# Chapter 1

# Risposta a segnali canonici

In questo capitolo analizziamo la risposta forzata di un sistema descritto da una funzione di trasferimento quando sia alimentato da segnali canonici. I segnali canonici che considereremo saranno i segnali sinusoidali, il gradini, la rampa e la rampa parabolica. Questi segnali sono importanti perchè la maggior parte dei segnali di riferimento di un sistema controllato coincidono con questi tipi si segnali o con una loro sovrapposizione.

## 1.1 Risposta a regime a segnali sinusoidali: risposta in frequenza

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)},$$

che supponiamo **propria e BIBO stabile**. Supponiamo di applicare un ingresso sinusoidale

$$u(t) = \cos(\omega t + \varphi) \quad t \geq 0$$

che ha trasformata di Laplace

$$\begin{aligned} U(s) &= \mathcal{L}[\cos(\omega t + \varphi)](s) \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)}}{2}\right](s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s + j\omega}\right) \end{aligned}$$

in cui abbiamo sfruttato il fatto che $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$ e che $\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right](s) = \frac{1}{s-\alpha}$.

Questa genererà una risposta forzata

$$Y(s) = W(s)U(s).$$

Poiché $W(s)$ è propria, allora $Y(s)$ è razionale strettamente propria e quindi si potrà espandere in fratti semplici. Si noti che $Y(s)$ avrà tra i suoi poli $\pm j\omega$ con molteplicità 1 e in più i poli di $W(s)$ che saranno tutti a parte reale minore di zero. Si avrà perciò

$$Y(s) = \frac{A}{s - j\omega} + \frac{B}{s + j\omega} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k}$$

con $p_i$ poli di $W(s)$, $\mathrm{Re}\, p_i < 0$.
Si noti che

$$\begin{aligned} A &= (s - j\omega)Y(s)|_{s=j\omega} = (s - j\omega)\frac{1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\varphi}}{s + j\omega}\right) W(s)\bigg|_{s=j\omega} = \\ &= \frac{1}{2}e^{j\varphi}W(j\omega). \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che

$$B = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}W(-j\omega).$$

Si noti che, poiché $a(s)$ e $b(s)$ sono polinomi a coefficienti costanti reali, allora

$$W(-j\omega) = \frac{b(-j\omega)}{a(-j\omega)} = \frac{\overline{b(j\omega)}}{\overline{a(j\omega)}} = \overline{W(j\omega)},$$

da cui segue che

$$B = \frac{1}{2}e^{-j\varphi}W(-j\omega) = \frac{1}{2}\overline{e^{j\varphi}}\ \overline{W(j\omega)} = \overline{A}$$

Denotiamo con i simboli $|W(s)|$ e $\angle W(j\omega)$ il modulo e la fase di $W(j\omega)$ in modo tale che

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}.$$

Si ottiene così, antitrasformando $Y(s)$,

$$\begin{aligned} y(t) &= Ae^{j\omega t} + Be^{-j\omega t} + \underbrace{\sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{p_i t}}_{\text{termini } \to 0} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left[Ae^{j\omega t}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0\ ) \\ &= \mathrm{Re}\left[e^{j\varphi}|W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}e^{j\omega}\right] + (\text{ termini } \longrightarrow 0\ ) \\ &= |W(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)) + (\text{ termini } \longrightarrow 0\ ). \end{aligned}$$

Quindi, dopo un transitorio iniziale, il segnale che si osserva in uscita è **ancora sinusoidale con stessa pulsazione** amplificato di un fattore $|W(j\omega)|$ e sfasato di un angolo pari a $\angle W(j\omega)$.

La risposta a questa classe di segnali, detta **risposta in frequenza**, è particolarmente importante perché, attraverso la trasformata di Fourier, un ingresso qualsiasi può essere visto come “sovrapposizione” di infiniti segnali sinusoidali, ciascuno dei quali viene attenuato e sfasato dal sistema a seconda della pulsazione (e quindi frequenza) della componente sinusoidale, secondo il valore di

$$W(j\omega) = |W(j\omega)|e^{j\angle W(j\omega)}.$$

**Osservazione 1.1** Il concetto di risposta in frequenza, da noi introdotto solo per sistemi “stabili”, cioè con poli con $\mathrm{Re}\, s < 0$, può essere in realtà introdotto anche per sistemi instabili. Infatti i calcoli fatti in precedenza restano in realtà validi anche se non ipotizziamo che gli zeri di $a(s)$ siano in $\mathrm{Re}\, s < 0$. L'unica ipotesi che deve restare perché i risultati non cambino è che $j\omega$ non sia uno zero di $a(s)$. Alla fine si ottiene una risposta

$$y(t) = |W(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega)) + \text{ (termini)},$$

dove i termini tra parentesi non sono più trascurabili asintoticamente ma possono addirittura divergere, per cui l'amplificazione $|W(j\omega)|$ e lo sfasamento $\angle W(j\omega)$ risultano difficilmente valutabili. Per poter rendere misurabili tali due valori è necessario stabilizzare mediante retroazione il sistema “instabile” come vedremo più avanti.

**Osservazione 1.2** Se $a(s)$ ha una coppia di zeri complessi coniugati semplici in $\pm j\omega$ e i rimanenti zeri sono stabili, allora si può dimostrare che l'uscita forzata $y_f(t)$ diventa asintoticamente

$$y(t) \simeq R_1 \cos(\omega t + \varphi + \varphi_1) + R_2 t \cos(\omega t + \varphi + \varphi_2)$$

dove $R_1, R_2, \varphi_1$ e $\varphi_2$ dipendono da $W(s)$. Quindi comparirà un modo divergente che oscillerà con pulsazione $\omega$.

## 1.2 Risposta a regime al gradino

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento razionale

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

che supponiamo **propria e BIBO stabile**. Supponiamo di applicare un ingresso a gradino

$$u(t) = 1 \qquad t \geq 0$$

con

$$U(s) = \frac{1}{s}.$$

Questo genera una risposta forzata

$$Y(s) = W(s)\frac{1}{s}.$$

Poiché $W(s)$ è propria, allora $Y(s)$ sarà strettamente propria e quindi si potrà espandere in somma di fratti semplici. Si noti che $Y(s)$ avrà tra i suoi poli i poli di $W(s)$, che stanno nel semipiano $\operatorname{Re} s < 0$, e un polo nell'origine che sarà semplice

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \sum_{ik} \frac{C_{ik}}{(s - p_i)^k},$$

dove $p_i$ sono i poli di $W(s)$, con $\operatorname{Re} p_i < 0$, e

$$A = sY(s)|_{s=0} = W(0).$$

Da ciò segue che

$$y(t) = W(0) + (\text{ termini } \longrightarrow 0) \qquad t \geq 0.$$

Quindi la risposta forzata tenderà a un gradino di ampiezza $W(0)$, che per questo motivo è detto **guadagno in continua** o **guadagno statico**.

## 1.3 Risposta a regime alla rampa, rampa parabolica,...

Vogliamo studiare ora la risposta di un sistema con funzione di trasferimento razionale $W(s)$ a segnali di ingresso del tipo

$$u(t) = \delta^{(-k)}(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!} & t \geq 0 \end{cases}$$

i cui andamenti sono illustrati in figura 1.1.

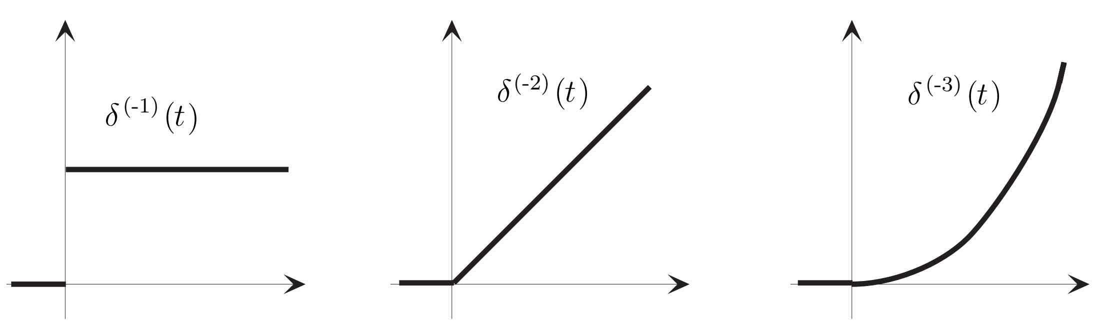


Figure 1.1:

Tali segnali hanno trasformata di Laplace

$$U(s) = \mathcal{L}\left[\delta^{(-k)}\right](s) = \frac{1}{s^k}.$$

Supponiamo come al solito di avere un sistema con funzione di trasferimento razionale $W(s)$ propria con tutti i poli in $\operatorname{Re} s < 0$ a parte un eventuale polo nell'origine con molteplicità $l$. Mettiamo $W(s)$ in forma di Bode

$$W(s) = \frac{K_B}{s^l} \frac{\prod_k (1 + sT_k) \prod_k (1 + 2\xi_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2})}{\prod_k (1 + s\bar{T}_k) \prod_k (1 + 2\bar{\xi}_k \frac{s}{\bar{\omega}_{nk}} + \frac{s^2}{\bar{\omega}_{nk}^2})} = \frac{K_B}{s^l} \overline{W}(s)$$

dove $\overline{W}(s)$ è razionale con tutti i poli in $\operatorname{Re} s < 0$ e $\overline{W}(0) = 1$ e l'intero $l$ è il **tipo** del sistema. La risposta forzata avrà Laplace trasformata

$$Y(s) = W(s)U(s) = W(s)\frac{1}{s^k} = \frac{K_B}{s^{l+k}}\overline{W}(s)$$

che è quindi una funzione razionale strettamente propria. Si noti che

$$\mathcal{L}\left[y^{(k)}\right](s) = s^k \mathcal{L}[y](s) = s^k W(s) \frac{1}{s^k} = \mathcal{L}[w](s)$$

quindi la derivata k-esima di $y$ coincide con la risposta impulsiva.

Cerchiamo ora di antitrasformare $Y(s)$ per ottenere $y(t)$. A tal fine notiamo che $Y(s)$ è strettamente propria e quindi ammette una espansione in fratti semplici

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{l+k} \alpha_j \frac{1}{s^j} + \sum_{ij} \frac{C_{ij}}{(s - p_i)^j} \quad \text{dove } p_i \text{ sono i poli di } \overline{W}(s) \text{ e hanno } \operatorname{Re} p_i < 0$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{l+k} \frac{\alpha_j}{(j-1)!} t^{j-1} + (\text{ termini } \longrightarrow 0 \text{ }).$$

Quindi per tempi grandi $y(t)$ è approssimabile con una funzione polinomiale

$$y(t) \simeq \alpha_1 + \alpha_2 t + \cdots + \frac{\alpha_{l+k}}{(l+k-1)!} t^{l+k-1}.$$

Si osserva che l'ultimo termine è il più significativo

$$y(t) \simeq \frac{\alpha_{l+k}}{(l+k-1)!} t^{l+k-1}$$

Il coefficiente $\alpha_{l+k}$ può essere determinato attraverso la formula dei residui

$$\alpha_{l+k} = s^{l+k} Y(s)|_{s=0} = K_B$$

e quindi

$$y(t) \simeq \frac{K_B}{(l+k-1)!} t^{l+k-1} = K_B \delta^{(-k-l)}(t) \tag{1.1}$$

Intuitivamente si ottiene una risposta dello stesso tipo di quello dell'ingresso con ordine aumentato di $l$ che è il tipo del sistema e amplificata di $K_B$.

**Osservazione 1.3** Si noti che se $k \leq -l$, allora $Y(s)$ non ha poli nell'origine (ha eventualmente zeri nell'origine) e quindi la sua antitrasformata contiene solo modi convergenti a zero. Possiamo concludere che in questo caso $y(t)$ converge a zero ed è quindi approssimabile asintoticamente col segnale nullo.

## 1.4 Analisi del transitorio

L'analisi del transitorio, cioè l'analisi di come l'uscita forzata tenda asintoticamente al suo valore asintotico, è molto più complessa dell'analisi del comportamento a regime proposto precedentemente. In effetti questa analisi è possibile solo nel caso di ingressi a gradino.

La risposta al gradino di un sistema BIBO stabile ha generalmente un andamento del tipo mostrato in figura 1.2. dove sulle ordinate e' indicato l'andamento dell'uscita

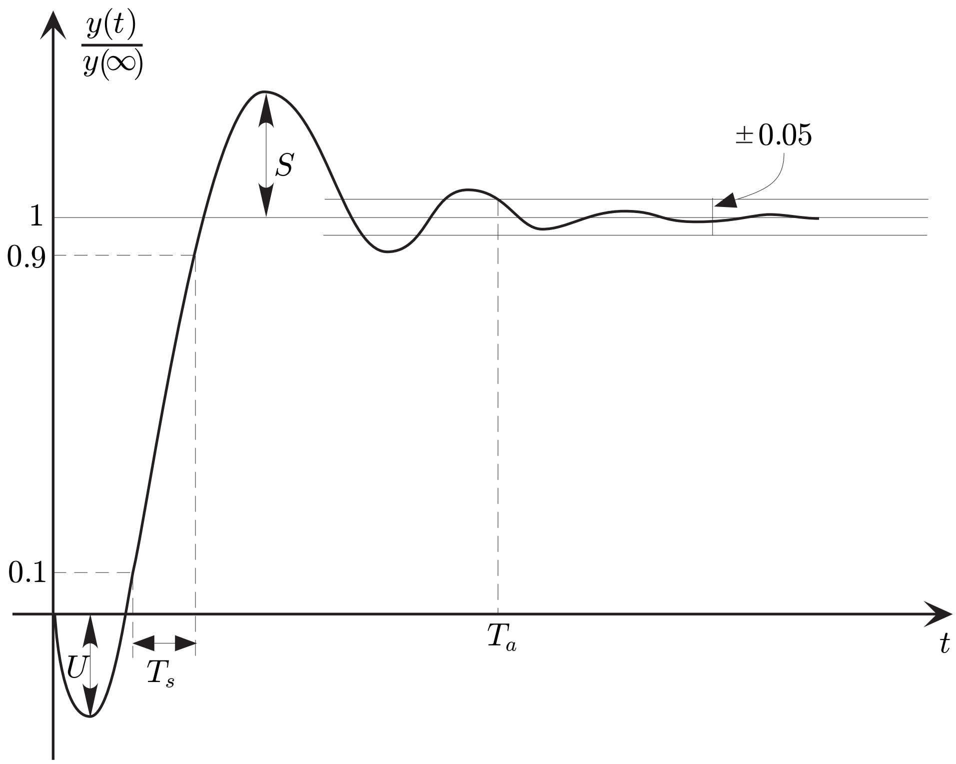


Figure 1.2:

$y(t)$ normalizzata rispeto al suo valore asintotico. Le caratteristiche di questa risposta sono riassunte nei parametri $S$, sovraelongazione, $U$, sottoelengazione, $T_a$, tempo di assestamento e $T_s$, tempo di salita. La sovraelongazione e' definita come

$$S := \frac{y_{\max}}{y(\infty)} - 1$$

dove $y_{\max}$ e' il valore massimo di $y(t)$. La sottoelengazione e' definita come

$$U := \frac{y_{\min}}{y(\infty)}$$

dove $y_{\min}$ e' il valore minimo di $y(t)$. Il tempo di assestamento che e' in tempo necessario alla risposta $y(t)$ per entrare nella fascia $y(\infty)[1-0.05, 1+0.05]$. Il tempo di salita e' il tempo necessario alla risposta $y(t)$ per passare dal valore $0.1\,y(\infty)$ al valote $0.9\,y(\infty)$.

L'andamento della risposta al gradino (e quindi i valori di $S, U, T_a, T_s$) sono determinabili solo per sistemi semplici, cioè sistemi del primo e del secondo ordine privi di zeri. Per sistemi generali è possibile solo fare un'analisi approssimata basata sui poli dominanti. Questa approssimazione si fonda sul fatto che, in un sistema BIBO stabile, la risposta raggiunge il suo regime quando in modi esponenziali convergenti, corrispondenti ai poli stabili del sistema, si sono esauriti. Tanto più i poli solo a sinistra dell'asse immaginario, tanto più il modo esponenziale corrispondente tende ad esaurirsi velocemente. Risulta quindi che i poli più significativi sono quelli più vicini all'asse immaginario. Questi sono detti i **poli dominanti** del sistema. Due sono a questo punto le situazioni più rilevanti:

1. Il polo più vicino all'asse immaginario è semplice e reale.

2. I poli più vicini all'asse immaginario sono semplici e complessi coniugati.

L'analisi basata sui poli dominanti consiste nell'approssimare la funzione di trasferimento con una senza zeri e avente come poli solo quelli dominanti. Più precisamente, se si vuole analizzare il transitorio nella risposta del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ a un segnale di ingresso a gradino, nel caso che il polo dominante sia reale, allora per analizzare il transitorio si approssima $W(s)$ con

$$\hat{W}(s) = \frac{K}{s-p} = \frac{K_B}{1+s\tau}$$

dove $p$ è il polo dominante di $W(s)$ e $K_B$ è il guadagno di Bode di $W(s)$ in modo da assicurare che il comportamento a regime nella risposta a gradino dei due sistemi sia lo stesso.

Se invece si vuole analizzare il transitorio nella risposta del sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ a un segnale di ingresso a gradino, nel caso che in cui i poli dominanti di $W(s)$ siano complessi coniugati, allora per analizzare il transitorio si approssima $W(s)$ con

$$\hat{W}(s) = \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K_B}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove $p_1, p_2$ sono i poli dominanti di $W(s)$ e $K_B$ è il guadagno di Bode di $W(s)$ in modo da assicurare che il comportamento a regime nella risposta a gradino dei due sistemi sia lo stesso.

Per l'analisi del transitorio basata sui poli dominanti risulta perciò necessario studiare il transitorio dei sistemi del primo e del secondo ordine privi di zeri.

### 1.4.1 Sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento $W(s)$ del primo ordine senza poli che in forma di Bode risulta

$$W(s) = \frac{K_B}{1+\tau s}$$

Il sistema sarà BIBO stabile se e solo se $\tau > 0$. Come visto nel capitolo precedente, a un ingresso a gradino unitario il sistema risponderà con un'uscita forzata che asintoticamente tenderà a $W(0) = K_B$. Vogliamo ora analizzare con quale transitorio l'uscita tende al suo valore asintotico. Supponiamo che $K_B = 1$ e analizziamo la risposta al gradino unitario, che risulta

$$Y(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1/\tau},$$

dove $A = W(0) = 1$ e $B = (s+1/\tau)Y(s)|_{s=-1/\tau} = -1$. Allora

$$y(t) \;=\; 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t \geq 0$$

il cui andamento è mostrato in figura 1.3. Si noti che $\tau$ fornisce l'ordine di grandezza del tempo che ci vuole alla risposta per raggiungere il suo valore asintotico. Per questo motivo $\tau$ è detta costante di tempo del sistema (vedi figura 1.3).

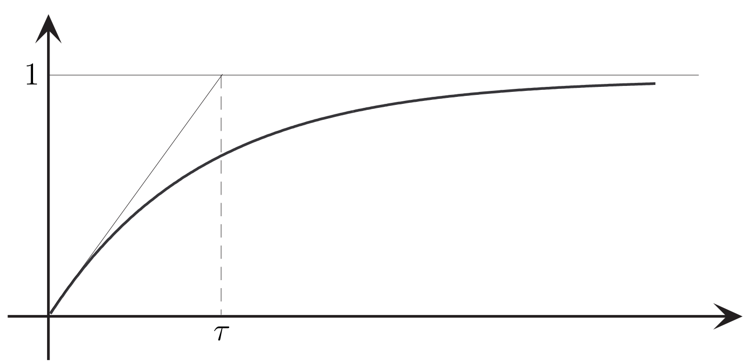


Figure 1.3:

Precisamente in questo caso e' chiaro che $S = U = 0$ e con conti abbastanza semplici e' possibile calcolare

$$T_s = \tau \ln 9 \simeq 2.2\tau = -\frac{2.2}{p}$$

$$T_a = \tau \ln 20 \simeq 3\tau = -\frac{3}{p}$$

### 1.4.2 Sistemi del secondo ordine

Consideriamo un sistema con funzione di trasferimento del secondo ordine senza zeri $W(s)$ che in forma di Bode risulta

$$W(s) = \frac{K_B}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{K_B\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Si noti che in questo caso il sistema sarà BIBO stabile se e solo se $\xi > 0$. Come visto nel capitolo precedente, a un ingresso a gradino unitario il sistema risponderà con un'uscita forzata che asintoticamente tenderà a $W(0) = K_B$. Vogliamo ora analizzare con quale transitorio l'uscita tende al suo valore asintotico. Supponiamo per semplicità che $K_B = 1$. Il temine del secondo ordine a denominatore di $W(s)$ corrisponde a una coppia poli complessi coniugati $p_1, p_2$. Mettendo in evidenza la loro parte reale e immaginaria

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega \qquad \sigma, \omega \geq 0$$

si può notare che

$$\begin{aligned} s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 &= (s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega) \\ &= (s+\sigma)^2 + \omega^2 \\ &= s^2 + \underbrace{2\sigma}_{2\xi\omega_n} s + \underbrace{(\sigma^2 + \omega^2)}_{\omega_n^2}. \end{aligned}$$

il che dimostra che $\omega_n^2 := \sigma^2 + \omega^2$ e che $\xi\omega_n = \sigma$. Sia $\theta$ tale che $\xi = \cos\theta$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \sigma &= \xi\omega_n = (\cos\theta)\omega_n \\ \omega &= \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n = (\sin\theta)\omega_n. \end{aligned}$$

Queste relazioni sono illustrate nella figura 1.4. La costante $\omega_n$ è detta **pulsazione naturale** mentre $\xi$ è detto **coefficiente di smorzamento**.

Analizziamo ora la risposta al gradino unitario, che risulta

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} + \frac{\frac{\omega_n}{2j\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{p_1}}{s - p_1} + \frac{\frac{-\omega_n}{2j\sqrt{1-\xi^2}}\frac{1}{p_2}}{s - p_2}.$$

Ponendo $p_1 = -\omega_n e^{-j\theta}$, $p_2 = -\omega_n e^{j\theta}$, si ottiene $\frac{\omega_n}{p_1} = -e^{j\theta}$ e $\frac{\omega_n}{p_2} = -e^{-j\theta}$ e quindi

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{2j\sqrt{1-\xi^2}}\left\{\frac{e^{j\theta}}{s-p_1} - \frac{e^{-j\theta}}{s-p_2}\right\} \\ y(t) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{e^{-\sigma t + j\omega t + j\theta} - e^{-\sigma t - j\omega t - j\theta}}{2j} \\ &= 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega t + \theta) \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

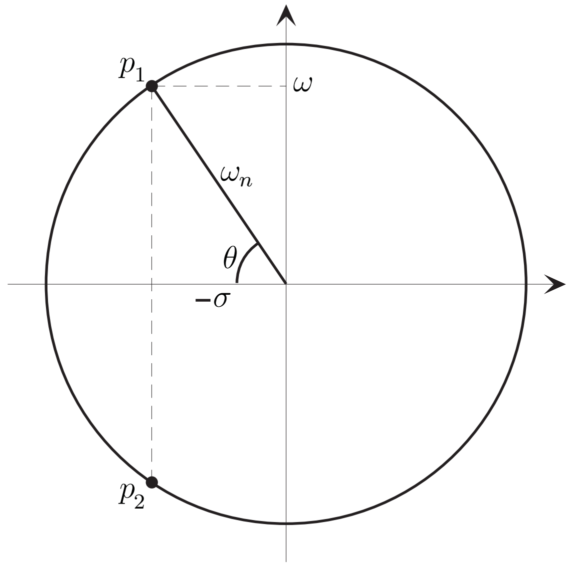


Figure 1.4:

Si noti preliminarmente che

$$\begin{aligned} y(0^+) &= 0 \\ y^{(1)}(0^+) &= 0 \\ y(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

Si noti inoltre che se $\omega_n = 1$ allora la risposta sara

$$\bar{y}(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta) \qquad t \geq 0$$

il cui andamento dipenda solo dal parametro $\xi$. Si noti inoltre che il caso generale puo' essere ricondotto a questo caso speciale notando che per $\omega_n \neq 1$ si ha che

$$y(t) = \bar{y}(\omega_n t)$$

Da cio' possiamo concludere che i parametri $S, U, T_s, T_a$ possono essere determinati a partire dal caso particolare con $\omega_n = 1$.

Nella figura 1.5 è illustrato l'andamento della risposta a gradino nel quale risultano evidenziati i seguenti parametri $S, U, T_s, T_a$.

Per determinare la sovraelongazione $S$, è necessario trovare il massimo di $y(t)$ e quindi dobbiamo derivare $y(t)$. Si ha

$$\begin{aligned} \bar{y}^{(1)}(t) &= \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi t} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta) - e^{-\xi t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta) \\ &= \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} [\sin(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta) \cos\theta - \cos(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta) \sin\theta] \\ &= \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}t + \theta - \theta) = \frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\sqrt{1-\xi^2}t \end{aligned}$$

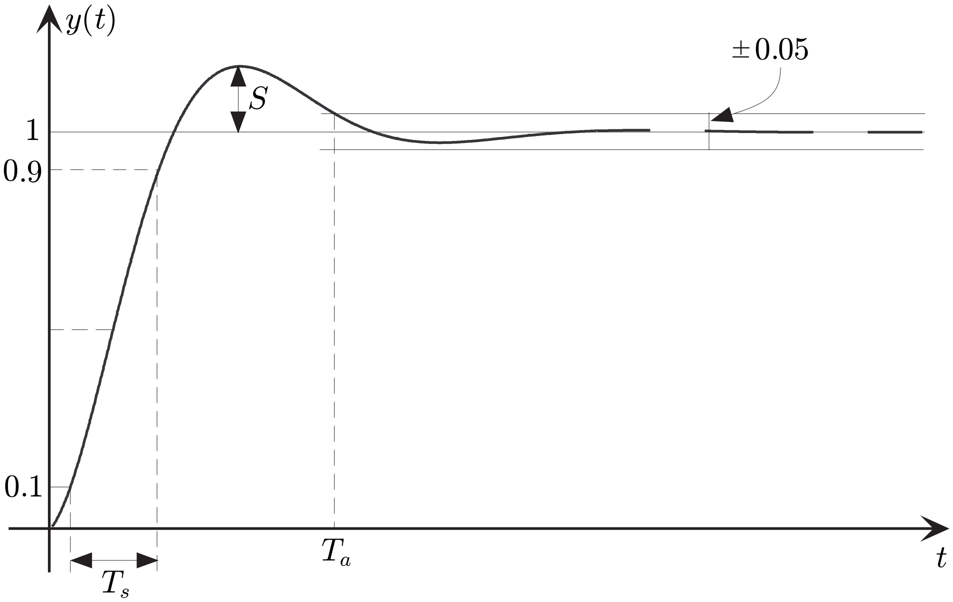


Figure 1.5:

(che è la risposta impulsiva del sistema) e quindi

$$\bar{y}^{(1)}(t) = 0 \Longrightarrow t = k\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Possiamo dedurre che

$$T_m = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

e che

$$\bar{y}(T_m) = 1 - \frac{e^{-\xi T_m}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\pi+\theta) = 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

da cui

$$S = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

che è funzione crescente di $\theta$. Perciò, per avere $S$ piccolo, devo avere $\theta$ piccolo. Nella figura 1.6 è mostrata la regione del piano complesso a cui deve appartenere i poli per avere che $S \leq \bar{S}$.

Per il calcolo del tempo si assestamento e di salita si devono fare delle approssimazioni. Infatti, poiché

$$1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \leq y(t) \leq 1 + \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

con $\sigma > 0$, si prende come $T_a$ l'istante di tempo a partire dal quale l'inviluppo è contenuto nella fascia $[1-0.05, 1+0.05]$ e quindi $T_a$ deve risolvere l'equazione

$$\frac{e^{-\sigma T_a}}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0.05 \Longrightarrow T_a = \frac{\ln[0.05\sqrt{1-\xi^2}]}{-\xi\omega_n}$$

$$T_a = \frac{1}{\xi\omega_n}\{\ln 20 - \ln\sqrt{1-\xi^2}\} \geq \frac{\ln 20}{\xi\omega_n} \simeq \frac{3}{\xi\omega_n}.$$

Per semplicità si prende

$$T_a = \frac{3}{\xi\omega_n}.$$

Quindi, se imponiamo dei vicoli su valori del tempo di assestamento $T_a \leq \bar{T}_a$, i poli devono appartenere alla zona tratteggiata in figura 1.6.

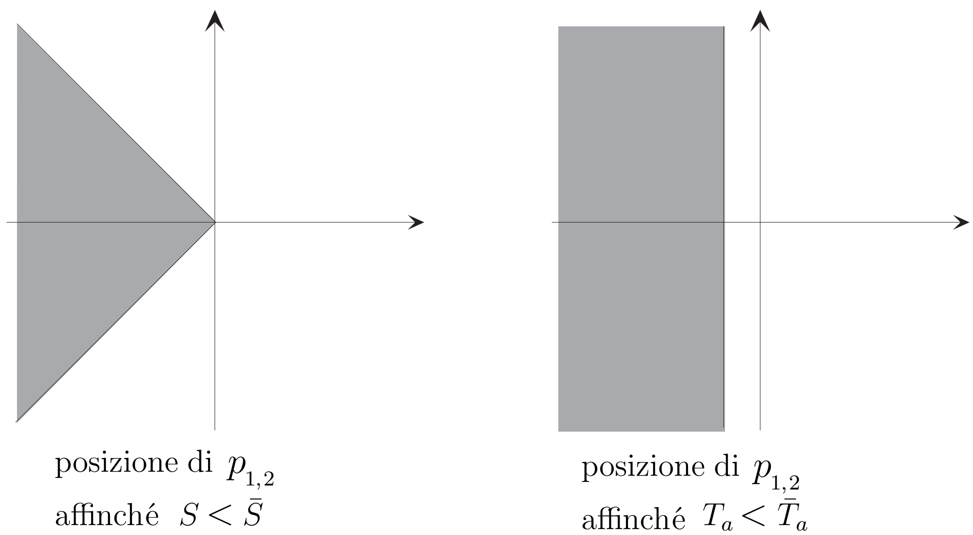


Figure 1.6:

### 1.4.3 Effetto dei poli non dominanti e degli zeri

In realtà i poli non dominanti e gli zeri influiscono anch'essi sul transitorio. Attraverso l'esempio seguente si cercherà di illustrare tale effetto. Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{p}{(s+1)(s+p)} \qquad p > 0.$$

Si noti che $W(0) = 1$ per ogni valore di $p$. Se $p > 1$ allora tale sistema si approssima col seguente

$$\bar{W}(s) = \frac{1}{(s+1)}.$$

Questo sistema ha risposta al gradino

$$\bar{y}(t) = 1 - e^{-t}, \qquad t \geq 0.$$

Calcoliamo ora la risposta al gradino del sistema con il polo in $-p$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{p}{(s+1)(s+p)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{p}{p-1}}{s+1} + \frac{\frac{1}{p-1}}{s+p} \\ y(t) &= \underbrace{1 - \frac{p}{p-1}e^{-t}}_{\substack{y_d(t) \\ \text{dominante}}} + \underbrace{\frac{1}{p-1}e^{-pt}}_{\substack{y_f(t) \\ \text{veloce}}} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Si noti che il polo in $-p$ ha due effetti:

1. introduce il modo supplementare $e^{-pt}$;
2. modifica il coefficiente davanti al modo $e^{-t}$.

L'andamento di $y(t)$ al variare di $p > 1$ è illustrato in figura 1.7. Se $p \to +\infty$, allora $y(t) \simeq 1 - e^{-t}$, che è la risposta al gradino del sistema con funzione di trasferimento $\hat{W}(s) = \frac{1}{s+1}$ che è la funzione di trasferimento che si ottiene attraverso l'approssimazione basata sui poli dominanti.

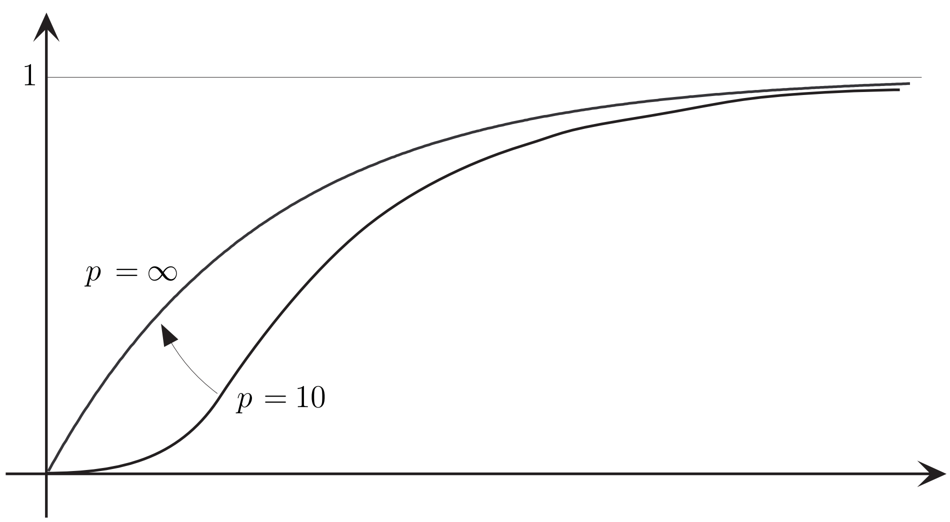


Figure 1.7:

Per quantificare la bontà dell'approssimazione basata sui poli dominanti è conveniente in questo caso approssimare $y_d(t)$ con una esponenziale ritardata (vedi figura 1.8)

$$y(t) \simeq 1 - e^{-(t-\Delta)} = y(t - \Delta)$$

dove

$$\Delta = \ln \frac{p}{p-1}.$$

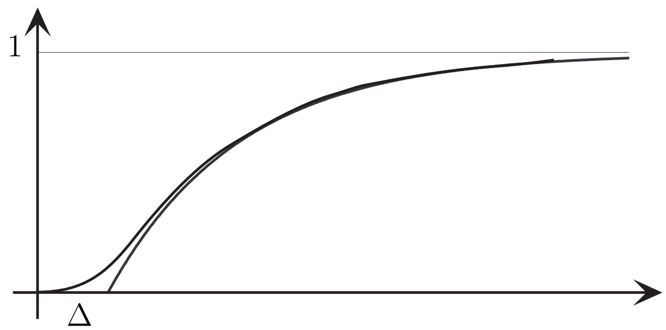


Figure 1.8:

Quindi il polo non dominante rende il sistema meno pronto perché provoca un **ritardo** nell'inseguimento del gradino.

Consideriamo ora la presenza di uno zero reale

$$W(s) = \frac{p/z(s+z)}{(s+1)(s+p)}.$$

Supponiamo che $p >> 1$. Si noto che anche in questo caso $W(0) = 1$. La risposta la gradino è

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{p/z(s+z)}{(s+1)(s+p)}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\frac{p}{p-1}\frac{z-1}{z}}{s+1} + \frac{\frac{1}{p-1}\frac{z-p}{z}}{s+p} \\ y(t) &= \underbrace{1 - \left(\frac{p}{p-1}\frac{z-1}{z}\right)e^{-t}}_{\substack{y_d(t) \\ \text{dominante}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{p-1}\frac{z-p}{z}\right)e^{-pt}}_{\substack{y_f(t) \\ \text{veloce}}} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Si noti che rispetto al caso precedente col polo in $-p$ e senza zeri, lo zero ha il solo effetto di modificare i coefficienti davanti ai modi $e^{-t}$ e $e^{-pt}$. L'andamento di $y(t)$ è illustrato in figura 1.9 nel caso in cui $z > 0$.

Anche in questo caso, per quantificare la bontà dell'approssimazione basata sui poli dominanti è conveniente approssimare $y_d(t)$ con una esponenziale ritardata $y_d(t) \simeq 1 - e^{-(t-\Delta)}$, dove in questo caso

$$\Delta = \ln\frac{p}{p-1} - \ln\frac{z}{z-1}.$$

Quindi, mentre il polo non dominante rende il sistema meno pronto e ritarda la risposta al gradino, lo zero ha l'effetto opposto cioè tende a rendere il sistema più e pronto quindi ad **anticipare** la risposta al gradino.

Se $z < 1$, il sistema continua a diventare sempre più pronto, ma in questo caso si paga la prontezza con una sovraelongazione (vedi figura 1.9). Calcolando la derivata della risposta si osserva che

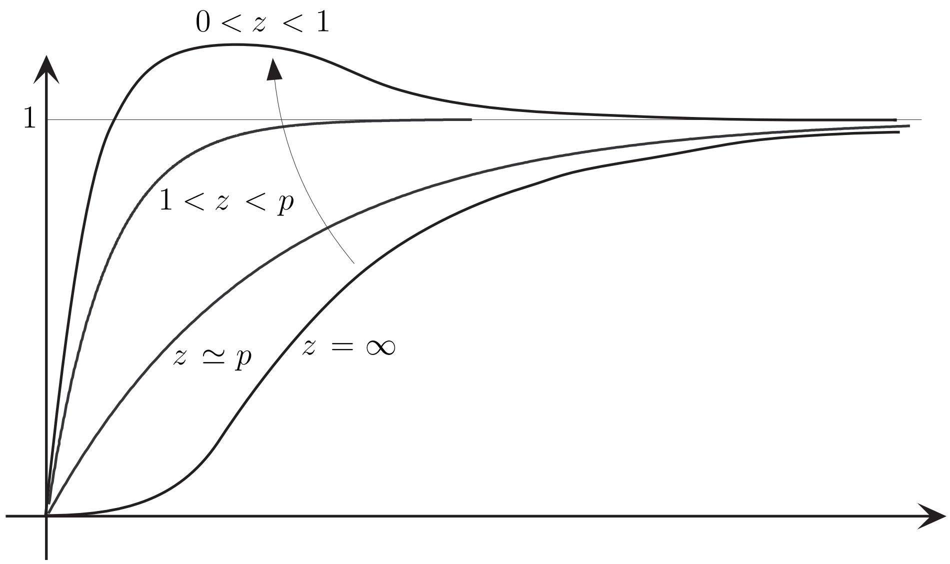


Figure 1.9:

$$y^{(1)}(t) = \frac{p}{p-1}\frac{z-1}{z}e^{-t} - \frac{1}{p-1}\frac{z-p}{z}pe^{-pt}.$$

Quindi $y^{(1)}(t) = 0$ se e solo se

$$(z-1)e^{-t} = (z-p)e^{-pt}$$

e quindi

$$e^{(p-1)t} = \frac{z-p}{z-1}, \qquad t_{max} = \frac{1}{p-1}\ln\left(\frac{p-z}{1-z}\right)$$

Si dimostra quindi che il punto di massimo $t_{max} > 0$ se $p > 1$ e $z < 1$.

Infine se $z < 0$ (zero instabile) il sistema è detto **a fase non minima**. La formula che determina la risposta al gradino $y(t)$ resta la medesima. Si osservi che

$$y(0^+) = \lim_{\sigma\to+\infty} \sigma Y(\sigma) = 0$$
$$y^{(1)}(0^+) = \lim_{\sigma\to+\infty} \sigma^2 Y(\sigma) = \frac{p}{z} < 0.$$

Quindi, se $z < 0$, allora $y(t) < 0$ per tempi $t$ piccoli (vedi figura 1.10).

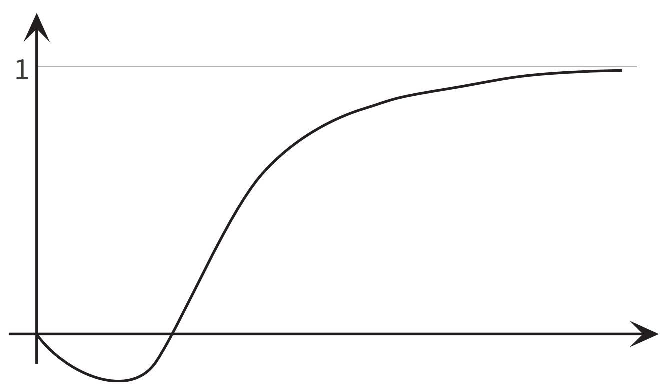


Figure 1.10: