

Contents

1	Progetto di un sistema di controllo nel dominio della frequenza	3
1.1	Le specifiche del progetto nel dominio della frequenza	3
1.2	Sintesi del controllore	6
1.3	Determinazione della rete correttiva	10
1.4	Descrizione delle quattro azioni correttive	15
1.4.1	Amplificazione pura	15
1.4.2	Rete anticipatrice o amplificatrice	16
1.4.3	Rete ritardatrice o attenuatrice	20
1.4.4	Rete ritardatrice e anticipatrice o rete sella	24
1.5	Esempi	29
2	Altri metodi di sintesi	33
2.1	Metodi euristici per la sintesi dei controllori PID	33
2.2	Sintesi diretta e allocazione dei poli	36
2.2.1	Compensatore a un parametro	36
2.2.2	Compensatore a due parametri	41

Chapter 1

Progetto di un sistema di controllo nel dominio della frequenza

In questo capitolo verrà illustrato un metodo per la sintesi del controllore alternativo a quello basato sul luogo delle radici. Questo metodo è basato sulla descrizione nel dominio della frequenza dei sistemi, e più in particolare sul diagramma di Bode. Per questo motivo questo metodo è anche detto **sintesi di Bode**

1.1 Le specifiche del progetto nel dominio della frequenza

Un sistema di controllo viene progettato per una determinata applicazione e le caratteristiche che esso deve possedere dipendono ovviamente da esigenze particolari. È tuttavia possibile elencare alcune proprietà che abitualmente si cerca di conseguire con il controllo; la loro traduzione in termini numerici fornisce, in tutto o in parte, le **specifiche di progetto** nella grande maggioranza dei casi. Le specifiche di progetto tipicamente sono

1. **Errore a regime** nella risposta del sistema ai segnali canonici.
2. **Prontezza del sistema** che è legata al tempo di salita T_s nella risposta al gradino.
3. **Capacità smorzante** che è tanto maggiore quanto più è piccola la sovrarisonanza S nella risposta al gradino.
4. **Insensibilità alle variazioni parametriche e ai disturbi.**

Si noti che le quattro specifiche precedenti corrispondono al comportamento nel **dominio del tempo**. In realtà queste possono essere tradotte in specifiche nel **dominio della frequenza**.

1. Abbiamo già osservato che l'errore a regime nella risposta del sistema ai segnali canonici è legato all'andamento della funzione di trasferimento in prossimità di $s = 0$.
2. È intuitivo che avere un sistema "pronto" e quindi con T_s piccolo corrisponderà ad avere una risposta in frequenza $T(j\omega)$ del sistema a catena chiusa con banda passante B elevata. Ricordiamo che la banda passante B è definita (vedi la figura 1.1) come la frequenza massima tale che, per ogni $\omega \in [-2\pi B, 2\pi B]$, vale la relazione

$$|T(0)|_{dB} - 3 \leq |T(j\omega)|_{dB} \leq |T(0)|_{dB} + 3.$$

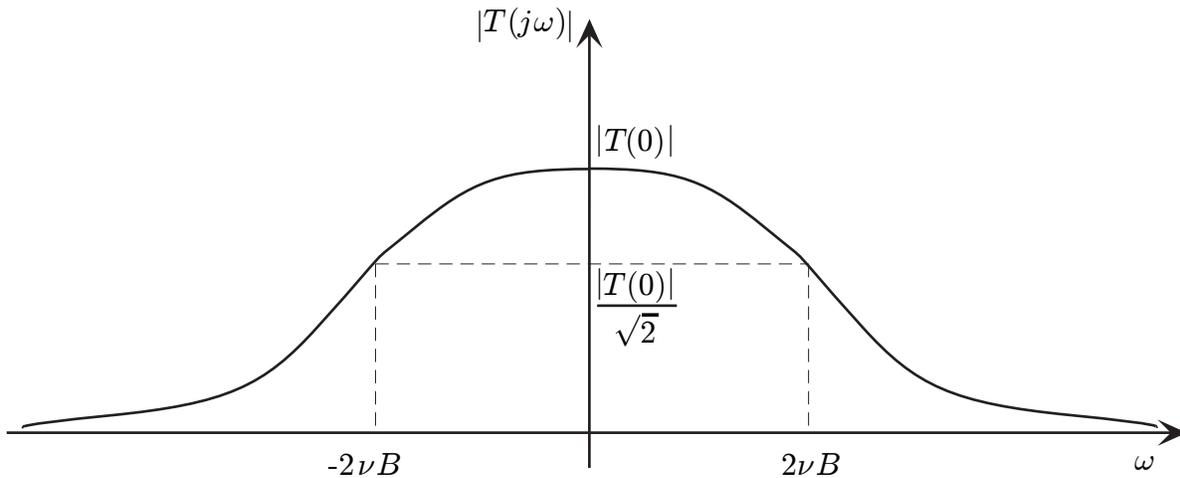


Figure 1.1:

Una relazione approssimata tra la banda passante B e il tempo di salita T_s è la seguente

$$T_s \simeq \frac{0.4}{B}. \quad (1.1)$$

Ad esempio per i sistemi del primo ordine si ha che $T_s = 0.35/B$. La relazione precedente è, per sistemi più complessi, abbastanza grossolana, ma è utile nel metodo di progetto proposto in questo capito, essendo questo un metodo per tentativi ad aggiustamenti successivi per il quale la formula (1.1) come indicazione per il primo tentativo. Gli aggiustamenti successivi possono basarsi invece sul fatto, che ha validità molto più generale, che

$$T_s \text{ decresce} \iff B \text{ cresce}$$

e viceversa.

3. Abbiamo già notato facendo riferimento ai sistemi del secondo ordine, che la capacità smorzante, cioè l'entità della sovravelongazione S nella risposta al gradino, è legata alla presenza di un picco di risonanza M_p nella risposta in frequenza (vedi la figura 1.2).

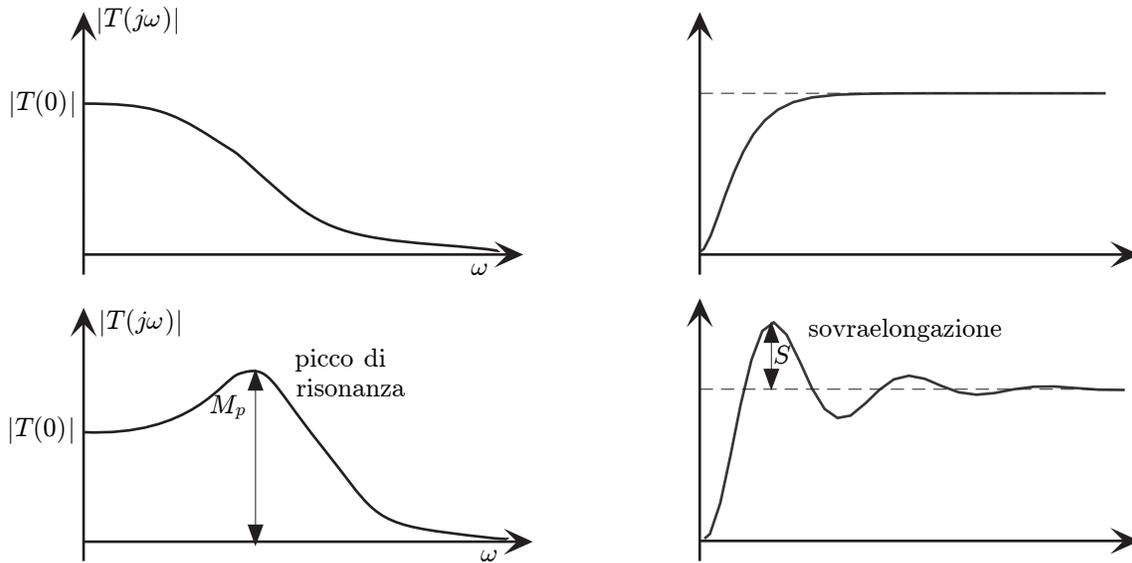


Figure 1.2:

Facendo riferimento al caso normalizzato¹ in cui $T(0) = 1$ si ha relazione approssimata tra S e M_p

$$S \simeq M_p - 1$$

Anche questa relazione è in generale molto grossolana, ma è utile come indicazione per il primo tentativo nel metodo di sintesi per tentativi come indicazione per il primo tentativo. Gli aggiustamenti successivi possono basarsi invece sul fatto, che ha validità molto più generale, che

$$S \text{ decresce} \iff M_p \text{ decresce}$$

e viceversa.

4. Abbiamo già visto che, sia gli effetti di variazioni di parametri in catena diretta, sia gli effetti di disturbi che entrano nella parte di catena diretta della

¹Si noti che nel sistema controllato l'errore a regime sarà nullo o molto piccolo e ciò implica (vedi figura 1.3) che $T(0) \simeq 1$. Più in generale si ha che

$$S \simeq \frac{M_p}{T(0)} - 1$$

dove ricordiamo che

$$S := \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)}$$

retroazione, risultano attenuati nelle frequenze dove la funzione di trasferimento (detta **funzione di sensibilità**)

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + H(j\omega)W(j\omega)}$$

risulta piccola. Quindi attenuare l'effetto dei disturbi e delle variazioni parametriche in certe frequenze corrisponde a rendere piccolo $S(j\omega)$ in tali frequenze.

1.2 Sintesi del controllore

La sintesi di Bode fa riferimento allo schema di controllo in retroazione mostrato in figura 1.3.

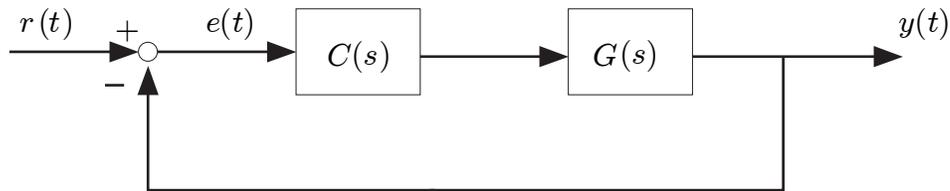


Figure 1.3:

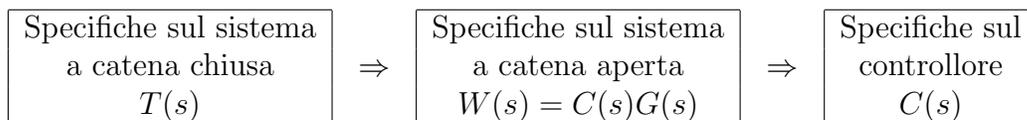
In questo schema

- $G(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema da controllare (essa ingloba anche la funzione di trasferimento $H(s)$ del trasduttore).
- $C(s)$ è la funzione di trasferimento del compensatore.

Mentre $G(s)$ si suppone data, $C(s)$ deve essere progettata in modo tale che le specifiche date siano soddisfatte dal sistema retroazionato che ha funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

La strategia su cui si basa la sintesi di Bode è di tradurre queste specifiche che vogliamo soddisfare in vincoli in frequenza che il sistema in catena aperta, avente funzione di trasferimento $W(s) \triangleq C(s)G(s)$, deve soddisfare e infine di ottenere $C(s)$ in modo tale che questi vincoli siano rispettati. La procedura complessiva è riassunta nella seguente tabella



A. Specifiche di partenza

1. L'**errore a regime** nella risposta del sistema retroazionato ai segnali canonici gradino, rampa, rampa parabolica, \dots . Indichiamo con $e_{r,k}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ errore a regime nella risposta a, rispettivamente, $\delta^{-1}(t)$ gradino, $\delta^{-2}(t)$ rampa, $\delta^{-3}(t)$ rampa parabolica, ecc.
2. La **sovraelongazione** S nella risposta al gradino del sistema retroazionato. Questa indica la capacità smorzante del sistema.
3. Il **tempo si salita** T_s nella risposta al gradino (o equivalentemente la banda passante B) del sistema retroazionato che indica la prontezza del sistema.

Osservazione 1.1 Nelle specifiche su errore a regime e sovraelongazione vengono indicati solo dei valori massimi di tali parametri e quindi queste specifiche sono da intendersi come disuguaglianze. Per quanto riguarda la banda passante la situazione è diversa, nel senso che spesso una banda passante troppo elevata può dare problemi sia per quanto riguarda la capacità di reiezione ai disturbi, sia per il fatto che una banda troppo elevata tende a richiedere ingressi di controllo di maggiore entità. Perciò la specifica sulla banda passante sarà intesa nel seguito come una uguaglianza.

B. Specifiche su $W(s) \triangleq C(s)G(s)$

1. **Tipo** (numero di poli nell'origine) e **amplificazione**.
2. **Margine di fase** m_φ .
3. **Pulsazione di attraversamento** ω_A (pulsazione tale che $|G(j\omega_A) = 1|$).

Le specifiche di partenza sono legate alle specifiche su $W(s)$.

1. Abbiamo già visto che l'errore a regime $e_{r,k}$ è in una semplice relazione con il tipo e con il guadagno statico di $W(s)$. Più precisamente, se le nostre specifiche impongono che il sistema retroazionato debba essere in grado di inseguire i riferimenti

- $\delta^{(-1)}(t), \delta^{(-2)}(t), \dots, \delta^{(-h)}(t)$ con errore a regime nullo e
- $\delta^{(-h-1)}(t)$ con errore a regime $|e_{r,h+1}| \leq \varepsilon$

per un dato $\varepsilon > 0$, si dovrà imporre che $W(s)$ sia di tipo h , cioè deve essere

$$h_W = h$$

dove la forma di Bode di $W(s)$ è

$$W(s) = \frac{K_W}{s^{h_W}} \overline{W}(s), \quad \overline{W}(0) = 1$$

dove K_W è il guadagno di Bode di $W(s)$. Poiché si ha che

$$e_{r,h+1} = \begin{cases} \frac{1}{1+K_W} & \text{se } h = h_W = 0 \\ \frac{1}{K_W} & \text{se } h = h_W \geq 1 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi imporre che

$$K_W \geq \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} - 1 & \text{se } h = h_W = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{se } h = h_W \geq 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Per ragioni di economicità (perché amplificare è costoso) è conveniente assegnare a K_W i valori minimi compatibili con (1.2). Siccome $1/\varepsilon - 1 < 1/\varepsilon$ (spesso i due valori sono molto vicini, essendo nella maggior parte dei casi ε molto piccolo), si preferisce più semplicemente assegnare

$$K_B = 1/\varepsilon$$

2. È abbastanza intuitivo il fatto che la sovralongazione del sistema retroazionato e il margine di fase di $W(s)$ siano legati tra loro in maniera seguente

$$S \text{ decresce} \iff m_\varphi \text{ cresce}$$

In effetti sovralongazione elevata implica che il sistema retroazionato è "vicino" all'instabilità ed ha quindi margine di fase piccolo. Nella sintesi di Bode, che è una sintesi per tentativi ad approssimazioni successive, la relazione precedente permette di ottenere una sovralongazione S soddisfacente aggiustando opportunamente m_φ . Una stima grossolana del legame tra S e m_φ che può essere usata come punto di partenza è la seguente:

$$m_\varphi \simeq 1 - 0.8S$$

3. La relazione tra banda passante B del sistema a catena chiusa e pulsazione di attraversamento ω_A di $W(s)$ è meno intuitiva. Per sistemi abbastanza regolari si può dimostrare che

$$T_s \text{ decresce} \iff \omega_A \text{ cresce}$$

Una stima grossolana del legame tra T_s e ω_A , utilizzabile come punto di partenza nella sintesi per tentativi, può essere ottenuto attraverso i ragionamenti seguenti. Si osservi infatti che (vedi figura 1.4)

$$\underbrace{\frac{|W(j\omega_A)|}{|1+W(j\omega_A)|}}_{|T(j\omega_A)|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{|W(0)|}{|1+W(0)|}}_{|T(0)|} = \underbrace{\frac{|W(j2\pi B)|}{|1+W(j2\pi B)|}}_{|T(j2\pi B)|} \quad (1.3)$$

in cui nella prima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $|W(j\omega_A)| = 1$ e abbiamo supposto che il margine di fase m_φ sia compreso tra $[0, \pi/2]$ da cui segue che $|1 + W(j\omega_A)| \leq \sqrt{2}$, mentre nella seconda disuguaglianza abbiamo semplicemente ipotizzato che $W(0) > 0$ (per $W(0) = +\infty$ diventa un'uguaglianza). Se assumiamo che $|T(j\omega)| = \frac{|W(j\omega)|}{|1+W(j\omega)|}$ sia monotona decres-

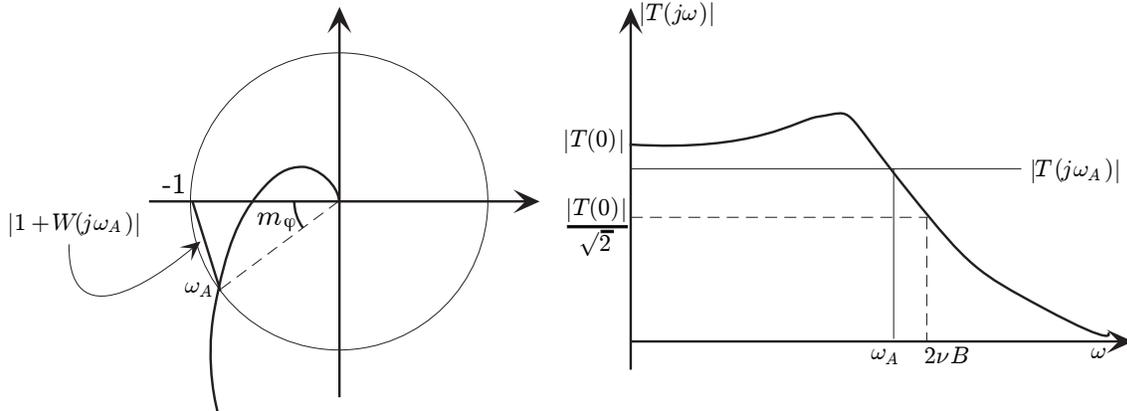


Figure 1.4:

cente tra ω_A e B , si ottiene che la relazione (1.3) implica che $\omega_A \leq 2\pi B$. Da ciò si desume, dalla (1.1), che

$$\omega_A \simeq 5B.$$

e quindi che

$$\omega_A \simeq \frac{2}{T_s}$$

C. Ottenimento delle specifiche su $W(s) = C(s)G(s)$

Si tratta ora di ottenere $C(s)$ a partire dalle specifiche su $W(s) = C(s)G(s)$, supponendo nota $G(s)$. La specifica relativa all'errore a regime portava ad avere

$$\begin{cases} h_W = h \\ K_W = \frac{1}{\varepsilon}. \end{cases}$$

dove

$$W(s) = \frac{K_W}{s^{h_W}} \bar{W}(s), \quad \bar{W}(0) = 1$$

è la forma di Bode di $W(s)$. Consideriamo ora le forme di Bode di $C(s), G(s)$

$$C(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} \bar{C}(s), \quad \bar{C}(0) = 1, \quad G(s) = \frac{K_G}{s^{h_G}} \bar{G}(s), \quad \bar{G}(0) = 1$$

dove K_C, K_G sono i guadagni di Bode e h_C, h_G i tipi. Allora si vede facilmente che

$$K_W = K_C K_G, \quad h_W = h_C + h_G$$

Dai vincoli su h_W e K_W si ottiene

$$K_C = \frac{1/\varepsilon}{K_G}, \quad h_C = h - h_G$$

dove K_G, h_G derivano dalla conoscenza del modello da controllare, mentre ε, h derivano dalle specifiche di controllo. Dal soddisfacimento delle specifiche sull'errore a regime si determina il guadagno di Bode e il tipo del controllore $C(s)$. Le specifiche sulla pulsazione di attraversamento ω_A e sul margine di fase m_φ saranno soddisfatte utilizzando il grado di libertà che resta su $\overline{C}(s)$ che può essere una qualsiasi funzione di trasferimento tale che $\overline{C}(0) = 1$. Il sistema con funzione di trasferimento $\overline{C}(s)$ è detto **rete correttrice**.

1.3 Determinazione della rete correttrice

Nella decomposizione

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{K_C}{s^{h_C}} \overline{C}(s)G(s) = \overline{C}(s) \widehat{W}(s)$$

dove abbiamo definito

$$\widehat{W}(s) := \frac{K_C}{s^{h_C}} G(s)$$

la $\widehat{W}(s)$ risulta fissata dal modello del sistema da controllare e dalle specifiche relative all'errore a regime. Tracciamo il diagramma di Bode di $\widehat{W}(s)$ (vedi figura 1.5) e definiamo

- ω_A^0 = pulsazione di attraversamento effettiva cioè tale che $|\widehat{W}(j\omega_A^0)| = 1$;
- ω_A = pulsazione di attraversamento richiesta;
- m_φ = minimo margine di fase richiesto;
- $m_\varphi^0 \triangleq \pi + \angle \widehat{W}(j\omega_A)$ che non coincide col margine di fase effettivo di $\widehat{W}(s)$ che è invece $\pi + \angle \widehat{W}(j\omega_A^0)$.

La figura 1.6 illustra in modo grafico il vincolo che deve essere soddisfatto dal diagramma di Bode di $\overline{C}(s)$ deve soddisfare il vincolo.

Ricordiamo che il vincolo sul modulo è una uguaglianza mentre sulla fase è una disuguaglianza. Per soddisfare tali vincoli si utilizzano le cosiddette reti correttive.

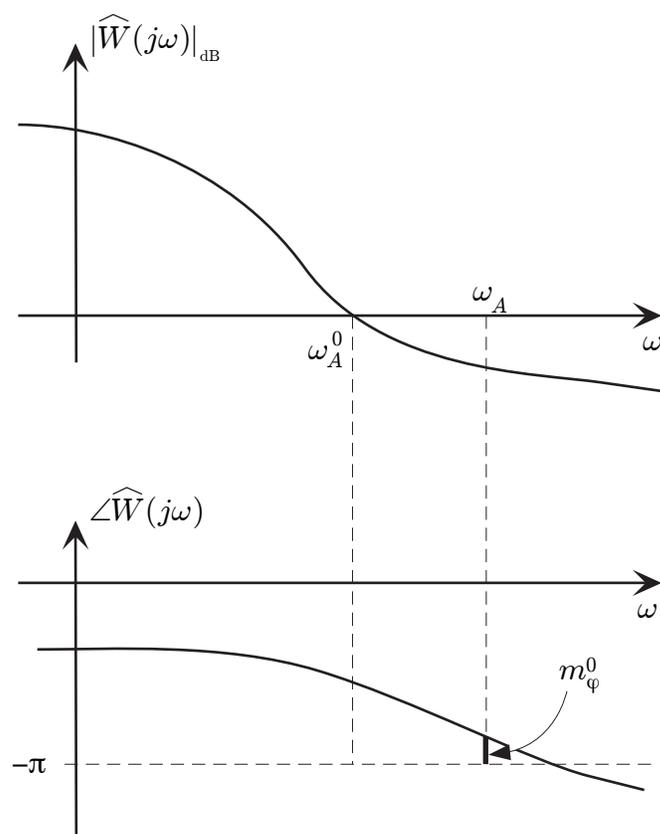


Figure 1.5:

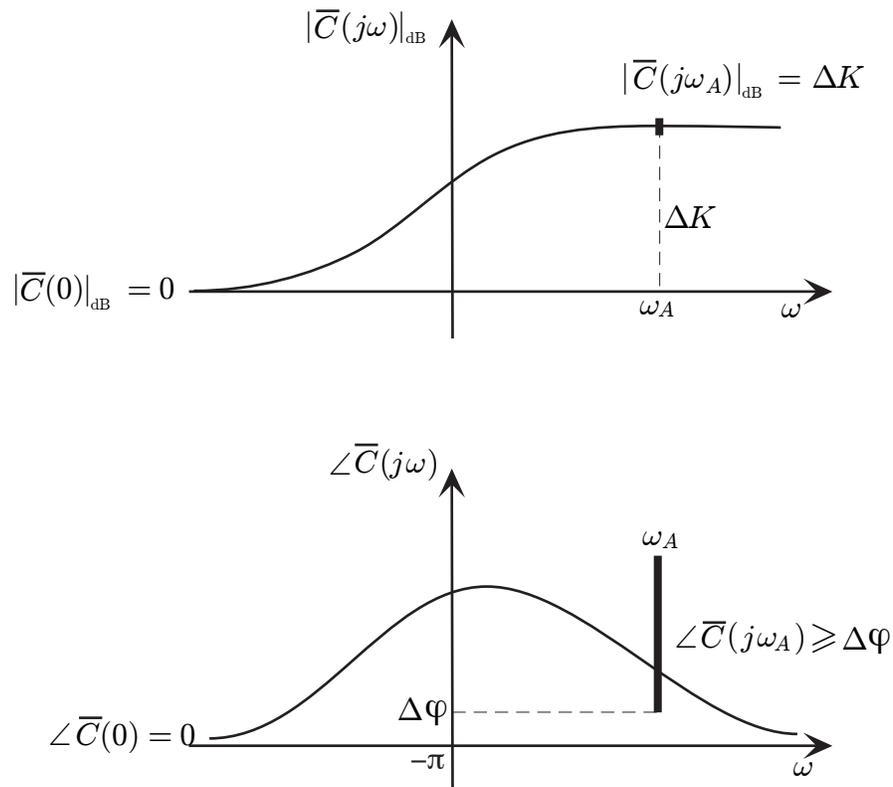


Figure 1.6:

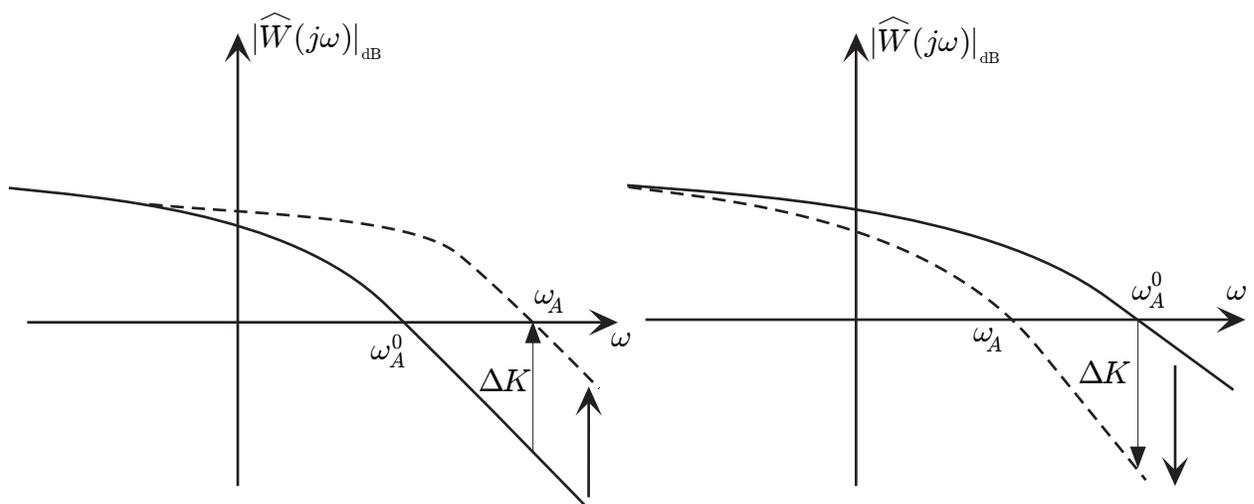


Figure 1.7:

1. Aggiustamento di ω_A

Possono verificarsi due situazioni:

1A. Se $\omega_A^0 < \omega_A$, allora è necessaria una azione **amplificatrice** per aumentare la pulsazione di attraversamento (vedi figura 1.7).

Infatti dobbiamo ottenere che

$$|W(j\omega_A)| = |\overline{C}(j\omega_A)| \cdot |\widehat{W}(j\omega_A)| = 1.$$

Dobbiamo perciò fare in modo che

$$|\overline{C}(j\omega_A)| = \frac{1}{|\widehat{W}(j\omega_A)|}$$

che in questo caso è > 1 . Quindi $\overline{C}(s)$ deve amplificare alla pulsazione ω_A di

$$C = \frac{1}{|\widehat{W}(j\omega_A)|} > 1$$

o in decibel di

$$\Delta K = -|\widehat{W}(j\omega_A)|_{dB} > 0.$$

1B. Se $\omega_A^0 > \omega_A$, allora è necessaria un'azione attenuatrice per diminuire la pulsazione di attraversamento (vedi figura 1.7).

In questo caso l'**attenuazione** è data da

$$C = \frac{1}{|\widehat{W}(j\omega_A)|} < 1$$

o in decibel di

$$\Delta K = -|\widehat{W}(j\omega_A)|_{dB} < 0.$$

2. Aggiustamento di m_φ

Anche per il margine di fase si devono considerare separatamente due situazioni:

2A. Se $m_\varphi^0 < m_\varphi$ (margine di fase insufficiente) è necessaria una azione anticipatrice in grado di aggiungere fase in corrispondenza alla pulsazione ω_A (vedi figura 1.8).

In effetti si vuole imporre che il margine di fase di $W(s)$ sia m_φ per $\omega = \omega_A$. Allora

$$m_\varphi = \angle W(j\omega_A) + \pi = \angle \overline{C}(j\omega_A) + \overbrace{\angle \widehat{W}(j\omega_A)}^{m_\varphi^0} + \pi$$

da cui segue che dobbiamo imporre su $\overline{C}(s)$ il vincolo

$$\angle \overline{C}(j\omega_A) = m_\varphi - (\angle \widehat{W}(j\omega_A) + \pi) = m_\varphi - m_\varphi^0 = \Delta\varphi.$$

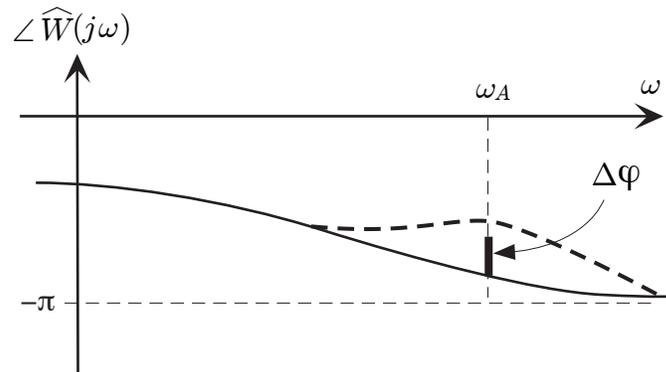


Figure 1.8:

Denotiamo

$$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^0 = m_\varphi - (\angle \widehat{W}(j\omega_A) + \pi).$$

In questo caso $\overline{C}(s)$ deve aggiungere fase $\Delta\varphi > 0$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_A$.

2B. Se $m_\varphi^0 > m_\varphi$, allora siamo in una situazione in cui il margine di fase in corrispondenza della pulsazione $\omega = \omega_A$ risulta già sufficiente cioè si ha

$$\Delta\varphi < 0$$

In questo caso non è necessaria nessuna correzione di fase.

Possiamo concludere che possono verificarsi quattro casi a seconda di quali delle seguenti disuguaglianze siano verificate.

$C > 1$	$C < 1$
$\Delta\varphi > 0$	$\Delta\varphi < 0$

Table 1.1:

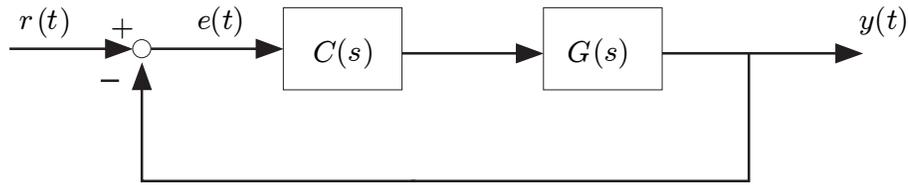
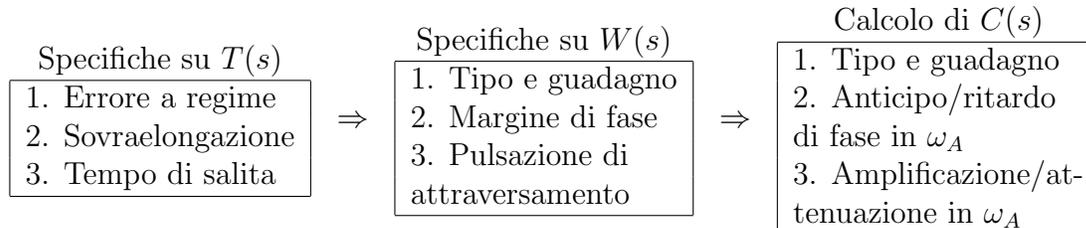


Figure 1.9:

Schema del metodo di sintesi di Bode

- $G(s)$ funzione di trasferimento sistema **data**,
- $C(s)$ funzione di trasferimento compensatore **da trovare**,
- $W(s) \triangleq C(s)G(s)$ funzione di trasferimento a catena aperta,
- $T(s) \triangleq \frac{W(s)}{1 + W(s)}$ funzione di trasferimento a catena chiusa.



1.4 Descrizione delle quattro azioni correttrici

Come abbiamo visto sopra nella determinazione dell'azione correttrice per l'ottenimento delle specifiche su ω_A (pulsazione di attraversamento) e m_φ (margine di fase) della funzione di trasferimento

$$C(s)G(s) = W(s) = \overline{C}(s)\widehat{W}(s)$$

($\widehat{W}(s)$ fissata e $\overline{C}(s)$ rete correttrice), è conveniente distinguere quattro casi.

1.4.1 Amplificazione pura

Supponiamo che

$1. C > 1, \quad \Delta\varphi < 0 \quad (\omega_A^0 < \omega_A, \quad m_\varphi^0 > m_\varphi).$

In questo caso la specifica sul margine di fase è già soddisfatta, e resta da soddisfare la specifica sulla pulsazione di attraversamento, agendo attraverso una opportuna amplificazione di C (ΔK decibel) nell'intorno di ω_A . Il modo più semplice di ottenere questo effetto è attraverso un **amplificatore statico** (vedi figura 1.10)

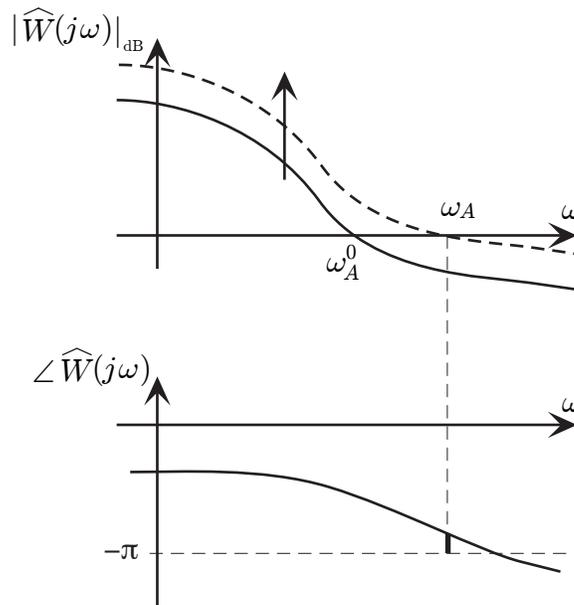


Figure 1.10:

$$\bar{C}(s) = C = 10^{\frac{\Delta K}{20}} > 0.$$

Osservazione 1.2 Si noti che $\bar{C}(s)$ così trovata non soddisfa alla condizione $C_r(0) = 1$ ma piuttosto $C_r(0) > 1$. Tuttavia questo cambiamento fa sì che la specifica sull'errore a regime non solo rimanga valida ma addirittura venga migliorata.

1.4.2 Rete anticipatrice o amplificatrice

Supponiamo che

$$\boxed{2. C > 1, \quad \Delta\varphi > 0} \quad (\omega_A^0 < \omega_A, \quad m_\varphi^0 < m_\varphi).$$

In questo caso, oltre a dover applicare una azione amplificatrice per aumentare la pulsazione di attraversamento, abbiamo bisogno di guadagnare in margine di fase e quindi di una azione **anticipatrice** nell'intorno di ω_A (vedi figura 1.11).

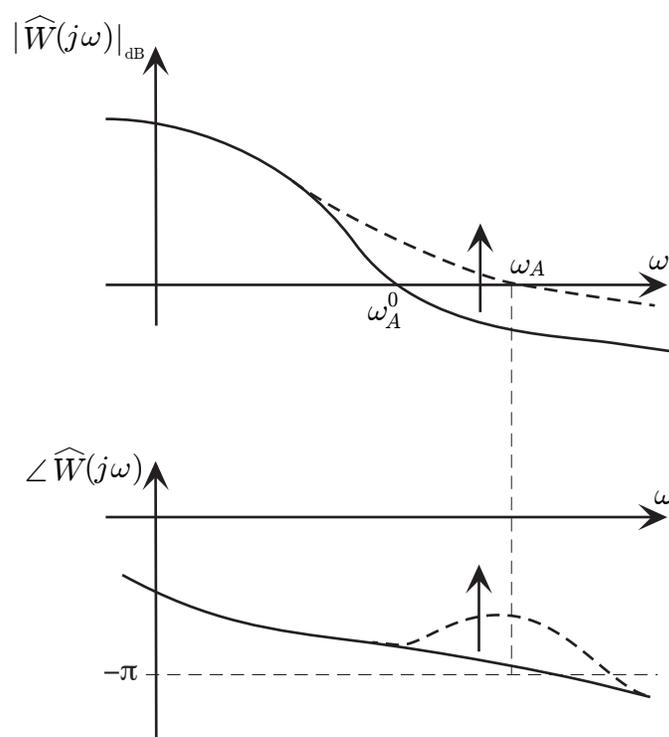


Figure 1.11:

Il modo più semplice di ottenere ciò è utilizzare una **rete anticipatrice**. Si tratta di un sistema con funzione di trasferimento con due gradi di libertà

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + saT}, \quad T > 0, \quad 0 < a < 1$$

con uno zero in $-1/T$, un polo in $-1/(aT)$ e $\bar{C}(0) = 1$ (vedi figura 1.12).

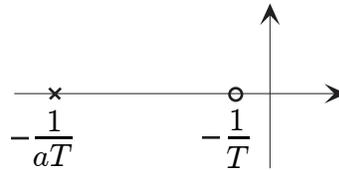


Figure 1.12:

Attraverso il diagramma di Bode (vedi figura 1.13) si osserva che per $\omega \gg \frac{1}{aT}$ il guadagno è circa $20 \log(\frac{1}{a})$.

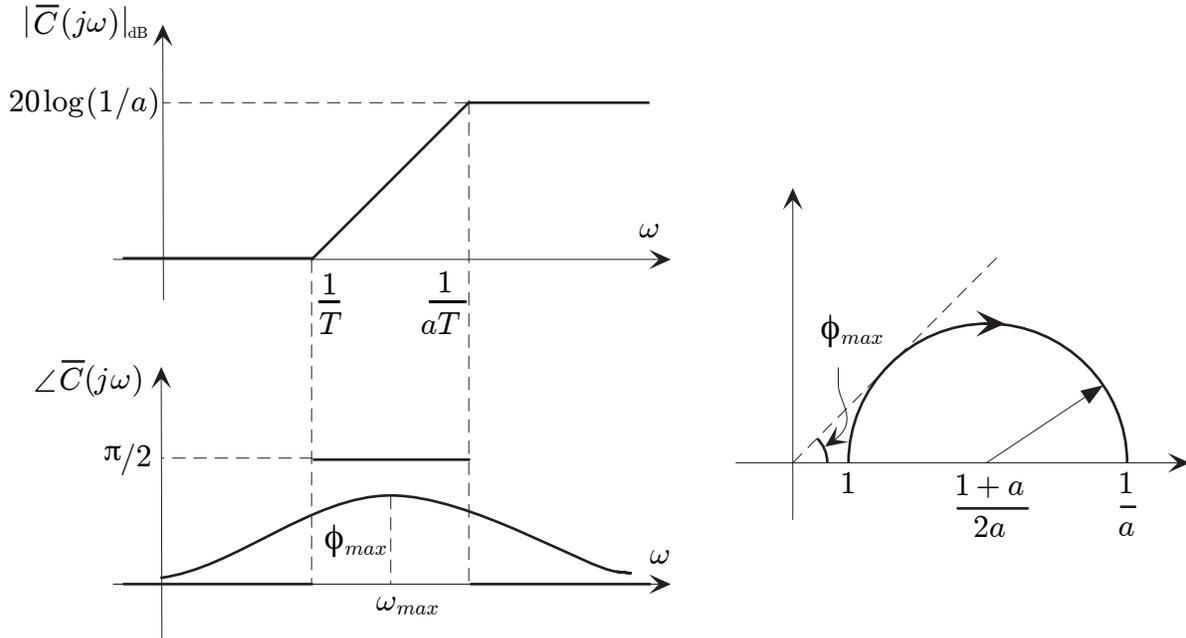


Figure 1.13:

Per determinare la fase conviene analizzare il diagramma di Nyquist (vedi figura 1.13). Come dimostrato nell'esempio ?? il diagramma di Nyquist sta sul cerchio di centro $C = \frac{1+a}{2a}$ e raggio $R = \frac{1-a}{2a}$. Quindi possiamo concludere che la fase massima

ϕ_{max} si può calcolare nel modo seguente (vedi figura 1.13)

$$\tan \phi_{max} = \frac{1-a}{2a} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1-a}{2a}\right)^2}} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \phi_{max} = \arctan \frac{1-a}{2\sqrt{a}}$$

mentre ω_{max} , che è la pulsazione in corrispondenza della quale ϕ_{max} viene assunta, può essere determinata come segue

$$\begin{aligned} \bar{C}(j\omega) &= \frac{1+j\omega T}{1+j\omega a T} = \frac{(1+\omega^2 a T^2) + j\omega(1-a)T}{1+\omega^2 a^2 T^2} \\ \tan \phi_{max} &= \frac{\omega_{max}(1-a)T}{1+\omega_{max}^2 a T^2} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \\ \Rightarrow a T^2 \omega_{max}^2 - 2\sqrt{a} T \omega_{max} + 1 &= 0 \Rightarrow (\sqrt{a} T \omega_{max} - 1)^2 = 0 \\ \omega_{max} &= \frac{1}{T\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Problema di sintesi: Dati

$$\bar{\omega} = \omega_A, \quad C > 1, \quad \Delta\varphi > 0$$

trovare una rete anticipatrice $\bar{C}(s) = \frac{1+sT}{1+saT}$ e quindi trovare

$$T > 0, \quad 0 < a < 1$$

tali che:

$$|\bar{C}(j\bar{\omega})| = C, \quad \angle \bar{C}(j\bar{\omega}) = \Delta\varphi.$$

Soluzione

Indichiamo con $q \triangleq \tan \Delta\varphi > 0$. Imporre che $\bar{C}(s)$ abbia modulo C e fase con tangente q per $s = j\bar{\omega}$ significa trovare T ed a tali che le due equazioni seguenti siano soddisfatte

$$\begin{cases} C^2 = \frac{1 + \bar{\omega}^2 T^2}{1 + \bar{\omega}^2 a^2 T^2} \\ q = \frac{\bar{\omega}(1-a)T}{1 + \bar{\omega}^2 a T^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}^2 T^2 = \frac{C^2 - 1}{1 - a^2 C^2} \\ (1 + a\bar{\omega}^2 T^2)^2 q^2 = (1-a)^2 \bar{\omega}^2 T^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q^2 \left(1 + a \frac{C^2 - 1}{1 - a^2 C^2}\right)^2 &= \frac{C^2 - 1}{1 - a^2 C^2} (1-a)^2 \\ q^2 (1 - a^2 C^2 + a C^2 - a)^2 &= (C^2 - 1)(1-a)^2 (1 - a^2 C^2) \\ q^2 (1 + a C^2)^2 &= (C^2 - 1)(1 - a^2 C^2) \quad a \neq 1 \end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente equazione di secondo grado in a

$$C^2(C^2 q^2 + C^2 - 1)a^2 + 2C^2 q^2 a + (q^2 - C^2 + 1) = 0,$$

equazione che ha i primi due coefficienti maggiori di zero. Se avesse il terzo coefficiente maggiore od uguale a zero allora tale equazione non potrebbe avere soluzioni reali positive. Dobbiamo imporre quindi

$$C^2 > q^2 + 1. \quad (1.4)$$

Questa condizione implica che l'equazione di secondo grado abbia due radici reali, una positiva e una negativa. Infine si noti che la somma delle due radici è

$$-\frac{2C^2q^2}{C^2(C^2q^2 + C^2 - 1)} = -\frac{2q^2}{C^2q^2 + C^2 - 1} < 0,$$

da cui segue che la radice negativa è in modulo maggiore di quella positiva. Infine il modulo del prodotto delle radici è

$$\left| \frac{q^2 - C^2 + 1}{C^2(C^2q^2 + C^2 - 1)} \right| = \frac{C^2 - q^2 - 1}{C^2(C^2q^2 + C^2 - 1)} < \frac{C^2 - q^2 - 1}{C^2(C^2 - 1)} < \frac{1}{C^2} < 1,$$

da cui segue che almeno una delle due radici (e quindi quella positiva) deve avere modulo minore di uno. Quindi la condizione (1.4) assicura l'esistenza di una soluzione $0 < a < 1$ dell'equazione di secondo grado e quindi l'esistenza della rete anticipatrice che amplifica di C e anticipa di $\Delta\varphi$ alla pulsazione $\bar{\omega}$. Infine, una volta determinato il valore di a , la costante di tempo T può essere determinata dalla formula

$$T^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{C^2 - 1}{1 - a^2 C^2}$$

1.4.3 Rete ritardatrice o attenuatrice

Supponiamo che

$$\boxed{3. C < 1, \quad \Delta\varphi < 0} \quad (\omega_A^0 > \omega_A, m_\varphi^0 > m_\varphi)$$

In questo caso è necessario attenuare in modo di diminuire ω_A e ciò può essere fatto diminuendo il margine di fase e quindi di una azione **ritardatrice** nell'intorno di ω_A (vedi figura 1.14). A tal fine può essere usata una rete **attenuatrice ritardatrice**.

Si tratta di un sistema con funzione di trasferimento con due gradi di libertà

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + srT} \quad T > 0, \quad r > 1$$

con uno zero in $-1/T$, un polo in $-1/(rT)$ e $\bar{C}(0) = 1$ (vedi figura 1.15).

Attraverso il diagramma di Bode (vedi figura 1.16) si osserva che per $\omega \gg \frac{1}{T}$ il guadagno è circa $-20 \log r$.

Per determinare la fase conviene analizzare il diagramma di Nyquist (vedi figura 1.16). Come dimostrato nell'esempio ?? il diagramma di Nyquist sta sul cerchio di

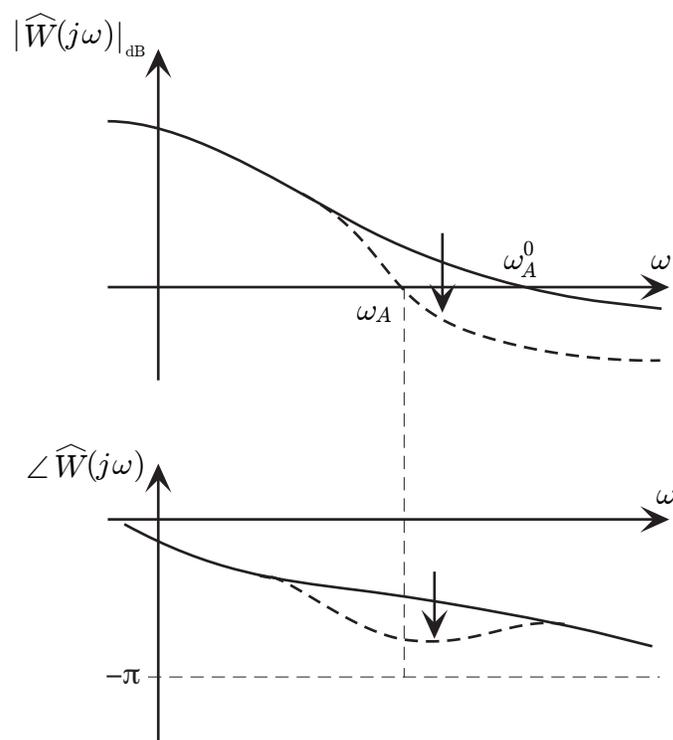


Figure 1.14:

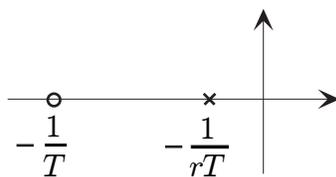


Figure 1.15:

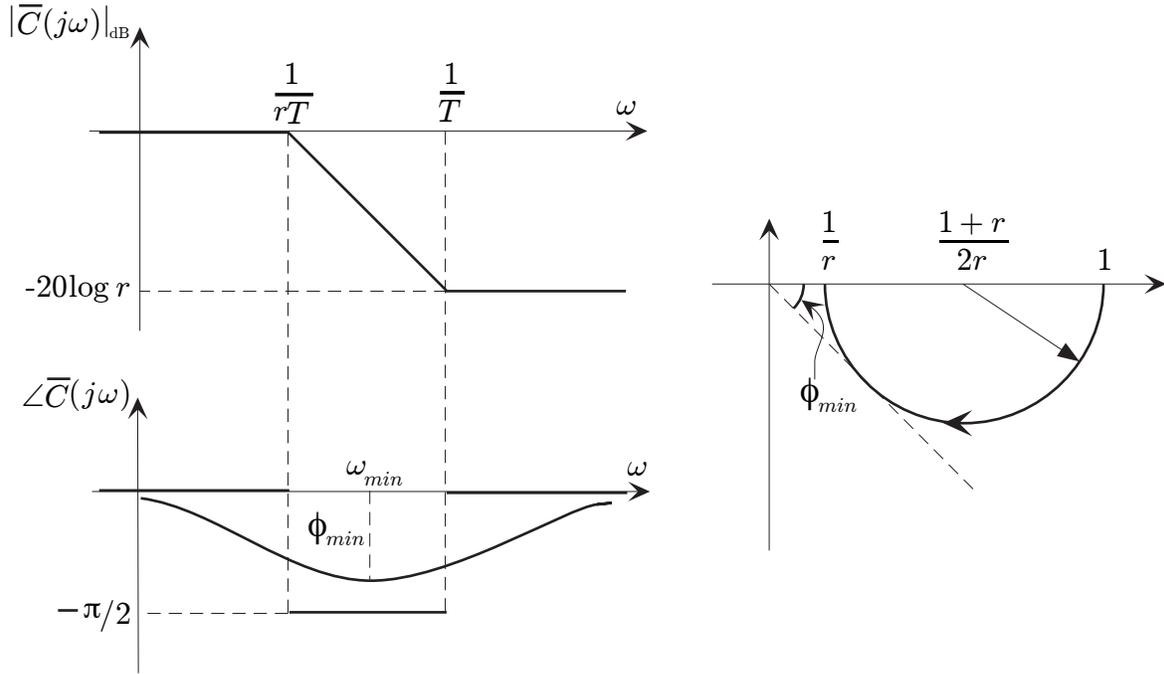


Figure 1.16:

centro $C = \frac{1+r}{2r}$ e raggio $R = \frac{r-1}{2r}$. Quindi possiamo concludere che la fase minima ϕ_{min} si può calcolare nel modo seguente (vedi figura 1.16)

$$\tan \phi_{min} = -\frac{r-1}{2r} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+r}{2r}\right)^2 - \left(\frac{1-r}{2r}\right)^2}} = -\frac{r-1}{2\sqrt{r}} \Rightarrow$$

$$\phi_{min} = -\arctan \frac{r-1}{2\sqrt{r}}$$

mentre ω_{min} , che è la pulsazione in corrispondenza della quale ϕ_{min} viene assunta, può essere determinata come segue

$$\bar{C}(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega r T} = \frac{(1 + \omega^2 r T^2) + j\omega(1-r)T}{1 + \omega^2 r^2 T^2}$$

$$\tan \phi_{min} = \frac{\omega_{min}(1-r)T}{1 + \omega_{min}^2 r T^2} = \frac{1-r}{2\sqrt{r}}$$

$$\omega_{min} = \frac{1}{T\sqrt{r}}$$

Problema di sintesi: Dati

$$\bar{\omega} = \omega_A, \quad C < 1, \quad \Delta\varphi < 0$$

trovare una rete ritardatrice $\bar{C}(s) = \frac{1+sT}{1+srT}$ e quindi trovare

$$T > 0, \quad r > 1$$

tali che

$$|\bar{C}(j\bar{\omega})| = C \quad \angle \bar{C}(j\bar{\omega}) = \Delta\varphi$$

Soluzione

Indichiamo con $q \triangleq \tan \Delta\varphi < 0$. Imporre che $\bar{C}(s)$ abbia modulo C e fase con tangente q per $s = j\bar{\omega}$ significa trovare T, r tali che le due equazioni seguenti siano soddisfatte

$$\begin{cases} C^2 = \frac{1 + \bar{\omega}^2 T^2}{1 + \bar{\omega}^2 r^2 T^2} \\ q = -\frac{\bar{\omega}(r-1)T}{1 + \bar{\omega}^2 T^2 r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\omega}^2 T^2 = \frac{1 - C^2}{C^2 r^2 - 1} \\ (1 + \bar{\omega}^2 T^2 r)^2 q^2 = \bar{\omega}^2 T^2 (r-1)^2 \end{cases}$$

Come visto per la rete anticipatrice, si perviene alla seguente equazione di secondo grado in r (stessa equazione della rete anticipatrice)

$$C^2(C^2 q^2 + C^2 - 1)r^2 + 2C^2 q^2 r + (q^2 - C^2 + 1) = 0,$$

equazione che ha secondo e terzo coefficienti maggiori di zero. Se avesse il primo coefficiente maggiore od uguale a zero allora tale equazione non potrebbe avere soluzioni reali positive. Dobbiamo imporre quindi la condizione

$$C^2 < \frac{1}{q^2 + 1}. \quad (1.5)$$

Questa condizione implica che l'equazione ha una radice positiva e una negativa. Infine, sapendo che la somma delle due radici è

$$-\frac{2C^2 q^2}{C^2(C^2 q^2 + C^2 - 1)} > 0$$

possiamo concludere che la radice positiva è in modulo maggiore di quella negativa. Infine, notando che il modulo del prodotto è

$$\left| \frac{q^2 - C^2 + 1}{C^2(C^2 q^2 + C^2 - 1)} \right| = \frac{q^2 - C^2 + 1}{C^2(1 - C^2 - C^2 q^2)} > \frac{q^2 - C^2 + 1}{C^2(1 - C^2)} > \frac{1}{C^2} > 1.$$

si può concludere che almeno una delle due radici (e quindi quella positiva) deve avere modulo maggiore di uno. Quindi la condizione (1.5) assicura l'esistenza di una soluzione $r > 1$ dell'equazione di secondo grado e quindi l'esistenza della rete ritardatrice che attenua di $C < 1$ e ritarda di $\Delta\varphi < 0$ alla pulsazione $\bar{\omega}$. Infine T si ottiene dalla formula

$$T^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{1 - C^2}{C^2 r^2 - 1}.$$

1.4.4 Rete ritardatrice e anticipatrice o rete sella

Supponiamo che

$$4. C < 1, \quad \Delta\varphi > 0 \quad (\omega_A^0 > \omega_A, m_\varphi^0 < m_\varphi)$$

In questo caso è necessario sia attenuare per diminuire ω_A sia anticipare per aumentare il margine di fase (vedi figura 1.17). Non è quindi possibile usare nessuna delle due reti precedenti. È necessario in questo caso utilizzare una rete più complessa con due zeri e due poli, la cosiddetta rete **ritardatrice e anticipatrice**. Si

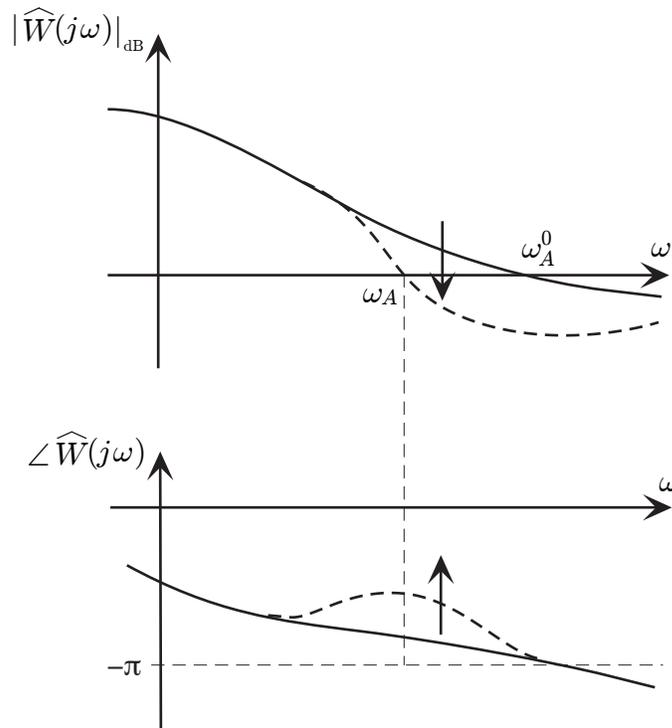


Figure 1.17:

tratta di un sistema con funzione di trasferimento con tre gradi di libertà

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + sT_a}{1 + saT_a} \frac{1 + sT_r}{1 + srT_r}$$

in cui si impone $r = 1/a$. Si tratta quindi del prodotto della funzione di trasferimento di una rete anticipatrice e di una rete ritardatrice. Dovrà essere $T_a > 0$, $0 < a < 1$, $T_r > 0$, $r > 1$. Il fatto che $r = 1/a$ implica che $\bar{C}(\infty) = 1$. Gli zeri sono in $-1/T_a$, $-1/T_r$ e i poli in $-1/aT_a$, $-1/rT_r$ (vedi figura 1.18). Per i nostri scopi imponiamo anche $T_a \ll T_r$.

Il Diagramma di Bode è mostrato in figura 1.19.

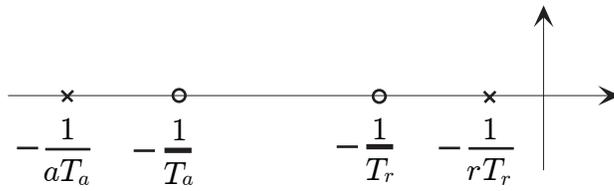


Figure 1.18:

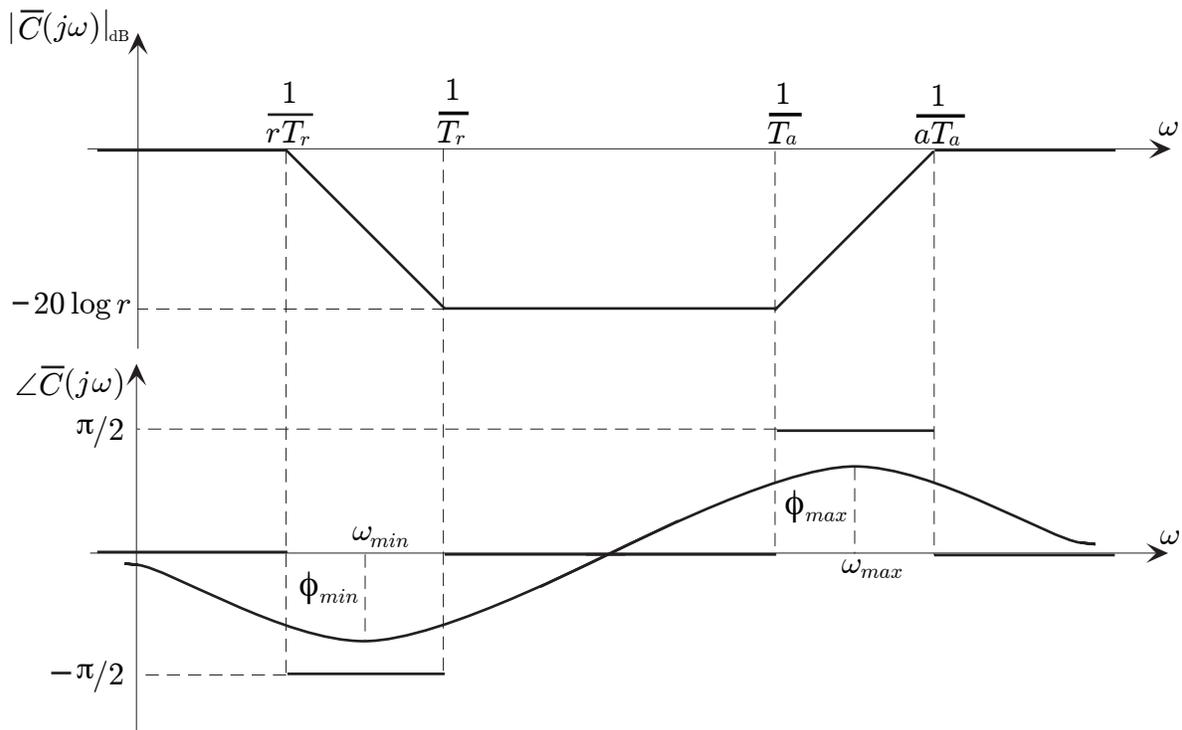


Figure 1.19:

Anche in questo caso si può dimostrare che il diagramma di Nyquist di $\overline{C}(s)$ (vedi figura 1.20) sta su una circonferenza. A tal fine basta risolvere l'equazione con incognite C , R :

$$\frac{1 + j\omega T_a}{1 + j\omega a T_a} \frac{1 + j\omega T_r}{1 + j\omega r T_r} - C = R \frac{1 - j\omega a T_a}{1 + j\omega a T_a} \frac{1 - j\omega r T_r}{1 + j\omega r T_r} \quad \forall \omega.$$

Si ottiene

$$C = \frac{1 + H}{2} \quad R = \frac{1 - H}{2}$$

dove

$$H = \frac{T_r + T_a}{rT_r + aT_a}.$$

Si noti infine che

$$\left| \frac{1 + j\omega T_a}{1 + j\omega a T_a} \frac{1 + j\omega T_r}{1 + j\omega r T_r} - C \right| = |R| \left| \frac{1 - j\omega a T_a}{1 + j\omega a T_a} \right| \left| \frac{1 - j\omega r T_r}{1 + j\omega r T_r} \right| = |R|$$

e quindi il diagramma di Nyquist sta sulla circonferenza di centro C e raggio R .

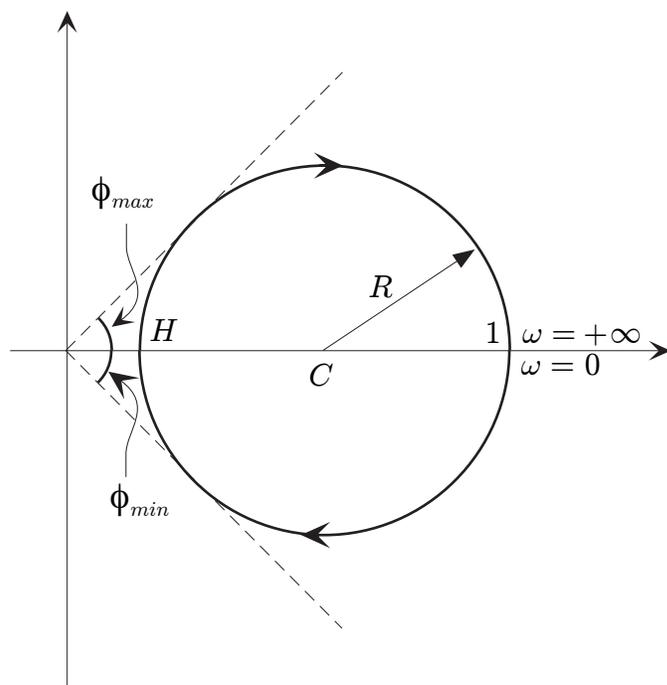


Figure 1.20:

Il modulo ha punto di minimo quando $\overline{C}(j\omega)$ è reale e $\angle \overline{C}(j\omega) = 0$ e quindi quando $\overline{C}(j\omega) = H$:

$$\begin{aligned} \frac{1 + j\omega T_a}{1 + j\omega a T_a} \frac{1 + j\omega T_r}{1 + j\omega r T_r} &= H \\ (1 + j\omega T_a)(1 + j\omega T_r) &= H(1 + j\omega a T_a)(1 + j\omega r T_r) \end{aligned}$$

$$(1 - H) + (j\omega) \overbrace{[T_a + T_r - H(aT_a + rT_r)]}^{=0} + (j\omega)^2 (1 - H) T_a T_r \overbrace{ar}^{=1} = 0$$

$$T_a T_r \omega^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_a T_r}}.$$

Con metodi simili si possono determinare le fasi massime e minime ϕ_{max} , ϕ_{min} e le pulsazioni ω_{max} , ω_{min} in corrispondenza alle quali tali fasi sono assunte.

Problema di sintesi: Dati

$$\bar{\omega} = \omega_A, \quad C < 1, \quad \Delta\varphi > 0$$

trovare una rete ritardatrice anticipatrice $\bar{C}(s) = \frac{1+sT_a}{1+saT_a} \frac{1+sT_r}{1+srT_r}$ e quindi trovare

$$T_a < T_r, \quad 0 < a < 1 \quad (\text{e quindi } r = 1/a)$$

tali che

$$|\bar{C}(j\bar{\omega})| = C \quad \angle \bar{C}(j\bar{\omega}) = \Delta\varphi.$$

Soluzione

Rispetto ai casi precedenti, qui abbiamo due equazioni da soddisfare e tre parametri da determinare. Abbiamo quindi un grado di libertà che ci rimane da fissare. Indichiamo con

$$\phi_a = \angle \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} > 0 \quad \text{il contributo di fase della parte anticipatrice}$$

$$\phi_r = \angle \frac{1 + j\bar{\omega}T_r}{1 + j\bar{\omega}rT_r} < 0 \quad \text{il contributo di fase della parte ritardatrice.}$$

La condizione sulla fase diventa

$$\Delta\varphi = \phi_a + \phi_r.$$

Il grado di libertà lo utilizziamo fissando ϕ_r da cui risulta fissato anche ϕ_a . Poiché siamo interessati all'azione attenuatrice/anticipatrice, la pulsazione $\bar{\omega}$ sarà posizionata dove ϕ_a è grande e ϕ_r piccolo. Di solito si fissa $-6^\circ \leq \phi_r \leq -3^\circ$. Anche il modulo può essere decomposto:

$$|\bar{C}(j\bar{\omega})|_{dB} = \left| \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} \right|_{dB} + \left| \frac{1 + j\bar{\omega}T_r}{1 + j\bar{\omega}rT_r} \right|_{dB}.$$

Sempre per le ipotesi fatte su $\bar{\omega}$ possiamo approssimare

$$\left| \frac{1 + j\bar{\omega}T_r}{1 + j\bar{\omega}rT_r} \right|_{dB} \simeq -20 \log r = -20 \log \frac{1}{a} = 20 \log a$$

così che avremo queste due condizioni da soddisfare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} \right|_{dB} = 20 \log C - 20 \log a \\ \angle \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} = \Delta\varphi - \phi_r \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} \right| = \frac{C}{a} \\ \angle \frac{1 + j\bar{\omega}T_a}{1 + j\bar{\omega}aT_a} = \Delta\varphi - \phi_r \end{array} \right.$$

che sono due equazioni nelle due incognite a , T_a che si possono risolvere in modo simile a come è stato risolto il problema della sintesi per le reti anticipatrici. Più precisamente definiamo $q = \tan(\Delta\varphi - \phi_r)$. Il sistema precedente diventerà

$$\begin{cases} \frac{1 + \bar{\omega}^2 T_a^2}{1 + a^2 \bar{\omega}^2 T_a^2} = \frac{C^2}{a^2} \\ \frac{\bar{\omega} T_a (1 - a)}{1 + a \bar{\omega}^2 T_a^2} = q \end{cases}.$$

Con conti analoghi a quelli già fatti si ottiene che a deve essere soluzione dell'equazione di secondo grado:

$$(q^2 - C^2 + 1)a^2 + 2C^2 q^2 a + C^2(q^2 C^2 + C^2 - 1) = 0$$

la quale, perché ammetta una radice maggiore di zero, poiché i primi due coefficienti sono positivi, deve avere terzo coefficiente negativo e quindi

$$C^2 < \frac{1}{1 + q^2}.$$

Infine, osservando che il modulo del prodotto delle radici

$$\frac{C^2(1 - q^2 C^2 - C^2)}{q^2 - C^2 + 1} < \frac{C^2(1 - C^2)}{1 - C^2 + q^2} < C^2 < 1,$$

si può concludere che l'equazione ammette soluzione $0 < a < 1$. Infine si ottiene T_a dalla formula

$$T_a^2 = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{C^2 - a^2}{a^2(1 - C^2)}.$$

Resta da calcolare T_r in modo che la parte ritardatrice induca alla pulsazione $\bar{\omega}$ un ritardo di fase ϕ_r scelto all'inizio. Si parte dal fatto che

$$\tan \phi_r = \frac{\bar{\omega} T_r (1 - r)}{1 + r \bar{\omega}^2 T_r^2} \quad r = \frac{1}{a}$$

da cui si ottiene una equazione di secondo grado in T_r

$$\overbrace{(r \bar{\omega}^2 \tan \phi_r)}^{<0} T_r^2 - \overbrace{\bar{\omega}(1 - r)}^{>0} T_r + \overbrace{\tan \phi_r}^{<0} = 0$$

che dobbiamo a posteriori verificare abbia radici reali di cui una positiva maggiore di T_a .

Osservazioni importanti

Osservazione 1.3 Una volta che è stato determinato il compensatore è necessario verificare che il sistema a catena chiusa sia effettivamente stabile.

Osservazione 1.4 È talvolta possibile che una sola rete correttiva non sia in grado di apportare la correzione di modulo o di fase sufficiente. In questo caso è necessario inserire più reti correttive in serie, che insieme portano ad azioni di entità più elevata.

Osservazione 1.5 La sintesi di Bode è per tentativi. È quindi probabile che siano necessari, a posteriori, piccoli aggiustamenti dei parametri per soddisfare le specifiche del progetto.

Osservazione 1.6 Ripercorrendo i passi che costituiscono la sintesi di Bode, ci si può rendere conto che con questo metodo non è in realtà necessario conoscere la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema da controllare ma che serve solo sapere la risposta in frequenza $G(j\omega)$ per $\omega \simeq 0$, in modo da ottenere guadagno di Bode e tipo di $G(s)$ e per $\omega \simeq \omega_A$. Si noti che questa informazione può in linea di principio essere ottenuta sperimentalmente alimentando in sistema da controllare con un gradino e con sinusoidi di pulsazioni prossime alla pulsazione di attraversamento ω_A che si vuole ottenere.

1.5 Esempi

Esempio 1.7 Si supponga di dover controllare un sistema con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{25}{s(s+5)(s+10)}$$

Supponiamo di voler applicare il metodo di Bode per ottenere le seguenti specifiche.

1. errore nullo nella risposta al gradino ed errore $|e_{r,2}| < \varepsilon = 0.1$ nella risposta alla rampa,
2. tempo di salita $t_s \simeq 0.25$ s,
3. sovraelongazione $S \simeq 0.27$.

Applicando le formule approssimate, otteniamo le seguenti specifiche su $W(s) = C(s)G(s)$: $\omega_A \simeq 8$ rad/s, $m_\varphi = \pi/4$.

1.

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{K_c \bar{C}(s)}{s^{h_c}} \\ G(s) &= \frac{\hat{G}_p(s)}{s} \quad \hat{G}_p(0) = 1/2, \quad h_p = 1 \\ h_c &= h - h_p = 1 - 1 = 0 \quad K_c = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\hat{G}_p(0)} = 20 \end{aligned}$$

2.

$$W(s) = \overline{C}(s) \overbrace{20G(s)}^{\hat{W}(s)} \quad \hat{W}(s) = \frac{500}{s(s+5)(s+10)}$$

$$C = \frac{1}{|\hat{W}(j\omega_A)|} = 1.93 \quad \angle \hat{W}(j\omega_A) \simeq -3.25 \text{ rad}$$

$$\Delta\varphi = m_\varphi - (\angle \hat{W}(j\omega_A) + \pi) = \pi/4 - (0.11) = 0.9 \text{ rad} (51^\circ).$$

Dobbiamo trovare una rete anticipatrice $\overline{C}(s)$ tale che $|\overline{C}(j\omega_A)| = C \simeq 1.93$ e $\angle \overline{C}(j\omega_A) = 0.9 \text{ rad}$.

$$q = \tan \Delta\varphi = 1.26 \quad C = 1.93$$

Quindi $C^2 = 3.7 > q^2 + 1 = 2.6$ è soddisfatta. Il polinomio di secondo grado diventa

$$32.5a^2 + 12a - 1.14 = 0$$

che ha soluzione positiva $a = 0.08$ da cui si ottiene $T = 0.21$. La rete attenuatrice è

$$\overline{C}(s) = \frac{1 + 0.21s}{1 + 0.016s} \quad C(s) = 20\overline{C}(s).$$

Attraverso simulazioni si determina che il sistema retroazionato è caratterizzato da

$$\begin{array}{ll} \text{Tempo di salita} & T_s = 0.17 \text{ sec} \quad (\text{specifica } T_s = 0.25 \text{ sec}) \\ \text{Sovraelongazione} & S = 0.25 \quad (\text{specifica } S = 0.27) \end{array}$$

Esempio 1.8 Dobbiamo controllare lo stesso sistema dell'esempio precedente con stessa specifica sull'errore a regime e con

$$\omega_A \simeq 2 \text{ rad/s} \quad m_\varphi \simeq 40^\circ = 0.7 \text{ rad}.$$

Poiché abbiamo stesse specifiche sull'errore a regime rispetto all'esempio 1, avremo che

$$C(s) = 20\overline{C}(s)$$

dove $\overline{C}(s)$ è tale che $\overline{C}(0) = 1$ e deve essere progettata per soddisfare le condizioni su ω_A e m_φ . Sia $\hat{W}(s) = 20G(s)$ in modo tale che $C(s)G(s) = \overline{C}(s)\hat{W}(s)$

$$\begin{aligned} |\hat{W}(j\omega_A)| &= 4.55 \quad \angle \hat{W}(j\omega_A) = -2.15 \text{ rad} \\ m_\varphi^o &= \pi + \angle \hat{W}(j\omega_A) = 0.99 \text{ rad} > m_\varphi \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi attenuare.

$$C = \frac{1}{|\hat{W}(j\omega_A)|} = 0.22 \quad q = \tan \Delta\varphi = \tan(-0.29) = -0.3.$$

Si verifica che $C^2 < \frac{1}{1+q^2}$ e si ottiene l'equazione di secondo grado

$$-0.046r^2 + 0.009r + 1.044 = 0,$$

da cui $r = 4.9$, $T = 1.27$

$$\overline{C}(s) = \frac{1 + 1.27s}{1 + 6.2s}$$

Esempio 1.9 Supponiamo di voler controllare un sistema sempre con la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{25}{s(s+5)(s+10)}$$

volendo ottenere:

1. errore a regime nullo nella risposta al gradino ed errore minore di $0.01 = \varepsilon$ nella risposta alla rampa,
2. $\omega_A \simeq 5$,
3. $m_\varphi \simeq 60^\circ(1.05\text{rad})$.

Per quanto riguarda errore a regime si osservi che

$$C(s) = \frac{K_c \bar{C}(s)}{s^{h_c}}$$

$$G(s) = \frac{\hat{G}_p(s)}{s} \quad \hat{G}_p(0) = 1/2, \quad h_p = 1$$

$$h_c = h - h_p = 1 - 1 = 0 \quad K_c = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\hat{G}_p(0)} = 200$$

$$W(s) = \bar{C}(s) \overbrace{200G(s)}^{\hat{W}(s)} \quad \hat{W}(s) = \frac{5000}{s(s+5)(s+10)}$$

$$C = \frac{1}{|\hat{W}(j\omega_A)|} = \frac{1}{12.65} = 0.08 \quad \angle \hat{W}(j\omega_A) = -161^\circ (-2.8 \text{ rad})$$

$$m_\varphi^o = \pi + \angle \hat{W}(j\omega_A) = 19^\circ (0.34 \text{ rad}) \quad \Delta\varphi = 60^\circ - 19^\circ = 41^\circ (0.71\text{rad}) > 0.$$

Abbiamo bisogno di usare la rete anticipatrice/ritardatrice. Fissiamo il parametro supplementare $\phi_r = -3^\circ$. Da ciò possiamo calcolare $q = \tan(\Delta\varphi - \phi_r) = \tan(44) = 0.98$. L'equazione di secondo grado da risolvere per ottenere a è

$$1.96a^2 + 0.012a - 0.0062 = 0 \rightarrow a = 0.053 \quad r = \frac{1}{a} = 18.8$$

e inoltre

$$T_a = 0.22.$$

Infine calcoliamo T_r risolvendo un'altra equazione di secondo grado

$$-24.7T_r^2 + 89.2T_r - 0.05 = 0$$

che ha due radici 0.0006, 3.61. Prendiamo la radice più grande $T_r = 3.61$ che è di una decade più grande di T_a . Quindi

$$\bar{C}(s) = \frac{1 + 0.22s}{1 + 0.019s} \frac{1 + 3.6s}{1 + 68.1s}$$

Variando ϕ_r si ottengono soluzioni alternative.

ϕ_r	a	T_a	r	T_r	
-0.3	0.056	0.206	17.9	36	
-1	0.055	0.206	18.1	10.8	
-3	0.053	0.221	18.8	3.6	
-6	0.050	0.248	20.1	1.8	
-12	0.043	0.312	23.4	0.9	
-24	0.027	0.54	36.5	0.4	non va bene perché $T_a \neq T_r$

Chapter 2

Altri metodi di sintesi

In questo capitolo illustreremo altri due metodi di sintesi del controllore. Il primo consiste in una tecnica euristica molto semplice da applicare in pratica per la determinazione dei parametri di controllori standard detti controllori PID a partire dalla risposta al gradino del sistema in catena aperta o del sistema in catena chiusa. Il secondo è un metodo sofisticato basato sulle proprietà algebriche dei polinomi che permette di allocare direttamente i poli del sistema controllato.

2.1 Metodi euristici per la sintesi dei controllori PID

Nella pratica, spesso il legame ingresso/uscita del sistema da controllare è noto solo parzialmente. È tuttavia possibile ottenere un comportamento soddisfacente del sistema ad anello chiuso ricorrendo allo schema in figura 2.1 in cui viene inserito nella catena diretta un **controllore PID** (Proporzionale, Integrale, Derivativo).

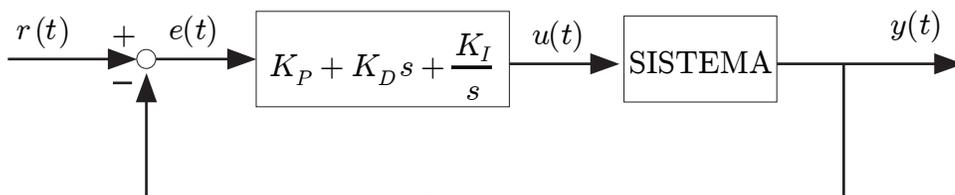


Figure 2.1:

L'ingresso del sistema è allora dato dalla somma di tre contributi:

1. un contributo $K_P e$ proporzionale all'errore,

2. un contributo $K_D s e$ proporzionale alla derivata dell'errore,
3. un contributo $K_I e/s$ proporzionale all'integrale dell'errore.

Il contributo proporzionale realizza la funzione più elementare di regolazione che è quella di produrre un ingresso che corregge l'uscita appena l'errore diventa diverso da zero. Il contributo integrativo tende a migliorare il comportamento a regime del sistema, perché tende a produrre un'azione correttiva che aumenta se l'errore non converge a zero. Abbiamo comunque già mostrato come un polo nell'origine porti ad un errore a regime nullo nella risposta a gradino mentre K_I grande riduca l'errore a regime nella risposta alla rampa. Infine il contributo derivativo tende invece a migliorare il comportamento del sistema retroazionato in transitorio. Infatti tale contributo diventa rilevante appena l'errore cambia e tende quindi ad effettuare un'azione di controllo prima che l'errore diventi rilevante.

È intuitivo che delle tre azioni, la derivativa è quella che, se troppo accentuata, può destabilizzare il sistema. Inoltre essa tende a produrre delle azioni di controllo elevate quando il riferimento cambia bruscamente. Anche il rumore presente può essere fonte di problemi quando sia ragguardevole la componente derivativa. Essa ha infatti l'effetto di accentuare l'effetto del rumore. Per questi motivi in molte situazioni si preferisce porre $K_D = 0$ e quindi di non fare intervenire nessuna azione derivatrice nel regolatore.

Osservazione 2.1 Nella realizzazione pratica della parte derivatrice del controllore PID si può approssimare in bassa frequenza la funzione di trasferimento $K_D s$ con la funzione di trasferimento

$$K_D \frac{s}{1 + sT}$$

che approssima $K_D s$ quando s è piccolo. Se B è la banda del sistema in catena chiusa e se $\omega_B = 2\pi B$ (traduzione frequenza \rightarrow pulsazione) allora T verrà scelto in modo tale che

$$\omega_B T \ll 1.$$

Si osservi inoltre che in molte situazioni nelle quali si voglia utilizzare l'azione derivatrice, allo schema iniziale si preferisce lo schema modificato di figura 2.2 che ha lo stesso guadagno d'anello, ma che si differenzia dal precedente perché l'azione derivatrice deriva y e non $e = r - y$. Questo è conveniente se sappiamo che il segnale di riferimento può contenere delle discontinuità che porterebbero a segnali impulsivi di ingresso al sistema da controllare. In questo schema alternativo invece ciò non avviene perché il riferimento non viene derivato ma viene derivata solo la y che (supponendo che il sistema sia passa basso) varia "lentamente". Supponendo che il sistema abbia funzione di trasferimento $G(s)$, si ottiene nei due schemi funzioni di trasferimento a catena chiusa sono nei due casi

$$\frac{(K_P + K_I/s + K_D s)G(s)}{1 + (K_P + K_I/s + K_D s)G(s)} \quad \text{schema tradizionale}$$

$$\frac{(K_P + K_I/s)G(s)}{1 + (K_P + K_I/s + K_D s)G(s)} \quad \text{schema alternativo}$$

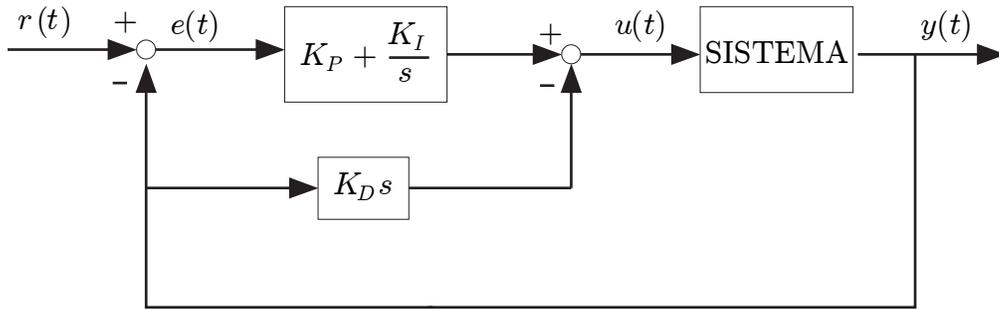


Figure 2.2:

Procedura di Ziegler-Nichols Se il modello del sistema non è noto, si possono aggiustare K_P , K_I e K_D con una procedura empirica proposta da Ziegler e Nichols, basata su due semplici test da applicare al sistema da controllare. Per motivi di convenienza, la funzione di trasferimento del compensatore PID sarà riscritta nella forma

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (2.1)$$

1. Metodo della risposta al gradino: si utilizza la risposta al gradino unitario, ad anello aperto, approssimandola con una spezzata come in figura 2.3 in cui si distinguono un tempo di ritardo L (= lag) e uno di salita S . I valori dei

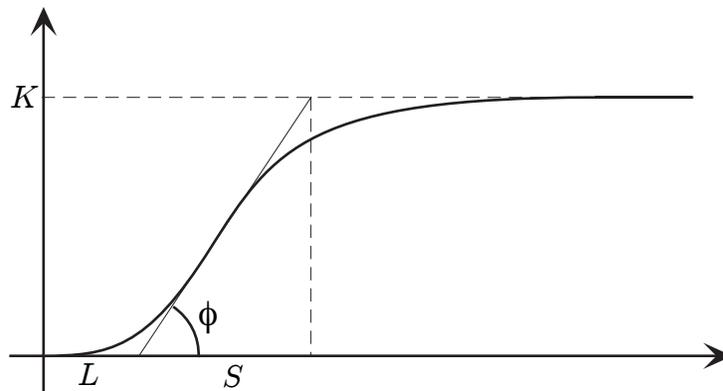


Figure 2.3:

parametri che figurano in (2.1), se scelti in accordo con la tabella 1 in cui si è posto $R = K/S = \tan \phi$, normalmente danno luogo ad un sistema con due poli dominanti complessi coniugati e fattore di smorzamento 0.2.

2. Metodo del limite di stabilità: si esamina dapprima il comportamento del sistema ad anello chiuso con il solo compensatore proporzionale, e si accresce

Tipo di controllore	K_P	T_I	T_D
P	$1/RL$		
PI	$0.9/RL$	$3L$	
PID	$1.2/RL$	$2L$	$0.5L$

Table 2.1:

K_P finché il sistema raggiunge il limite di stabilità e inizia ad oscillare. Il valore del guadagno per cui ciò si verifica sarà indicato con \bar{K}_P mentre T è il periodo dell'oscillazione. Allora i parametri in (2.1) si scelgono in accordo con la tabella 2.

Tipo di controllore	K_P	T_I	T_D
P	$0.5\bar{K}_P$		
PI	$0.45\bar{K}_P$	$0.85T$	
PID	$0.6\bar{K}_P$	$0.5T$	$0.125T$

Table 2.2:

2.2 Sintesi diretta e allocazione dei poli

Abbiamo mostrato finora delle tecniche per la sintesi del regolatore che sono approssimate e per tentativi. Mostriamo ora invece un metodo di sintesi "esatto" che porta all'ottenimento del compensatore capace di allocare tutti o parte dei poli a catena chiusa in punti del piano complesso preassegnati. Il grosso difetto di questi metodi rispetto ai precedenti è che questi richiedono la conoscenza esatta della funzione di trasferimento e che forniscono compensatori di complessità analoga alla complessità del sistema da controllare.

2.2.1 Compensatore a un parametro

Cominciamo a considerare lo schema di controllo in figura 2.4 dove $G(s)$ è la funzione di trasferimento del processo da controllare. Supponiamo si volere ottenere che il sistema a catena chiusa soddisfi le seguenti due specifiche:

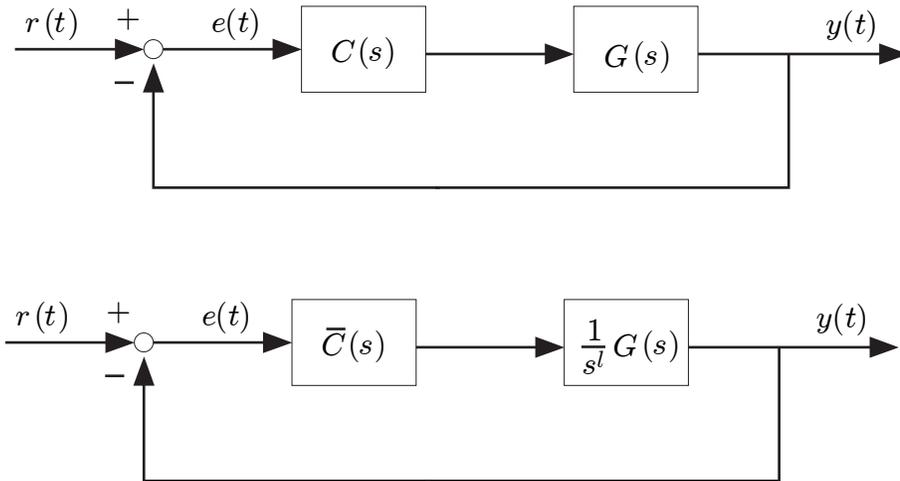


Figure 2.4:

1. L'errore a regime nullo in risposta al riferimento $r(t) = \delta^{(-h)}(t)$ di tipo rampa di ordine l .
2. Il sistema in catena chiusa ha poli assegnati $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{C}$.

Per soddisfare la prima specifica bisogna imporre che

$$C(s) = \frac{1}{s^l} \bar{C}(s)$$

dove dobbiamo imporre che $\bar{C}(0) \neq 0$. Come già visto per la sintesi di Bode, gli l poli nell'origine di $C(s)$ servono insieme ai poli nell'origine di $G(s)$ a ottenere un numero complessivo di poli nell'origine in $C(s)G(s)$ pari ad h .

Il passo successivo è determinare $\bar{C}(s)$ in modo che sia soddisfatta la seconda specifica. In riferimento al secondo schema nella figura 2.4, si definisca

$$\widehat{W}(s) := \frac{1}{s^l} G(s)$$

che sappiamo avere complessivamente h poli nell'origine. Esprimiamo $\widehat{W}(s)$ come rapporto di due polinomi primi tra loro

$$\widehat{W}(s) = \frac{b(s)}{a(s)},$$

Sia $n := \deg a(s)$ e \deg indica il grado di un polinomio. La stessa cosa facciamo per il compensatore

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

in cui i polinomi $x(s)$ e $y(s)$, coprimi, sono da determinare in modo tale che la funzione di trasferimento a catena chiusa

$$T(s) = \frac{C(s)\widehat{W}(s)}{1 + C(s)\widehat{W}(s)} = \frac{b(s)x(s)}{a(s)y(s) + b(s)x(s)}$$

abbia poli preassegnati. A tal fine fissiamo un polinomio $p(s)$ che abbia questi preassegnati poli come radici (eventualmente con alcune ripetizioni). È chiaro che per fare in modo che $T(s)$ abbia questi poli è sufficiente trovare i polinomi $x(s)$, $y(s)$ che soddisfano l'equazione polinomiale

$$a(s)y(s) + b(s)x(s) = p(s). \quad (2.2)$$

Ipotizziamo che

1. $\widehat{W}(s)$ sia strettamente propria e che

$$n = \deg a(s) \quad m = \deg b(s) \quad m \leq n - 1$$

2. $p(s)$ abbia grado $2n - 1$.

L'equazione (2.2) nelle incognite polinomiali $x(s)$, $y(s)$ è molto importante in algebra ed è detta equazione **diofantea** o equazione di Bézout.

Per prima cosa cerchiamo di capire se l'equazione (2.2) ammette o no soluzione. È ovvio che se $a(s)$, $b(s)$ hanno una radice comune $s_0 \in \mathbb{C}$, allora s_0 dovrà essere radice anche di $p(s)$, quindi in questo caso l'equazione (2.2) non sarà risolubile per ogni scelta di $p(s)$. Nel nostro caso però i polinomi $a(s)$ e $b(s)$ sono primi tra loro e quindi può essere applicato il seguente teorema che è uno dei risultati più classici dell'algebra e del quale non si darà la dimostrazione.

Teorema 2.2 Dati due polinomi coprimi $a(s)$ e $b(s)$, allora l'equazione polinomiale (2.2) ammette sempre soluzione $x(s)$, $y(s)$ per qualsiasi scelta del polinomio $p(s)$.

Sorgono ora naturalmente due domande:

1. Tra le soluzioni $x(s)$, $y(s)$ dell'equazione (2.2), ne esiste una tale che $\overline{C}(s) = x(s)/y(s)$ sia propria e quindi realizzabile?
2. Come trovare la soluzione $x(s)$, $y(s)$ dell'equazione (2.2) che soddisfa la condizione precedente?

Per rispondere alla prima domanda si osservi che, se l'equazione (2.2) ammette soluzione $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$, allora ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned} x(s) &= \bar{x}(s) - a(s)q(s) \\ y(s) &= \bar{y}(s) + b(s)q(s) \end{aligned}$$

dove $q(s)$ è un polinomio arbitrario. Quindi a partire dalle soluzioni $\bar{x}(s)$, $\bar{y}(s)$, possiamo eseguire la seguente divisione con resto di $\bar{x}(s)$ per $a(s)$

$$\bar{x}(s) = q(s)a(s) + x(s) \quad \deg x(s) \leq n - 1$$

dove $q(s)$ è il quoziente e $x(s)$ è il resto che deve avere grado minore o uguale a $n - 1$. Abbiamo quindi

$$x(s) = \bar{x}(s) - q(s)a(s).$$

Se definiamo

$$y(s) := \bar{y}(s) + q(s)b(s),$$

è chiaro che $x(s)$, $y(s)$ risolvono l'equazione (2.2). Si noti che $\deg y(s) = n - 1$. Infatti si osservi che $\deg p(s) = 2n - 1$, $\deg b(s)x(s) \leq 2n - 2$, da cui segue che

$$\deg a(s)y(s) = \deg p(s) - \deg b(s)x(s) = 2n - 1$$

e quindi, essendo $\deg a(s) = n$, avremo $\deg y(s) = n - 1$. Da quanto detto possiamo concludere che il compensatore

$$\bar{C}(s) = \frac{x(s)}{y(s)}$$

è una funzione di trasferimento propria che porta a una funzione di trasferimento a catena chiusa avente $p(s)$ come denominatore.

Dopo aver mostrato la risposta alla prima domanda, cioè che esiste un controllore proprio, mostriamo ora la risposta alla seconda domanda, cioè mostriamo come trovare questo controllore. Scriviamo i polinomi $x(s)$, $y(s)$

$$\begin{aligned} x(s) &= x_{n-1}s^{n-1} + x_{n-2}s^{n-2} + \dots + x_1s + x_0 \\ y(s) &= y_{n-1}s^{n-1} + y_{n-2}s^{n-2} + \dots + y_1s + y_0 \end{aligned}$$

evidenziandone così i coefficienti incogniti. La stessa operazione la facciamo per i polinomi $a(s)$, $b(s)$ e $p(s)$

$$\begin{aligned} b(s) &= b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 \\ a(s) &= a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 \\ p(s) &= p_{2n-1}s^{2n-1} + p_{2n-2}s^{2n-2} + \dots + p_1s + p_0 \end{aligned}$$

È facile verificare che l'equazione (2.3) si traduce nella seguente equazione lineare, la cui soluzione darà $\bar{C}(s)$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} b_0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & & 0 & a_1 & a_0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ \hline 0 & b_{n-1} & \cdots & b_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ 0 & 0 & & b_2 & 0 & a_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & b_{n-1} & 0 & & & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \\ p_{n+1} \\ \vdots \\ p_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Si osservi infine che, se $p(s)$ è stato scelto tale che $p(0) \neq 0$, allora l'eventuale presenza di poli nell'origine in $\widehat{W}(s)$ implicherebbe che $a(0) = 0$ e $b(0) \neq 0$ che, considerando la (2.2), porterebbe a concludere che $b(0)x(0) = p(0)$ e quindi che $x(0) \neq 0$. Questo fatto assicurerebbe che $\overline{C}(0) \neq 0$, come richiesto in precedenza.

Esempio 2.3

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+2}{(s-3)(s+1)} \\ b(s) &= s+2 \\ a(s) &= s^2 - 2s - 3 \end{aligned}$$

Supponiamo di voler ottenere una funzione di trasferimento a catena chiusa $T(s)$ con denominatore:

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+10) = s^3 + 13s^2 + 32s + 20.$$

Il sistema lineare da risolvere è

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 + y_0 - 2y_1 = 13 \\ x_0 + 2x_1 - 2y_0 - 3y_1 = 32 \\ 2x_0 - 3y_0 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_0 = 15 \\ x_0 + 2x_1 - 2y_0 = 35 \\ 2x_0 - 3y_0 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ x_0 = 13 \\ x_1 = 13 \end{cases}$$

Quindi

$$C(s) = \frac{x(s)}{y(s)} = 13 \frac{s+1}{s+2}$$

che è stabile.

Osservazione 2.4 Il metodo presentato permette di ottenere un sistema a catena chiusa avente funzione di trasferimento con poli preassegnati. Uno svantaggio di questo metodo sta nella complessità sia del compensatore che si ottiene sia del sistema a catena chiusa. In effetti, se il sistema da controllare ha denominatore di grado n , allora il controllore che si ottiene ha denominatore di grado $n-1$ mentre il sistema a catena chiusa ha denominatore di grado $2n-1$. I metodi per tentativi invece portano a controllori di complessità bassa. Per esempio il metodo di Bode porta a compensatori statici, di ordine 1, se si deve utilizzare una rete anticipatrice o ritardatrice, di ordine 2, se si deve utilizzare una rete a sella (ritardatrice ed anticipatrice).

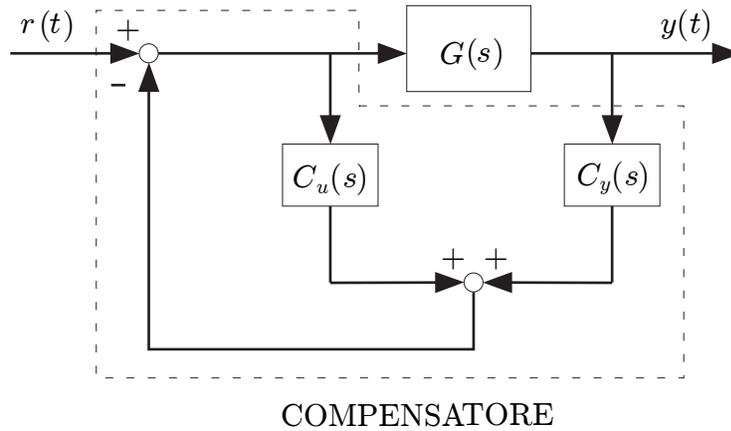


Figure 2.6:

possono essere scelti sempre stabili a differenza di quanto accade per il compensatore ad un parametro.

Sia $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ con $b(s)$, $a(s)$ coprimi, $a(s)$, $\deg a(s) = n$, $\deg b(s) \leq n$. Fissiamo arbitrariamente un polinomio $\Delta(s)$ di grado $n - 1$ che vogliamo sia il denominatore di $C_u(s)$ e $C_y(s)$

$$C_u(s) = \frac{n_u(s)}{\Delta(s)} \quad C_y(s) = \frac{n_y(s)}{\Delta(s)}.$$

La funzione di trasferimento in catena chiusa è

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + C_u(s) + C_y(s)G(s)} = \frac{\Delta(s)b(s)}{\Delta(s)a(s) + n_u(s)a(s) + n_y(s)b(s)}.$$

Supponiamo di fissare arbitrariamente un polinomio $d(s)$ di grado n che vogliamo sia il denominatore di $T(s)$. Per ottenere $C_u(s)$ e $C_y(s)$ dovremo perciò calcolare i polinomi incogniti $n_u(s)$, $n_y(s)$ che risolvono l'equazione diofantea

$$n_u(s)a(s) + n_y(s)b(s) + \Delta(s)a(s) = \Delta(s)d(s)$$

che è equivalente alla

$$n_u(s)a(s) + n_y(s)b(s) = \Delta(s)(d(s) - a(s)), \quad (2.3)$$

dove ricordiamo che tutti i polinomi sono dati a parte $n_u(s)$ ed $n_y(s)$. Come visto in precedenza, poiché $a(s)$ e $b(s)$ sono coprimi, allora l'equazione diofantea (2.3) ammette sempre soluzione e, una volta trovata tale soluzione, si ottiene

$$T(s) = \frac{b(s)}{d(s)}.$$

Si noti che, esattamente come visto nel caso del compensatore ad un parametro, si può trovare una soluzione della (2.3) tale che

$$\deg n_y(s) \leq \deg a(s) - 1 = n - 1$$

Inoltre, poiché $\deg \Delta(s)(d(s) - a(s)) \leq 2n - 1$ e $\deg n_y(s)b(s) \leq 2n - 1$, allora

$$\deg n_u(s)a(s) \leq 2n - 1$$

e quindi possiamo concludere che

$$\deg n_u(s) \leq n - 1.$$

Ciò permette di dire che $C_u(s) = \frac{n_u(s)}{\Delta(s)}$ e $C_y(s) = \frac{n_y(s)}{\Delta(s)}$ sono entrambe funzioni di trasferimento proprie.

Si noti inoltre che se $G(s)$ è strettamente propria, allora $\deg b(s) \leq n - 1$ e quindi $\deg n_y(s)b(s) \leq 2n - 2$. Da ciò segue che $\deg n_u(s)a(s) \leq 2n - 2$ e quindi che

$$\deg n_u(s) \leq n - 2.$$

In questo caso perciò $C_y(s)$ è propria mentre $C_u(s)$ è strettamente propria. Si noti inoltre che in questo metodo di sintesi possiamo ottenere che l'errore nella risposta a gradino sia nullo imponendo che $T(0) = 1$ e questo si può ottenere scegliendo un polinomio $d(s)$ tale che $d(0) = b(0)$.

Infine, per quanto riguarda la soluzione concreta dell'equazione diofantea, si usa il metodo basato sul sistema lineare visto in precedenza. Esprimiamo $n_u(s)$ e $n_y(s)$ in funzione dei loro coefficienti

$$\begin{aligned} n_y(s) &= x_{n-1}s^{n-1} + \dots + x_1s + x_0 \\ n_u(s) &= y_{n-1}s^{n-1} + \dots + y_1s + y_0 \end{aligned}$$

(x_i e y_i incognite) e lo stesso per i polinomi noti $a(s)$, $b(s)$ e $\Delta(s)(d(s) - a(s))$

$$\begin{aligned} a(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \\ b(s) &= b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0 \\ \Delta(s)(d(s) - a(s)) &= c_{2n-1} s^{2n-1} + c_{2n-2} s^{2n-2} + \dots + c_1 s + c_0 \end{aligned}$$

Allora vale la relazione matriciale

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} b_0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_0 & & 0 & a_1 & a_0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ \hline b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ 0 & b_n & & b_2 & 0 & a_n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & 0 & \cdots & \cdots & a_n \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{2n-2} \\ c_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Esempio 2.8 Si osservi che

$$G(s) = \frac{s}{(s-3)(s+1)}$$

non soddisfa alla parity interlacing property. Perciò essa non può essere stabilizzata per mezzo di un compensatore ad un parametro stabile. Questo esempio è simile a quello precedente. Calcoliamo il compensatore ad un parametro che fornisce lo stesso denominatore dell'esempio precedente.

$$p(s) = (s+1)(s+2)(s+10) = s^3 + 13s^2 + 32s + 20$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 32 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} y_1 = 1 \quad y_0 = -20/3 \\ x_0 = 2y_0 + 3y_1 + 32 = -\frac{40}{3} + 3 + 32 = \frac{65}{3} \\ x_1 = -y_0 + 2y_1 + 13 = \frac{20}{3} + 2 + 13 = \frac{65}{3} \end{array}$$

$$C(s) = 65 \frac{s+1}{3s-20}$$

che è instabile.

Consideriamo ora invece la sintesi di un compensatore a due parametri per $G(s)$. Fissiamo $\Delta(s) = s+1$ di grado $n-1 = 1$ e fissiamo $d(s) = (s+2)(s+1) = s^2 + 3s + 2$ di grado $n = 2$. Allora l'equazione diofantea da risolvere è

$$n_u(s)a(s) + n_y(s)b(s) = \Delta(s)(d(s) - a(s)) = 5(s^2 + 2s + 1).$$

Poniamo

$$\begin{aligned} n_u(s) &= y(s) = y_1s + y_0 \\ n_y(s) &= x(s) = x_1s + x_0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} y_1 = 0 \quad y_0 = -5/3 \\ x_0 = 2y_0 + 3y_1 + 10 = 20/3 \\ x_1 = -y_0 + 2y_1 + 5 = 20/3 \end{array}$$

$$n_u(s) = -5/3 \quad n_y(s) = \frac{20}{3}(s+1)$$

$$C_u = -\frac{5}{3} \frac{1}{s+1} \quad C_y(s) = \frac{20}{3} \frac{s+1}{s+1} = \frac{20}{3} \text{ di grado zero.}$$

Esempio 2.9 Sia

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2(s-1)} = \frac{b(s)}{a(s)}.$$

Vogliamo ottenere a catena chiusa

$$T(s) = \frac{s+2}{(s^2+2s+10)(s+10)} = \frac{b(s)}{d(s)}$$

attraverso un compensatore a due parametri con $C_u(s)$ e $C_y(s)$ avente denominatore $\Delta(s) = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$n_u(s)a(s) + n_y(s)b(s) = \Delta(s)(d(s) - a(s)) = 13s^4 + 56s^3 + 173s^2 + 230s + 100.$$

Tenendo conto che $n_u(s)$ ed $n_y(s)$ hanno grado minore o uguale ad $n - 1 = 2$ e indicando con $n_u(s) = y_2s^2 + y_1s + y_0$ e $n_y(s) = x_2s^2 + x_1s + x_0$, si dovrà risolvere

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 173 \\ 56 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} y_2 = 0 \\ x_0 = 50 \\ x_1 = (230 - x_0)/2 = 180/2 = 90 \\ y_1 = y_2 + 13 = 13 \end{array}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - y_0 = -x_1 + 173 = 83 \\ x_2 + y_0 = 56 + y_1 = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 152 \\ 3y_0 = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 152/3 \\ y_0 = 55/3 \end{cases}$$

$$C_u(s) = \frac{13s + 55/3}{(s + 1)^2} \quad C_y(s) = \frac{152/3s^2 + 90s + 50}{(s + 1)^2}.$$