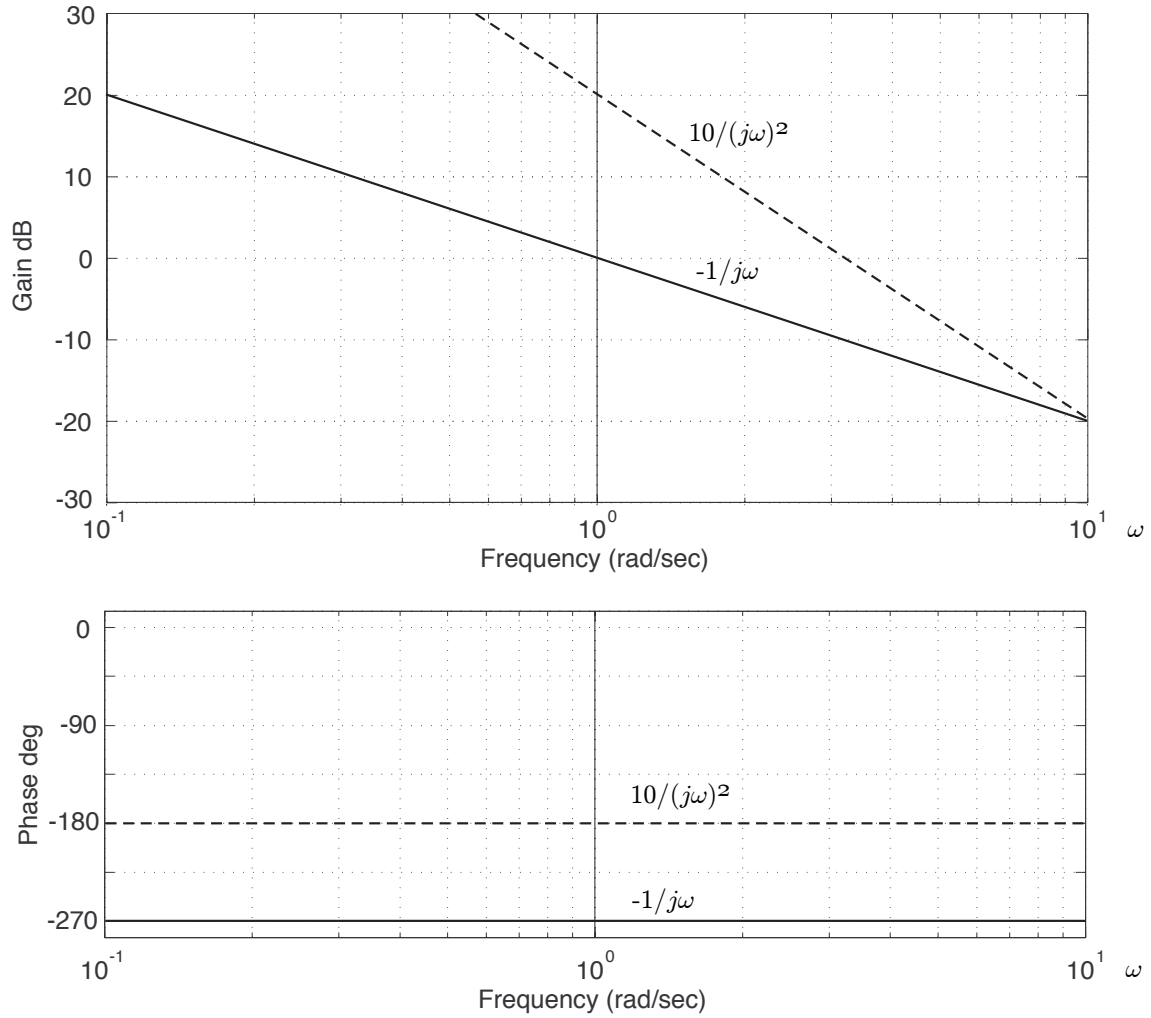


Figure 1.3:

(b) la retta $y = 20x + 20 \log |T|$ per $x \in [\bar{x}, +\infty)$.

Il diagramma costituito da queste due rette è detto diagramma asintotico di $1 + sT$.

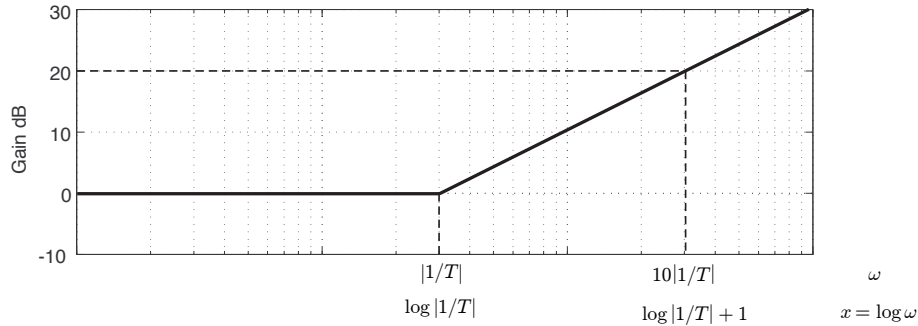


Figure 1.4:

Vediamo ora quale errore stiamo facendo considerando il diagramma asintotico al posto di quello vero (vedi figura 1.5)

- Per $\omega = \bar{\omega} = \left|\frac{1}{T}\right|$ e $x = \bar{x} = \log \left|\frac{1}{T}\right|$

$$\begin{aligned} |1 + j\bar{\omega}T|_{\text{dB}} &= 20 \log |1 \pm j| \\ &= 20 \log \sqrt{2} \simeq 3_{\text{dB}}, \end{aligned}$$

$$\text{errore} = 3_{\text{dB}}$$

- Per $\omega = 2\bar{\omega}$ e $x = \bar{x} + \log 2$

$$\begin{aligned} \text{diagramma vero: } |1 + j2\bar{\omega}T|_{\text{dB}} &= 20 \log |1 \pm 2j| = 20 \log \sqrt{5} \simeq 7_{\text{dB}} \\ \text{diagramma asintotico: } |j2\bar{\omega}T|_{\text{dB}} &= 20 \log |\pm 2j| = 20 \log 2 \simeq 6_{\text{dB}}, \end{aligned}$$

$$\text{errore} = 1_{\text{dB}}$$

- Per $\omega = \frac{\bar{\omega}}{2}$ e $x = \bar{x} - \log 2$

$$|1 + j\frac{\bar{\omega}}{2}T| = 20 \log |1 \pm \frac{1}{2}j| = 20 \log \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1_{\text{dB}},$$

$$\text{errore} = 1_{\text{dB}}$$

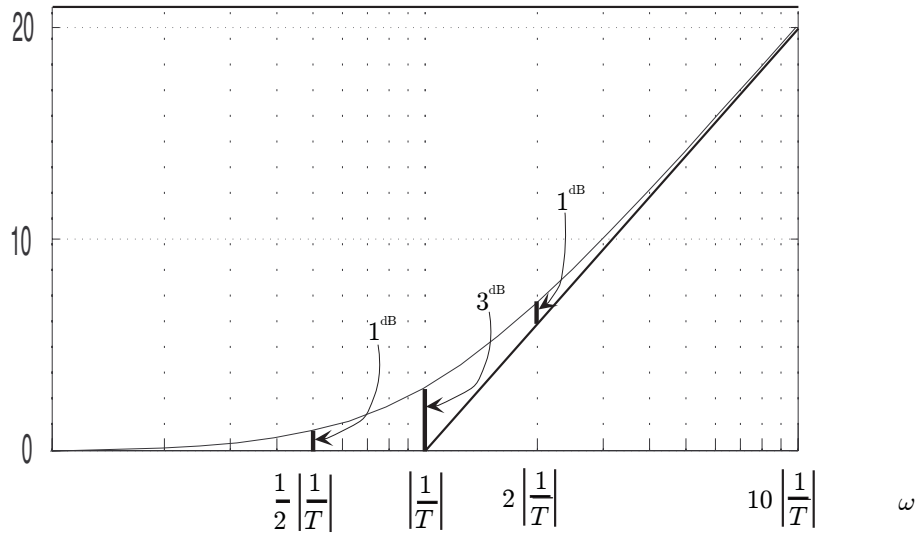


Figure 1.5:

Fase Per quanto riguarda la fase si osservi che

$$\angle(1 + j\omega T) = \arctan(\omega T) = \arctan(T \cdot 10^x).$$

Anche per le fasi si può dimostrare che il diagramma è la traslazione del diagramma nel caso in cui $|T| = 1$. Ciò che fa cambiare il diagramma è il segno di T . Per questo motivo preferiamo separare l'analisi considerando prima il caso in cui $T > 0$, corrispondente al caso in cui il polinomio $1 + sT$ è stabile, e poi il caso in cui $T < 0$, corrispondente al caso in cui il polinomio $1 + sT$ è instabile.

Caso stabile $T > 0$ Il grafico delle fase in questo caso è illustrato in figura 1.6. Analizziamo i valori asintotici

$$\angle(1 + j\omega T) \simeq \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0^+ & (x \rightarrow -\infty) \\ \frac{\pi}{4} & \omega = \bar{\omega} = \frac{1}{T} & (x = \bar{x}) \\ \frac{\pi}{2} & \omega \rightarrow +\infty & (x \rightarrow +\infty). \end{cases}$$

Il diagramma asintotico è quindi semplicemente (vedi figura 1.6)

$$\angle(1 + j\omega T) \simeq \begin{cases} 0 & \omega < \frac{1}{T} \\ \frac{\pi}{2} & \omega > \frac{1}{T} \end{cases}.$$

Questa è però una approssimazione grossolana. Una approssimazione migliore è data dalla spezzata mostrata in figura 1.6.

Caso instabile $T < 0$ Poiché

$$\angle(1 + j\omega T) = -\angle(1 + j\omega|T|),$$

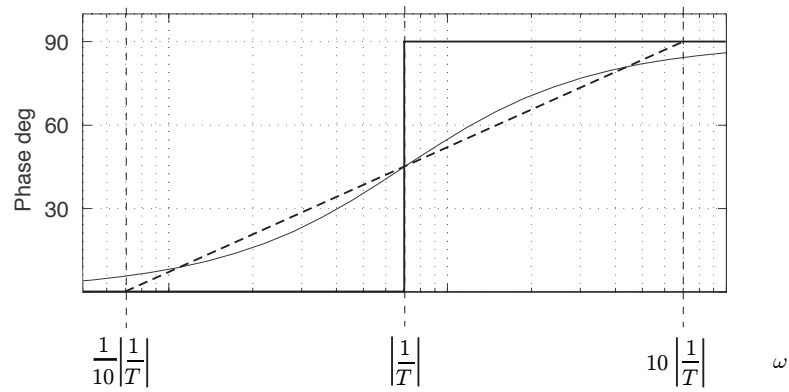


Figure 1.6:

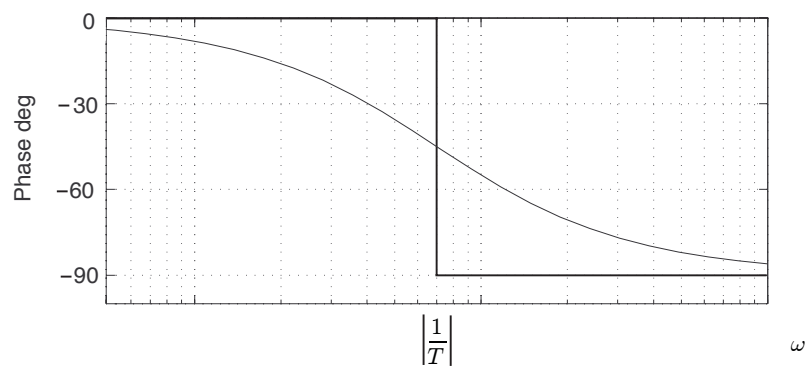


Figure 1.7:

se $T < 0$, cioè nel caso di zeri instabili, la fase cambia semplicemente di segno (vedi figura 1.7).

Esercizio 1.2 Dimostrare che gli errori tra i diagrammi veri e asintotici del modulo e della fase di $1 + j\omega T$ sono funzioni simmetriche rispetto all'asse verticale passante per il punto di spezzamento $1/|T|$.

Per quanto riguarda la funzione $\frac{1}{1 + j\omega T}$, si ha che sia i diagrammi dei moduli che delle fasi sono gli opposti dei precedenti

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right|_{\text{dB}} &= -|1 + j\omega T|_{\text{dB}} \\ \angle \left(\frac{1}{1 + j\omega T} \right) &= -\angle(1 + j\omega T). \end{aligned}$$

La figura 1.8 dà una descrizione riassuntiva dei diagrammi di Bode della funzione elementare $1 + sT$ distinguendo i casi stabili e instabili e i casi in cui la funzione elementare sta a numeratore o a denominatore. Si noti che nel caso stabile i diagrammi dei moduli e delle fasi sono concordi nella loro crescita o nella loro decrescenza, mentre nel caso instabile sono discordi. Infine se la funzione elementare appare a numeratore allora il diagramma dei moduli cresce, mentre se questa appare a denominatore allora il suo diagramma dei moduli decresce. Attraverso queste due regole si riesce a catturare tutte le possibili situazioni.

1.1.3 Funzione elementare $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$

Si noti preliminarmente che dalla costruzione di questa funzione elementare si ha che $\xi \in [-1, 1]$ e che $\omega_n > 0$.

Modulo Per quanto riguarda il modulo, si ha che

$$\begin{aligned} y = f_{\xi, \omega_n}(x) &:= \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = 20 \log \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right| \\ &= 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} = 10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] \\ &= 10 \log \left[\left(1 - \frac{10^{2x}}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{10^{2x}}{\omega_n^2} \right]. \end{aligned}$$

L'andamento di questa funzione è illustrato nella figura 1.10. Per quanto osservato precedentemente, anche in questo caso si ha che

$$f_{\xi, \omega_n} = f_{\xi, 1}(x - \bar{x})$$

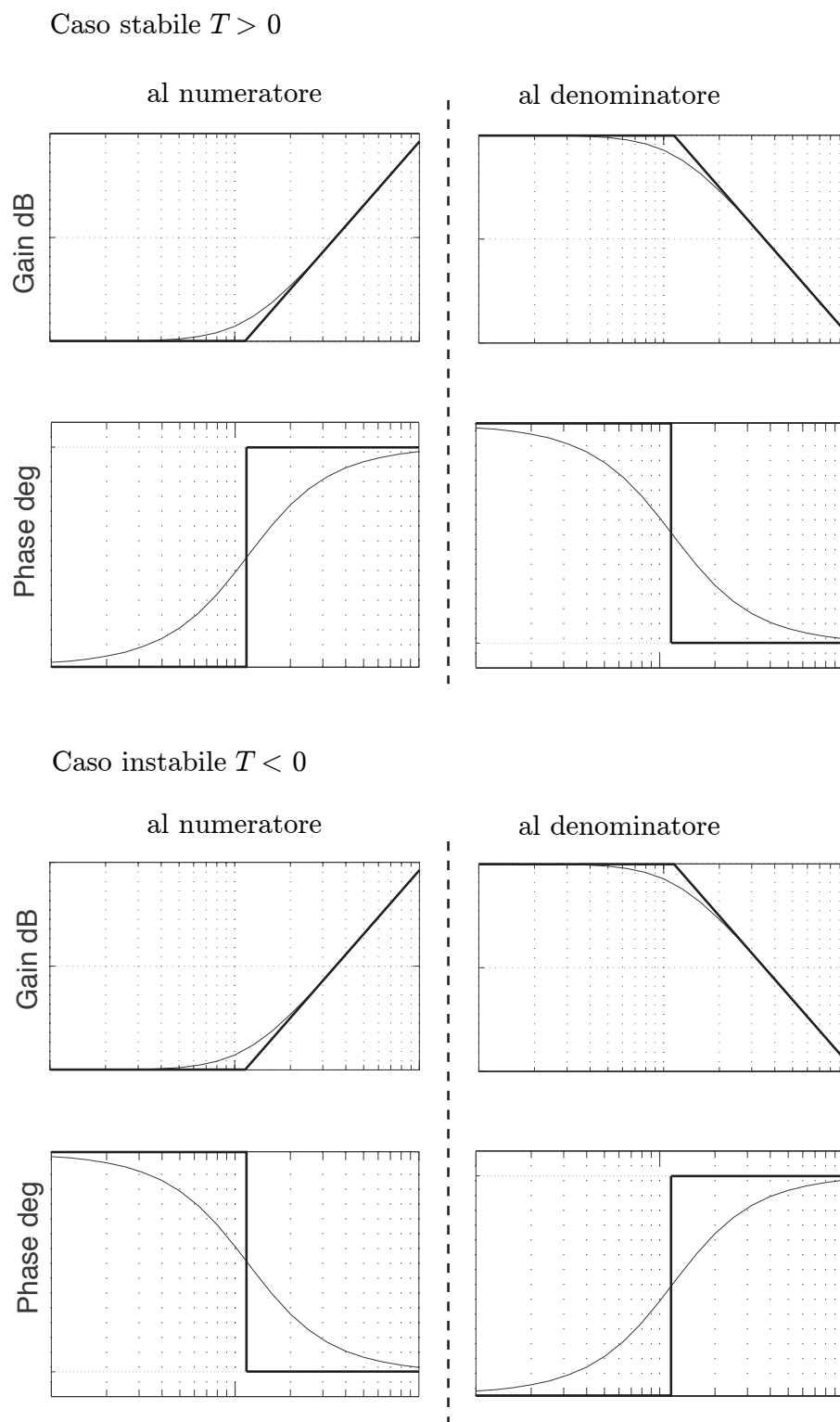


Figure 1.8:

dove $\bar{x} = \log \omega_n$ è detto **punto di spezzamento** mentre la corrispondente pulsazione $\bar{\omega} = \omega_n$ è detta **pulsazione di spezzamento**. Quindi tutti i diagrammi dei moduli della funzione elementare $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ coincidono con quello in cui $\omega_n = 1$ a meno di una opportuna traslazione. Inoltre il diagramma dei moduli dipende solo $|\xi|$ cioè è indipendente dal segno di ξ . Analizziamo i valori asintotici

$$y = \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} \simeq \begin{cases} 20 \log |1| = 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \quad (x \rightarrow -\infty) \\ 20 \log \left| \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = 40x - 40 \log \omega_n & \text{se } \omega \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Quindi la approssimazione asintotica del modulo della funzione elementare $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ è data da due rette, la prima $y = 0$ e la seconda $y = 40x - 40 \log \omega_n$ che ha pendenza 40 decibel per decade che interseca l'asse delle ascisse nel punto di spezzamento \bar{x} . Per questo motivo, per semplificare il tracciamento dei diagrammi dei moduli si approssima il diagramma di questa funzione elementare con le due semirette (vedi figura 1.9)

- (a) la semiretta $y = 0$ che coincide con l'asse delle ascisse per $x \in (-\infty, \bar{x}]$.
- (b) la retta $y = 40x - 40 \log \omega_n$ per $x \in [\bar{x}, +\infty)$.

Il diagramma costituito da queste due rette è detto diagramma asintotico di $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$.

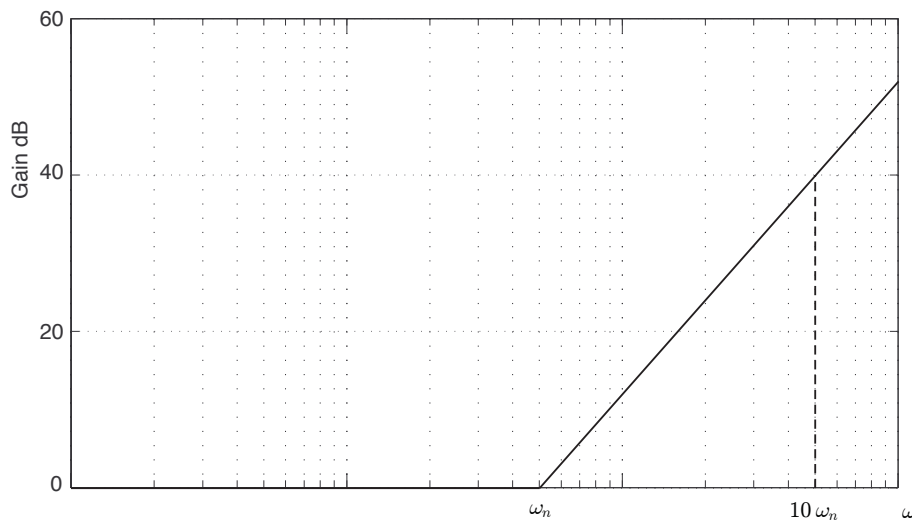


Figure 1.9:

Si noti che il diagramma asintotico dipende solo da ω_n . L'errore di approssimazione dipenderà quindi dallo smorzamento ξ e più precisamente da $|\xi|$. Nella figura 1.10 è

possibile valutare la differenza tra i diagrammi veri e quelli asintotici al variare di ξ . Nel punto di spezzamento, cioè per $\omega = \omega_n$, si ha

$$\left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = (\omega = \omega_n) = 20 \log |2\xi| = \begin{cases} 6_{\text{dB}} & |\xi| = 1 \\ 3_{\text{dB}} & |\xi| = 1/\sqrt{2} \\ 0_{\text{dB}} & |\xi| = 1/2 \\ -\infty & |\xi| = 0. \end{cases}$$

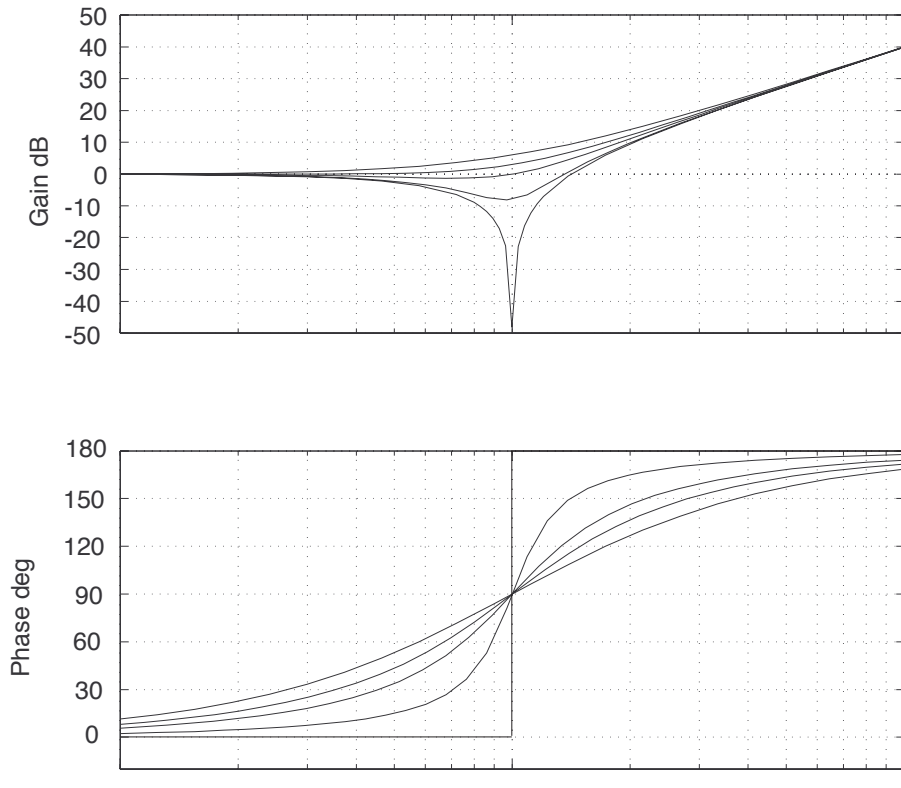


Figure 1.10:

Possiamo concludere che per valori piccoli di $|\xi|$ la deviazione del diagramma vero rispetto a quello asintotico può essere cospicua. Cerchiamo di determinare il picco relativo al minimo. Per fare questo deriviamo rispetto a ω

$$\frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = -2 \frac{\omega}{\omega_n^2} 2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + 8\xi^2 \frac{\omega}{\omega_n^2} = 0.$$

da cui otteniamo

$$\tilde{\omega} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

Il minimo esiste solo se $|\xi| < 1/\sqrt{2}$ e vale

$$\left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\tilde{\omega} - \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_n^2} \right|_{\text{dB}} = 20 \log(2\xi \sqrt{1 - \xi^2}) = 6 + 20 \log \xi + 10 \log(1 - \xi^2).$$

Si noti che per $\xi = 0$ si ha un asintoto $-\infty$ per $\omega \rightarrow \omega_n$. Ciò corrisponde a due zeri complessi coniugati sull'asse immaginario. Il logaritmo trasforma il valore zero del modulo in $-\infty$.

Fase Per quanto riguarda la fase, si osservi che

$$\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} = \arctan\left[\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right].$$

Anche per le fasi si può dimostrare che il diagramma è la traslazione dei diagrammi nei casi in cui $\omega_n = 1$. Ciò che fa cambiare il diagramma è ξ . Preferiamo separare l'analisi considerando prima il caso in cui $\xi > 0$, corrispondente al caso in cui il polinomio $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ è stabile, e poi il caso in cui $\xi < 0$, corrispondente al caso in cui il polinomio $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ è instabile.

Caso stabile $\xi > 0$ Il grafico delle fase in questo caso è illustrato in figure 1.10. Analizziamo i valori asintotici

$$\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} = \begin{cases} 0 & \omega \rightarrow 0^+ & (x \rightarrow -\infty) \\ \frac{\pi}{2} & \omega = \bar{\omega} = \omega_n & (x = \bar{x}) \\ \pi & \omega \rightarrow +\infty & (x \rightarrow +\infty). \end{cases}.$$

Il diagramma asintotico è quindi semplicemente (vedi figura 1.11)

$$\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} \simeq \begin{cases} 0 & \omega < \omega_n \\ \pi & \omega > \omega_n \end{cases}.$$

e dipende anche in questo caso solo da ω_n . Questa è però una approssimazione grossolana. Una approssimazione migliore è possibile usando una ulteriore retta tangente al diagramma in corrispondenza della pulsazione di attraversamento. L'errore tra il diagramma vero e quello asintotico dipenderà da ξ . I diagrammi veri sono riportati nella figura 1.10. Si noti che, se $\xi \rightarrow 0$, il grafico vero tende a quello asintotico.

Caso instabile $\xi < 0$ Poichè cambiando segno a ξ , si cambia segno alla fase, allora se $\xi < 0$ si ha che

$$\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n} = -\angle\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j2|\xi|\frac{\omega}{\omega_n},$$

e quindi il diagramma cambia semplicemente di segno (vedi figura 1.11).

Infine per quanto riguarda la funzione

$$\frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}},$$

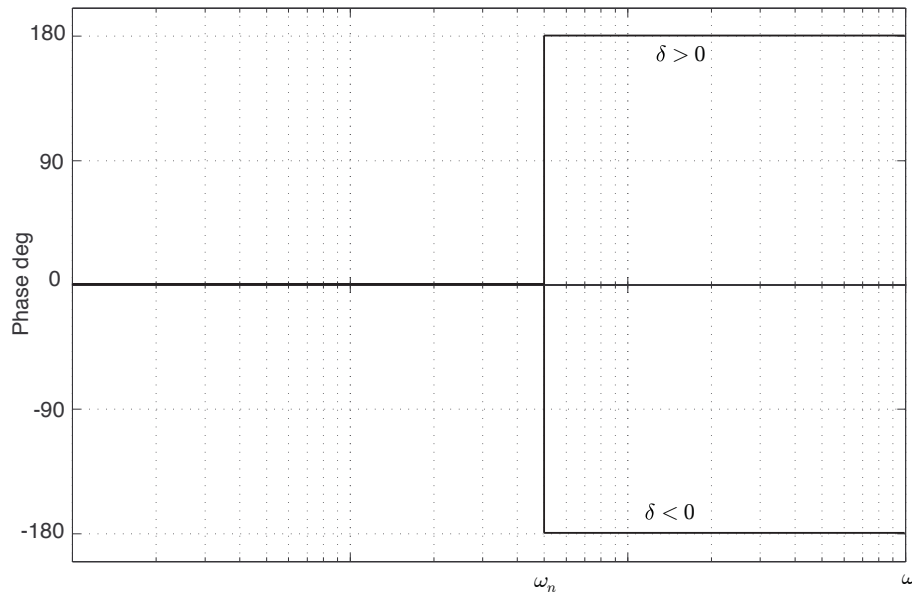


Figure 1.11:

come al solito i diagrammi del modulo e della fase coincidono con l'opposto di quello trovati prima (vedi figura 1.12). Si nota che per $\xi = 0$ in questo caso si ha l'asintoto a $+\infty$ per $\omega \rightarrow \omega_n$. Ciò corrisponde alla presenza di due poli complessi coniugati sull'asse immaginario.

Anche per la funzione elementare $1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}$ una descrizione riassuntiva dei diagrammi di Bode è data dalla figura 1.8 con la sola accortezza che per il diagrammi dei moduli le pendenze diventano di 40_{dB} per decade e gli incrementi delle fasi sono di π . Anche in questo caso comunque nel caso stabile abbiamo che i diagrammi dei moduli e delle fasi sono concordi nella loro crescita o nella loro decrescenza, mentre nel caso instabile sono discordi e che se la funzione elementare appare a numeratore allora il diagramma dei moduli cresce, mentre se questa appare a denominatore allora il suo diagramma dei moduli decresce.

1.2 Tracciamento dei diagrammi di Bode

Data $W(j\omega)$ in forma di Bode, i diagrammi di Bode si ottengono per sovrapposizione dei diagrammi delle funzioni elementari componenti. Vediamo alcune regole pratiche per il tracciamento dei diagrammi asintotici:

1. Individuare i punti di spezzamento

$$\log \left| \frac{1}{T_k} \right|, \quad \log \left| \frac{1}{\bar{T}_k} \right|, \quad \log \omega_{nk}, \quad \log \bar{\omega}_{nk}$$

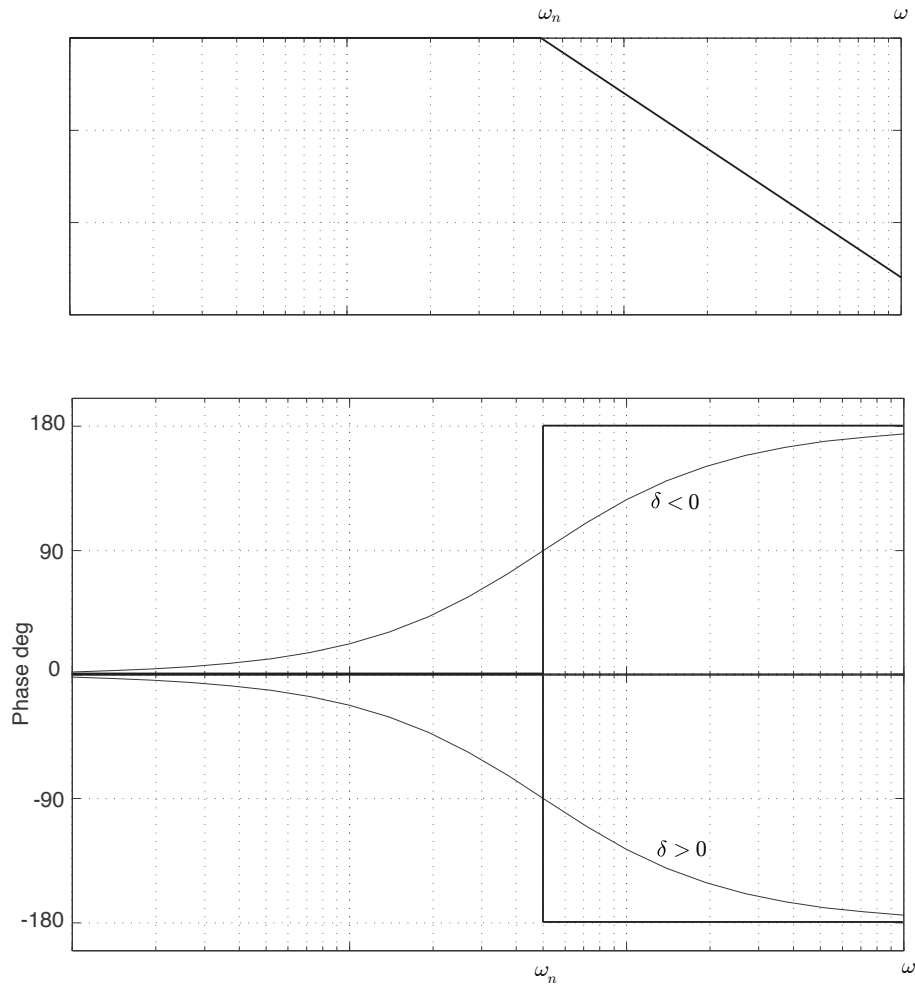


Figure 1.12:

2. Per il diagramma dei moduli

- Si parte il diagramma dei moduli di $\frac{K_B}{s^l}$.
- Partendo dal punto di spezzamento più piccolo (e quindi più a sinistra), ad ogni punto di spezzamento si varia la pendenza di

ν_k (20dB/decade)	zero reale con molteplicità ν_k
$\bar{\nu}_k$ (-20dB/decade)	polo reale con molteplicità $\bar{\nu}_k$
μ_k (40dB/decade)	zeri complessi coniugati con molteplicità μ_k
$\bar{\mu}_k$ (-40dB/decade)	poli complessi coniugati con molteplicità $\bar{\mu}_k$.

3. Per il diagramma delle fasi

- Si parte il diagramma delle fasi di $\frac{K_B}{s^l}$.
- Ad ogni punto di spezzamento si varia la fase di

$\nu_k \left(\frac{\pi}{2}\right)$	zero reale stabile ($T > 0$) con molteplicità ν_k
$\nu_k \left(-\frac{\pi}{2}\right)$	zero reale instabile ($T < 0$) con molteplicità ν_k
$\bar{\nu}_k \left(-\frac{\pi}{2}\right)$	polo reale stabile ($T > 0$) con molteplicità $\bar{\nu}_k$
$\bar{\nu}_k \left(\frac{\pi}{2}\right)$	polo reale instabile ($T < 0$) con molteplicità $\bar{\nu}_k$
$\mu_k (\pi)$	zeri complessi coniugati stabili ($\xi > 0$) con molteplicità μ_k
$\mu_k (-\pi)$	zeri complessi coniugati instabili ($\xi < 0$) con molteplicità μ_k
$\bar{\mu}_k (-\pi)$	poli complessi coniugati stabile ($\xi > 0$) con molteplicità $\bar{\mu}_k$
$\bar{\mu}_k (\pi)$	poli complessi coniugati instabili ($\xi < 0$) con molteplicità $\bar{\mu}_k$.

4. I diagrammi esatti si ottengono da quelli asintotici sommando all'ordinata dell'asintoto i termini di correzione relativi ai fattori del primo e del secondo ordine.

1.3 Sistemi passa tutto

Sia

$$W(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}.$$

Si noti che

$$\begin{aligned} |W(j\omega)|_{dB} &= 20 \log |1 - j\omega T| - 20 \log |1 + j\omega T| = 0 \\ \angle W(j\omega) &= \angle(1 - j\omega T) - \angle(1 + j\omega T) = -2\angle(1 + j\omega T). \end{aligned}$$

I diagrammi di Bode di $W(s)$ sono illustrati in figura 1.13.

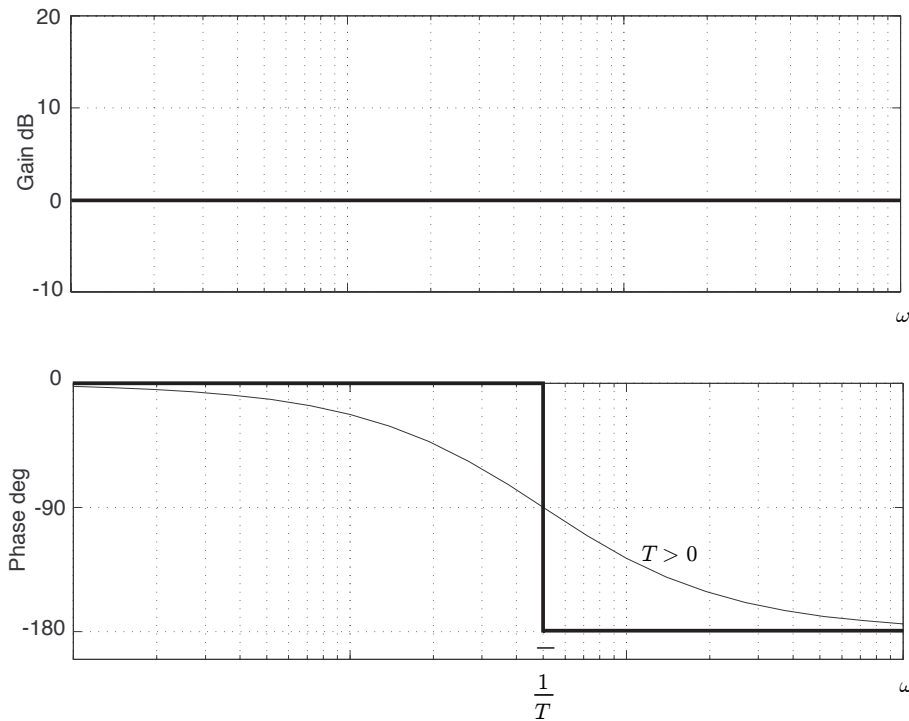


Figure 1.13:

Si vede che il diagramma dei moduli coincide col diagramma dei moduli di $W(s) = 1$. Un sistema con questa funzione di trasferimento è detto passatutto, perché amplifica in maniera uniforme tutte le frequenze. Un'altra classe di sistemi passatutto sono quelli con funzioni di trasferimento

$$W(s) = \frac{1 - \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}.$$

Si noti infine che se $W_1(s)$, $W_2(s)$ sono passatutto allora anche il prodotto $W_1(s)W_2(s)$ è passatutto.

1.4 Sistemi a fase minima e formula di Bode

I sistemi passatutto dimostrano che esistono differenti funzioni di trasferimento con lo stesso diagramma dei moduli. Quindi il solo diagramma dei moduli non individua la funzione di trasferimento. Se tuttavia ci limitiamo alla classe di funzioni di trasferimento a fase minima, allora è vero che il diagramma dei moduli individua da solo $W(s)$.

Definizione 1.3 $W(s)$ razionale è detta a fase minima se ha tutti gli zeri e i poli nel semipiano stabile $\text{Re}(s) < 0$.

Si può dimostrare che se $W_1(s), W_2(s)$ sono a fase minima e $|W_1(j\omega)| = |W_2(j\omega)|$, $\forall \omega$, allora $W_1(s) = W_2(s)$. È possibile dimostrare questo fatto usando la **formula di Bode**. Tale formula permette di ricostruire la fase $\angle W(j\omega)$ a partire dal modulo $|W(j\omega)|$ per le $W(s)$ a fase minima.

Formula di Bode Sia $\bar{\omega} \in [0, +\infty)$. Se $W(s)$ è a fase minima con guadagno di Bode positiva, allora

$$\angle W(j\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\omega} (\ln |W(j\omega)|) \ln \left| \frac{\omega + \bar{\omega}}{\omega - \bar{\omega}} \right| d\omega,$$

dove col simbolo \ln indichiamo il logaritmo in base e .

Le funzioni di trasferimento con poli e zeri stabili sono dette a fase minima perché esse hanno la fase minima tra tutte le funzioni di trasferimento aventi stesso modulo. Più precisamente se $W_1(s), W_2(s)$ sono stabili e hanno stesso modulo $|W_1(j\omega)| = |W_2(j\omega)|$ e se $W_1(s)$ è a fase minima, allora:

$$\angle W_1(j\omega) \leq \angle W_2(j\omega) \quad \forall \omega.$$

Nella classe delle funzioni di trasferimento a fase minima è quindi possibile stimare $W(s)$ e quindi i suoi zeri e poli a partire da valori eventualmente sperimentali di $|W(j\omega)|_{\text{dB}}$. Ciò può essere fatto in pratica cercando di stimare i punti di spezzamento e da questi stimare i coefficienti delle funzioni elementari che compongono $W(s)$.

Esercizio 1.4 Stimare $W(s)$ del diagramma di Bode mostrato in figura 1.14, sapendo che $W(s)$ è a fase minima.

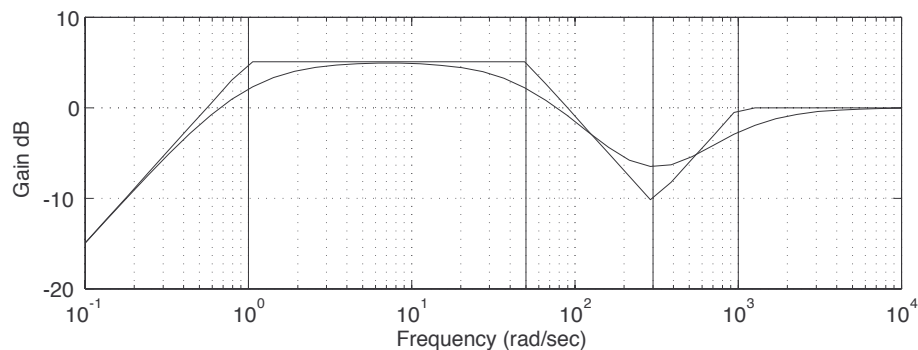


Figure 1.14:

1.5 Esempi di tracciamento di diagrammi di Bode

Esempio 1.5 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{10}{s^2}.$$

La sua forma di Bode è

$$W(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2}.$$

Si noti infine che $|10|_{\text{dB}} = 20 \log 10 = 20_{\text{dB}}$. Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.15.

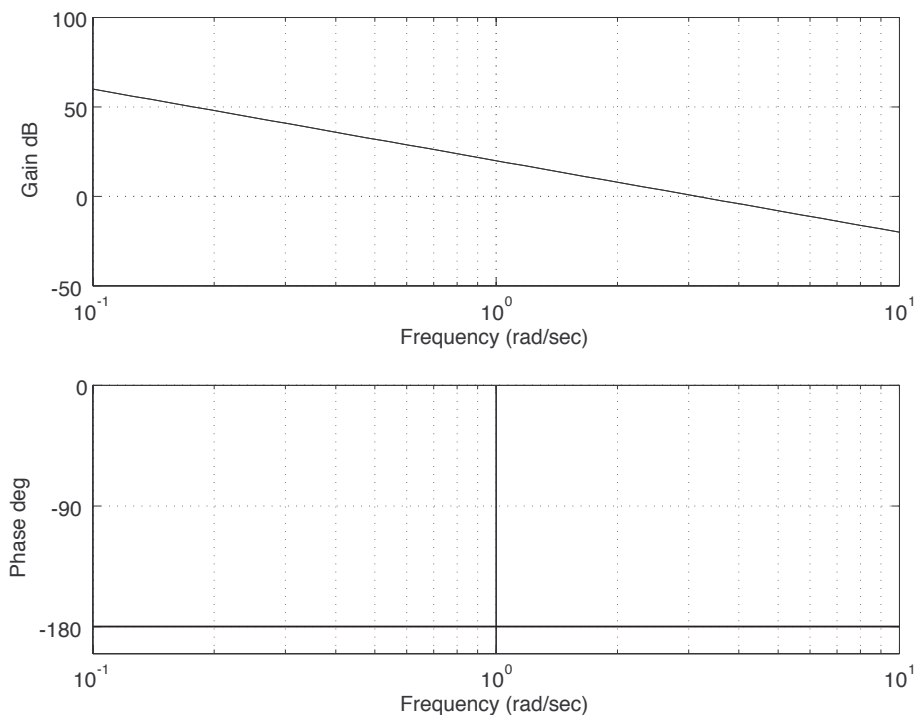


Figure 1.15:

Esempio 1.6 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{2} \frac{1 + 10s}{s^2}.$$

che è già in forma di Bode. Si noti che $|1/2|_{\text{dB}} = -6_{\text{dB}}$. Il punto di spezzamento è

$$\bar{\omega} = \frac{1}{10}.$$

Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.16.

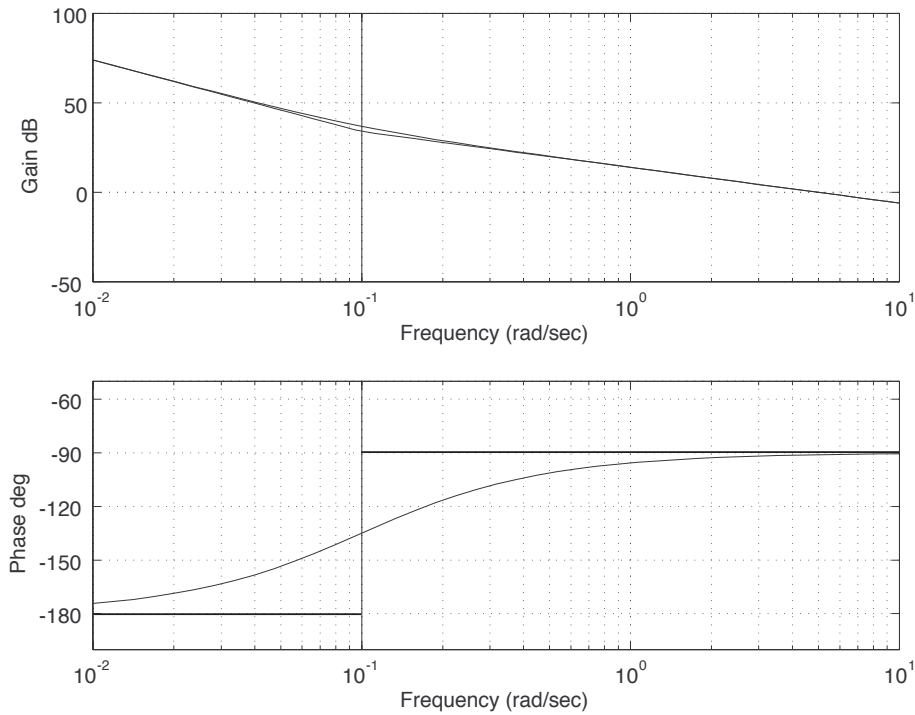


Figure 1.16:

Esempio 1.7 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = 200 \frac{s + 2}{s(s^2 + 10s + 100)}.$$

La sua forma di Bode è

$$W(s) = 200 \frac{2(1 + \frac{s}{2})}{100(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100})s} = 4 \frac{1 + \frac{s}{2}}{(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100})s}.$$

Si noti che $|4|_{\text{dB}} = 12_{\text{dB}}$. I punti di spezzamento sono $\bar{\omega}_1 = 1/2$ e $\bar{\omega}_2 = 10$. Inoltre $\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{10}$ che implica $\xi = \frac{1}{2}$. Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.17.

Esempio 1.8 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = 300 \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s + 10)(s + 20)}.$$

La sua forma di Bode è

$$W(s) = 300 \frac{4}{10 \cdot 20} \frac{1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{20})} = 6 \frac{1 + \frac{s}{2} + \frac{s^2}{4}}{s(1 + \frac{s}{10})(1 + \frac{s}{20})}.$$

Il guadagno di Bode è $K = 6$ e quindi $|K|_{\text{dB}} = 15_{\text{dB}}$. I punti di spezzamento sono $\bar{\omega}_1 = 1/10$, $\bar{\omega}_2 = 1/20$ e $\bar{\omega}_3 = 2$ con $\xi = 1/2$. Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.18.

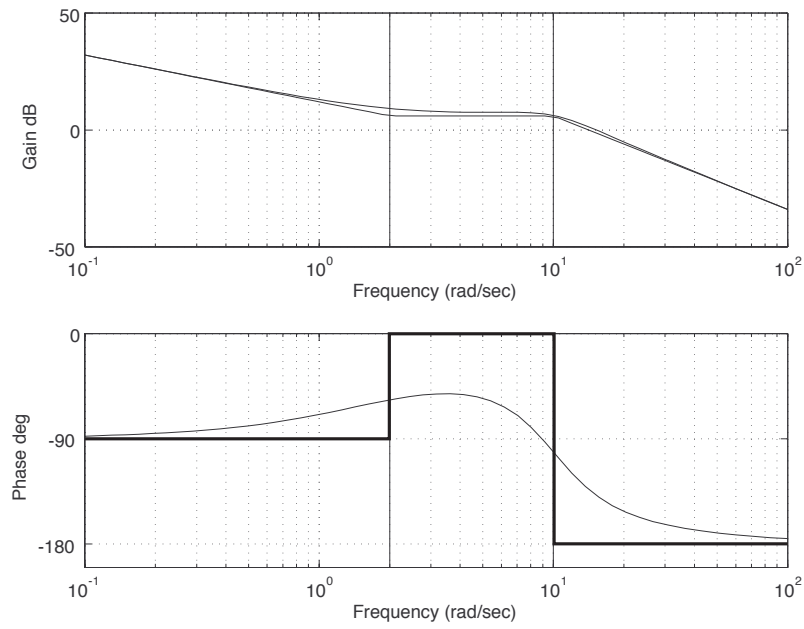


Figure 1.17:

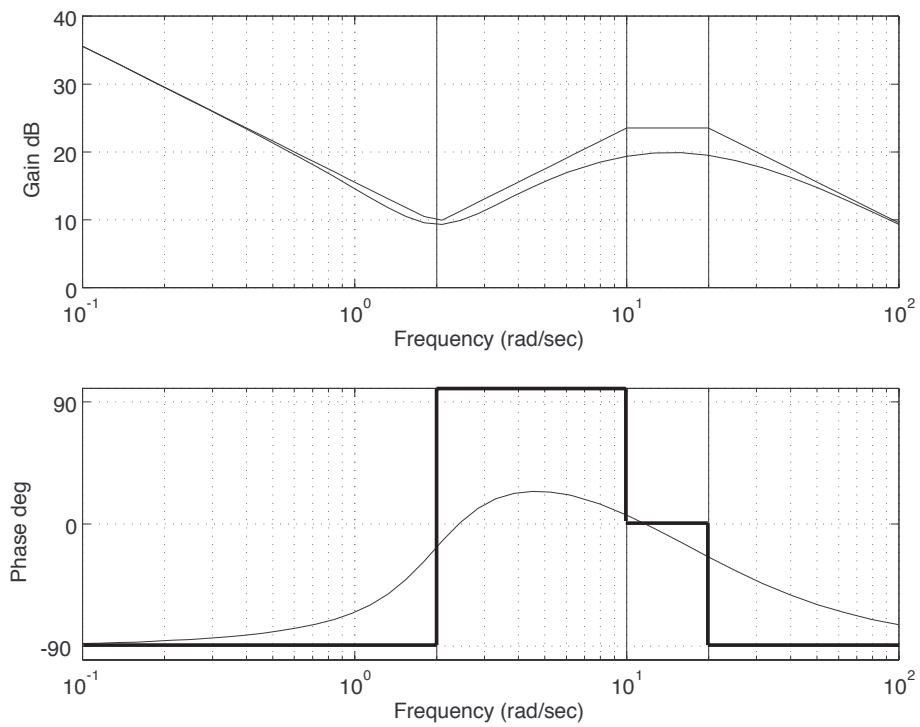


Figure 1.18:

Esempio 1.9 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s}{(s+1)(s-2)} = -\frac{1}{2} \frac{s}{(1+s)(1-s/2)}.$$

Come visto nel capitolo dedicato al diagramma di Nyquist, siamo in un caso in cui il diagramma di Nyquist sta su una circonferenza. Tuttavia dal diagramma di Bode in figura 1.19 si deduce che tale circonferenza è percorsa solo in parte (vedi figura 1.20).

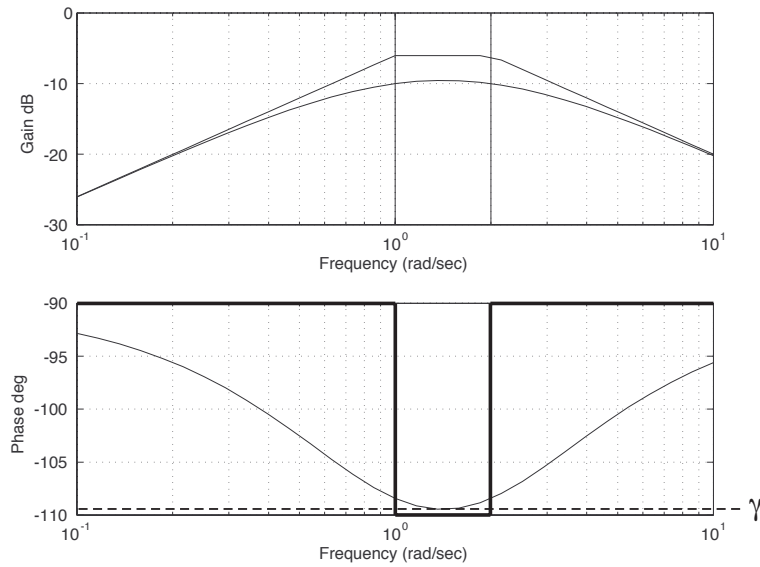


Figure 1.19:

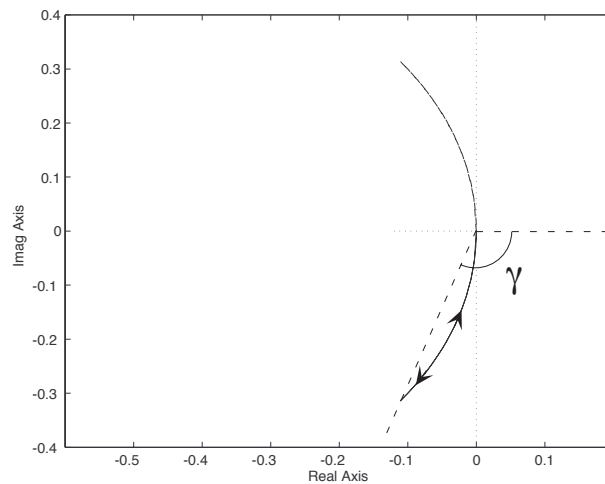


Figure 1.20:

Esempio 1.10 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

In questo $W(s)$ è già in forma di Bode con guadagno di Bode 1. C'è un solo punto di spezzamento in $\bar{\omega} = 1$. Il diagramma di Bode è mostrato nella figura 1.21. Tracciamo ora il diagramma di Nyquist. Si noti che

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} \\ &= \frac{1-j\omega}{j\omega(1+\omega^2)} \\ \operatorname{Re}[W(j\omega)] &= -\frac{1}{1+\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -1 \\ \operatorname{Im}[W(j\omega)] &= -\frac{1}{\omega(1+\omega^2)} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\infty, \end{aligned}$$

il che dimostra che esiste un asintoto verticale che passa per il punto -1 . Inoltre per $\omega \simeq +\infty$ si ha

$$\angle W(j\omega) \simeq \angle -\frac{1}{\omega^2} = \pi$$

e per $\omega \simeq 0^+$ si ha

$$\angle W(j\omega) \simeq \angle \frac{1}{j\omega} = -\frac{\pi}{2}.$$

Il diagramma di Nyquist è mostrato nella figura 1.22.

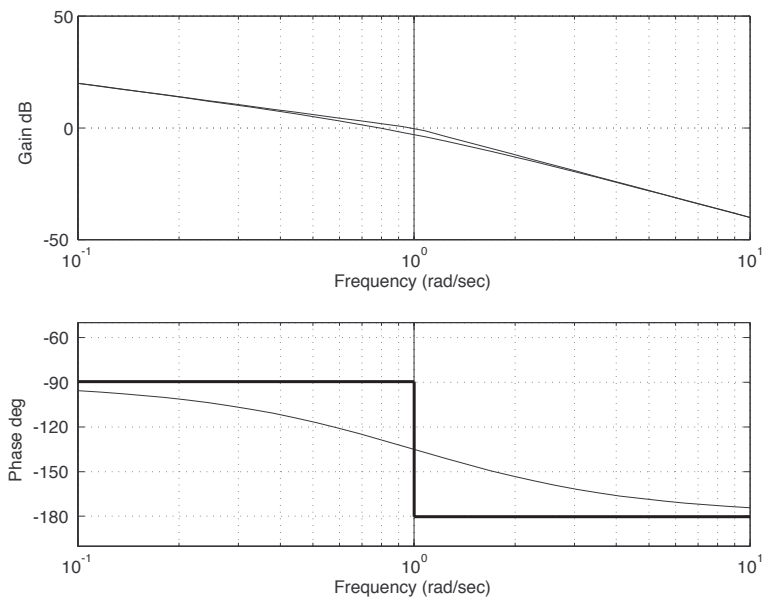


Figure 1.21:

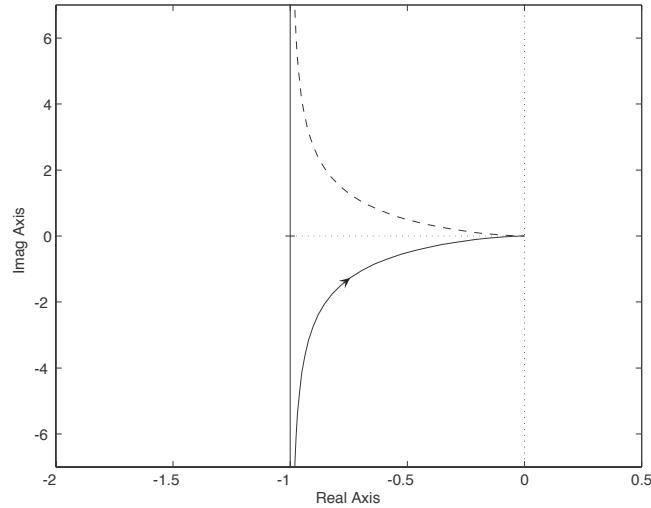


Figure 1.22:

Esempio 1.11 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{s^2(s+1)}.$$

In questo $W(s)$ è già in forma di Bode con guadagno di Bode 1. C'è un solo punto di spezzamento in $\bar{\omega} = 1$. Il diagramma di Bode è mostrato nella figura 1.23. Tracciamo ora il diagramma di Nyquist. Si noti che

$$W(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2(1+j\omega)} = \frac{1-j\omega}{-\omega^2(1+\omega^2)}.$$

Per $\omega \simeq 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[W(j\omega)] &= -\frac{1}{\omega^2(1+\omega^2)} \simeq -\frac{1}{\omega^2} \\ \operatorname{Im}[W(j\omega)] &= \frac{1}{\omega(1+\omega^2)} \simeq \frac{1}{\omega}. \end{aligned}$$

Si deduce che l'andamento asintotico della parte reale rispetto alla parte immaginaria sarà di tipo parabolico. In questo caso non esistono asintoti. Il diagramma di Nyquist è mostrato nella figura 1.24.

Esempio 1.12 Consideriamo la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1+s}{1+s^2/2}.$$

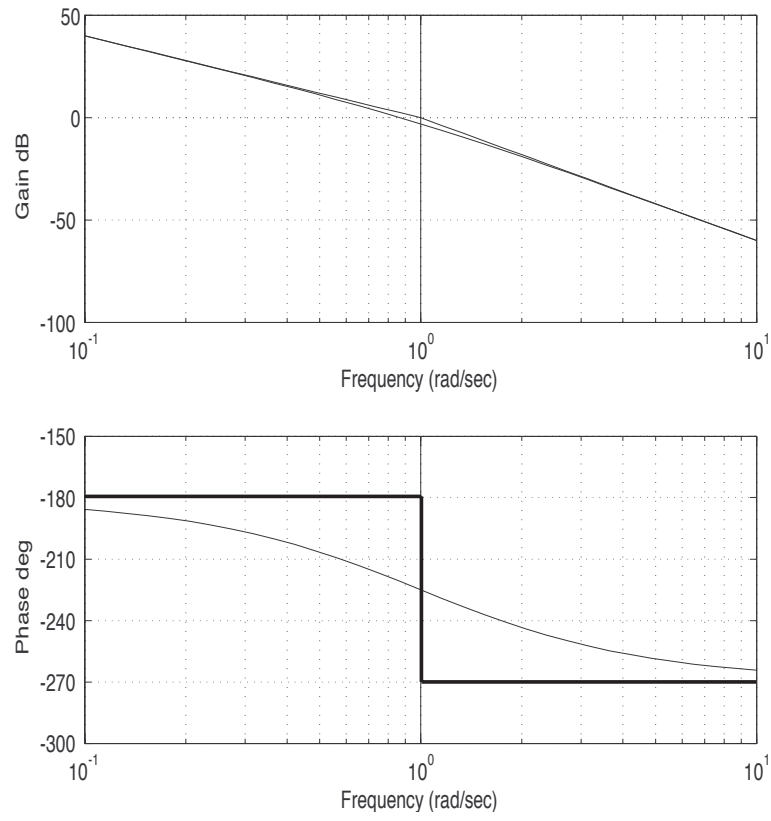


Figure 1.23:

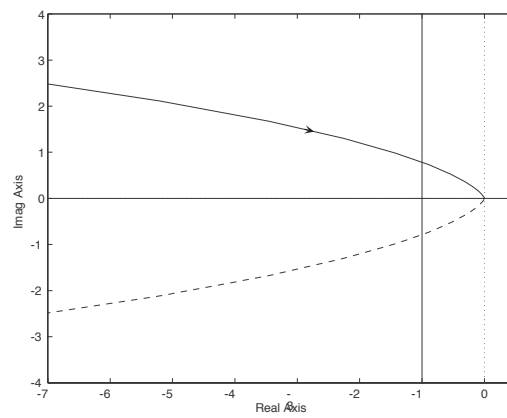


Figure 1.24:

In questo $W(s)$ è già in forma di Bode con guadagno di Bode 1. I punti di spezzamento sono $\bar{\omega}_1 = 1$ e $\bar{\omega}_2 = \sqrt{2}$ con $\xi = 0$. Il diagramma di Bode è mostrato in figura 1.25. Si noti il brusco cambiamento di fase in corrispondenza del punto di spezzamento $\bar{\omega}_2 = \sqrt{2}$ dovuto alla presenza del polo sull'asse immaginario in $s = j\sqrt{2}$.

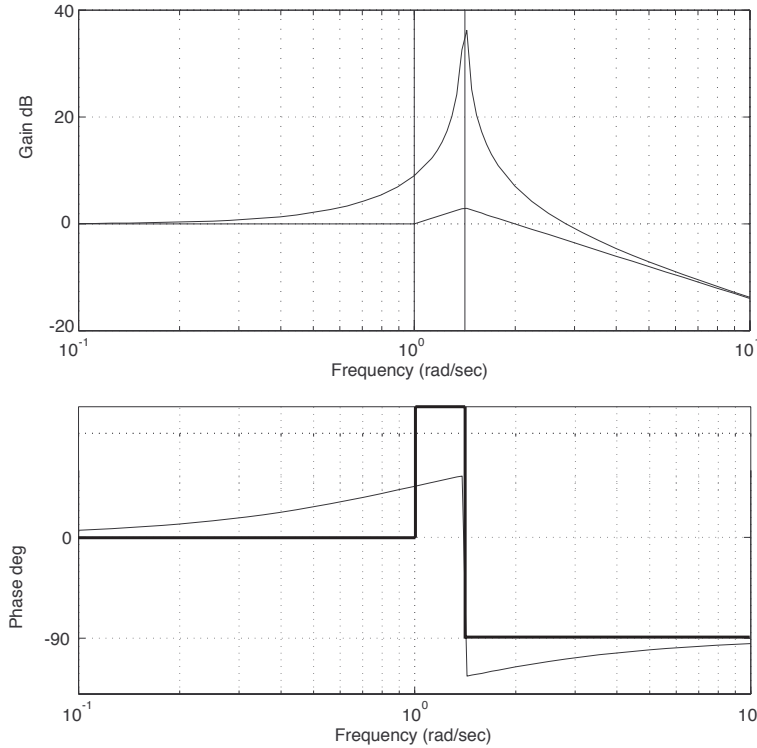


Figure 1.25:

Tracciamo ora il diagramma di Nyquist. In questo caso il diagramma di Nyquist (vedi figura 1.26) andrà all' ∞ per $\omega \rightarrow \sqrt{2}$. Vediamo se ci sono asintoti in questo caso. Infatti

$$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 - \frac{\omega^2}{2}}$$

$$\operatorname{Re}[W(j\omega)] = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{2}}$$

$$\operatorname{Im}[W(j\omega)] = \frac{\omega}{1 - \frac{\omega^2}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{Im}[W(j\omega)]}{\operatorname{Re}[W(j\omega)]} = \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow \sqrt{2}} \sqrt{2} \quad \implies \operatorname{Im}[W(j\omega)] \simeq \sqrt{2} \operatorname{Re}[W(j\omega)]$$

$$\operatorname{Im}[W(j\omega)] - \sqrt{2} \operatorname{Re}[W(j\omega)] = \frac{\omega - \sqrt{2}}{1 - \frac{\omega^2}{2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \sqrt{2}} -1/\sqrt{2}$$

Possiamo concludere che l'asintoto è dato dalla retta

$$y = \sqrt{2}x - 1/\sqrt{2}.$$

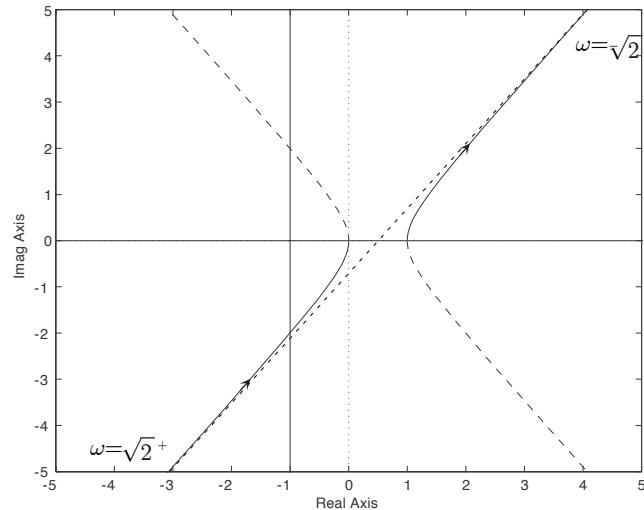


Figure 1.26:

1.6 Determinazione dei margini di guadagno e di fase a partire dal diagramma di Bode

Il grosso vantaggio dei margini di guadagno m_a e di fase m_φ rispetto al margine di stabilità m sta nel fatto che questi sono determinabili a partire dal diagramma di Bode e dal fatto che il diagramma di Bode è molto più semplice da tracciare rispetto al diagramma di Nyquist. Questo fatto sarà largamente utilizzato nel prossimo capitolo dedicato alla sintesi in frequenza.

Vogliamo ora mostrare come i margini di guadagno m_a e di fase m_φ di una funzione di trasferimento $W(s)$ siano determinabili a partire dal diagramma di Bode di $W(s)$. Facendo riferimento alla figura 1.27, si noti che, sapendo che il guadagno di Bode di $W(s)$ è positivo (informazione che deve essere data a priori), dal diagramma di Bode di $W(s)$ è desumibile il tipo del sistema. Inoltre, se la funzione di trasferimento $W(s)$ non ha poli o zeri sull'asse immaginario, allora il diagramma delle fasi è esattamente il diagramma della funzione che è stata introdotta nella sezione dove i margini di guadagno e di fase sono stati definiti. Quindi ω_A risulta essere la pulsazione in cui il diagramma dei moduli incontra l'asse delle ascisse, mentre ω_B risulta essere la pulsazione in cui il diagramma delle fasi incontra la retta orizzontale corrispondente alla fase $-\pi$.

1.6 Determinazione dei margini di guadagno e di fase a partire dal diagramma di Bode

A partire da ω_A si riesce a determinare la fase $\angle W(j\omega_A)$ a valutare se tale valore sta sopra o sotto la retta orizzontale corrispondente alla fase $-\pi$. Se sta sopra, allora il sistema retroazionato sarà stabile e la lunghezza del segmento che va da $\angle W(j\omega_A)$ a $-\pi$ dà il margine di fase. In caso contrario, il margine di fase è negativo e quindi il sistema retroazionato sarà instabile. A partire da ω_B invece possiamo determinare $|W(j\omega_B)|_{dB}$. Se tale punto sta sotto l'asse delle ascisse, allora il sistema retroazionato sarà stabile e la lunghezza del segmento che va da $|W(j\omega_B)|_{dB}$ all'asse delle ascisse dà il margine di guadagno. In caso contrario, il sistema retroazionato sarà instabile.

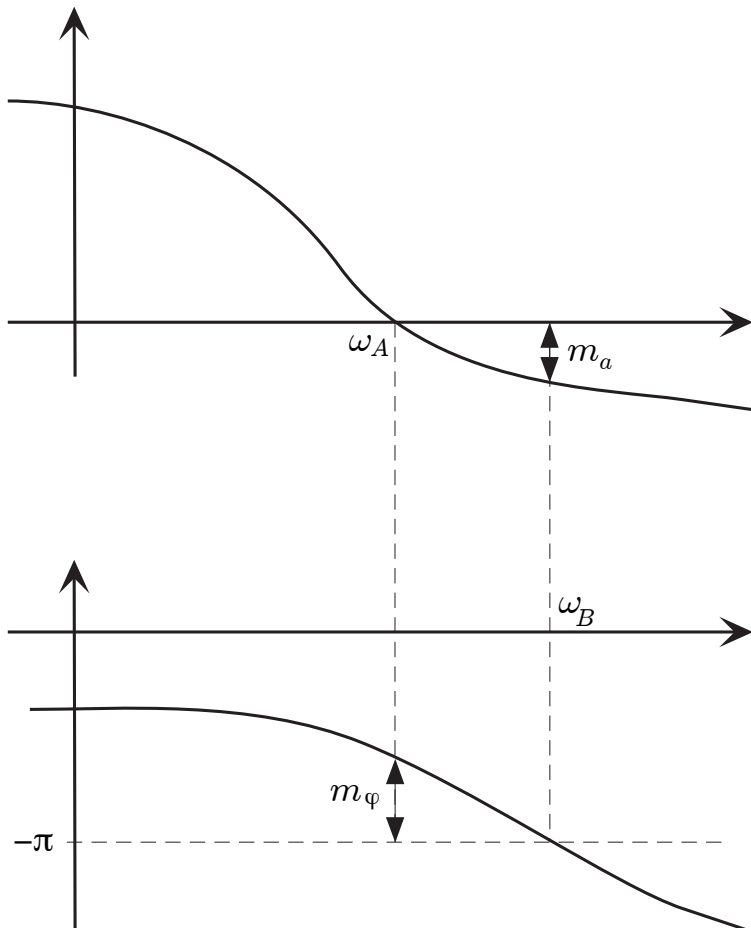


Figure 1.27: