

# Contents

<b>1</b>	<b>Modellizzazione di sistemi fisici</b>	<b>3</b>
1.1	Modellizzazione di circuiti elettrici passivi . . . . .	3
1.2	Modellizzazione di circuiti elettrici attivi . . . . .	13
1.2.1	Circuiti elettrici con amplificatori operazionali . . . . .	13
1.2.2	Circuiti elettrici con transistor . . . . .	15
1.3	Modellizzazione di sistemi meccanici . . . . .	19
1.3.1	Sistemi in moto traslatorio . . . . .	19
1.3.2	Sistemi in moto puramente rotatorio . . . . .	23
1.4	Modellizzazione di sistemi elettromeccanici . . . . .	29



# Chapter 1

## Modellizzazione di sistemi fisici

In questo capitolo mostreremo come sia possibile ottenere modelli matematici a partire dalle leggi della fisica. Prenderemo spunto da esempi di circuiti elettrici passivi e attivi, da esempi di sistemi meccanici e di sistemi elettromeccanici.

### 1.1 Modellizzazione di circuiti elettrici passivi

Un circuito elettrico consiste nell'interconnessione di componenti elementari passivi, cioè resistenze, condensatori e induttanze (vedi figura 1.2). Se i componenti elementari sono passivi, allora il loro comportamento è descritto da dalla relazione tra la corrente che li attraversa e la tensione ai loro capi. In particolare una resistenza ideale mette in relazione la tensione  $v(t)$  con la corrente  $i(t)$  attraverso la formula

$$v(t) = Ri(t)$$

dove  $R$  è una costante positiva. In un condensatore ideale invece la tensione  $v_C(t)$  con la corrente  $i_C(t)$  sono collegati dalla relazione

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$$

dove  $C$  è una costante positiva. Infine in una induttanza ideale la tensione  $v_L(t)$  con la corrente  $i_L(t)$  sono collegati dalla relazione

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$$

dove  $L$  è una costante positiva (vedi figura 1.1).

Se da un circuito estraiamo due fili, l'apparato che ne risulta viene detto dipolo elettrico. Se sui due fili fluisce una corrente  $i(t)$  (che sarà la medesima sui due fili) e ai capi di questi fili vi è una tensione  $v(t)$ , allora la rete vincolerà gli andamenti temporali  $v(t)$  e  $i(t)$  nel senso che non tutte le evoluzioni  $v(t)$  e  $i(t)$  saranno possibili. A seconda dei casi, possiamo considerare  $v(t)$  come ingresso e  $i(t)$  come

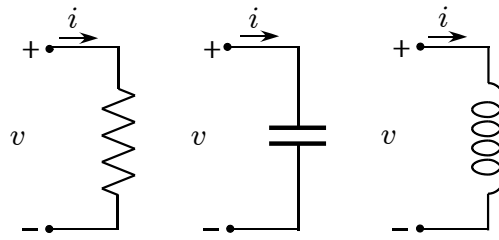


Figure 1.1:

uscita o viceversa. Se i componenti elementari che appaiono nella rete sono ideali e scegliamo la corrente come ingresso e la tensione come uscita, allora la corrispondente funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita  $Z(s)$  è detta impedenza del dipolo. Se, viceversa, scegliamo la tensione come ingresso e la corrente come uscita, allora la funzione di trasferimento  $A(s)$  è detta ammettenza del dipolo. Ovviamente l'impedenza e l'ammettenza sono una l'inverso dell'altra, ovvero

$$Z(s) = \frac{1}{A(s)}$$

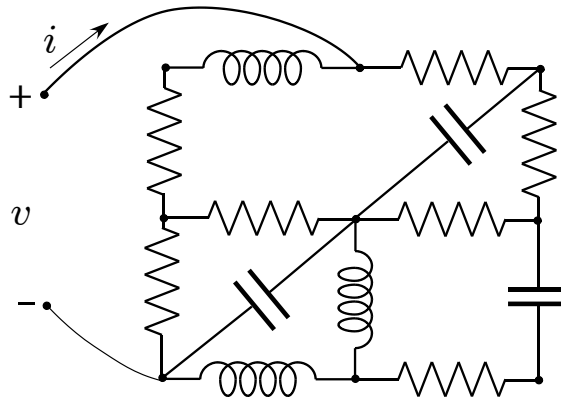


Figure 1.2:

**Esempio 1.1** Consideriamo ad esempio il dipolo descritto dalla rete elettrica in figura 1.3. Vogliamo trovare la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $i(t)$  e l'uscita  $v(t)$ .

A tal fine è utile introdurre delle variabili ausiliarie. Si noti che alla fine il numero di equazioni che devo trovare sarà pari al numero di variabili meno uno. Introduciamo le variabili ausiliarie  $v_{R_1}, i_{R_1}, v_{R_2}, i_{R_2}, v_C, i_C$  che insieme alle variabili  $v, i$  fanno 8 variabili totali. Dobbiamo determinare 7 equazioni che le legano. Si noti che  $v = v_{R_2}$ ,

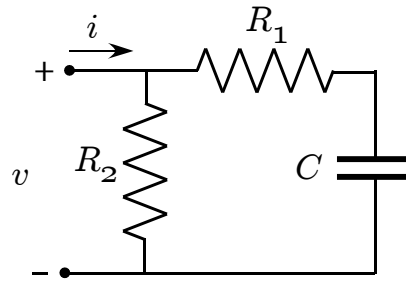


Figure 1.3:

$v = v_{R_1} + v_C$ ,  $i_{R_1} = i_C$  e  $i = i_{R_1} + i_{R_2}$  che insieme alle equazioni che descrivono il comportamento dei componenti elementari

$$\begin{cases} i_C = C v_C^{(1)} \\ v_{R_1} = R_1 i_{R_1} \\ v_{R_2} = R_2 i_{R_2} \end{cases}$$

ci danno le 7 equazioni richieste. Eliminando le variabili  $v_{R_1}$ ,  $i_{R_1}$ ,  $v_{R_2}$ ,  $i_C$  otteniamo le 3 equazioni

$$\begin{cases} v = R_1 C v_C^{(1)} + v_C \\ i = C v_C^{(1)} + i_{R_2} \\ v = R_2 i_{R_2} \end{cases}$$

nelle 4 incognite  $v$ ,  $i$ ,  $i_{R_2}$ ,  $v_C$ . Utilizzando le trasformate di Laplace, si osservi che

$$\begin{cases} V = s R_1 C V_C + V_C \\ I = s C V_C + I_{R_2} \\ V = R_2 I_{R_2} \end{cases}$$

Si osservi che non abbiamo messo nella formula della Laplace trasformata della derivata il termine dipendente dalla condizione iniziale. Questo perché, dovendo calcolare la funzione di trasferimento, possiamo supporre che tutte le condizioni iniziali siano nulle. Dalla prima equazione si ottiene

$$V_C = \frac{1}{1 + s R_1 C} V$$

e quindi

$$I = s C V_C + \frac{1}{R_2} V = \frac{s C}{1 + s R_1 C} V + \frac{1}{R_2} V = \frac{1 + s C R_1 + s C R_2}{R_2 (1 + s R_1 C)} V$$

e quindi si ottiene la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $i(t)$  e l'uscita  $v(t)$  e'

$$W(s) = \frac{R_2 (1 + s R_1 C)}{1 + s C R_1 + s C R_2}$$

Supponiamo ora che la seconda resistenza sia non ideale in quanto la relazione tra la sua corrente e la sua tensione sia data dalla relazione non lineare

$$v_{R_2} = f(i_{R_2})^3$$

dove  $f(\cdot)$  e' una qualsiasi funzione da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . Le equazioni che legano le variabili  $v, i, i_{R_2}, v_C$  diventano

$$\begin{cases} v &= R_1 C v_C^{(1)} + v_C \\ i &= C v_C^{(1)} + i_{R_2} \\ v &= f(i_{R_2}) \end{cases} \quad (1.1)$$

In questo caso la relazione tra  $i(t)$  e  $v(t)$  non e' descrivibile in termini di funzioni di trasferimento. Possiamo pero' trovare una approssimazione che ci permette di arrivare a una funzione di trasferimento. Dobbiamo prima determinare le evoluzioni di equilibrio, cioe' le soluzioni costanti delle equazioni (1.1). Se assumiamo che  $v(t) = \bar{v}, i(t) = \bar{i}, i_{R_2}(t) = \bar{i}_{R_2}, v_C(t) = \bar{v}_C$ , allora, sostituendo tali segnali in (1.1), si ottiene un sistema di equazioni algebriche

$$\begin{cases} \bar{v} &= \bar{v}_C \\ \bar{i} &= \bar{i}_{R_2} \\ \bar{v} &= f(\bar{i}_{R_2}) \end{cases}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che, siccome  $v_C(t)$  e' costante, allora la sua derivata e' nulla. Si ottiene quindi che  $\bar{v} = f(\bar{i})$  che da' la relazione tra i valori di equilibrio in ingresso e in uscita. Ora introduciamo le nuove variabili  $\tilde{v}(t) := v(t) - \bar{v}, \tilde{i}(t) := i(t) - \bar{i}, \tilde{i}_{R_2}(t) := i_{R_2}(t) - \bar{i}_{R_2}, \tilde{v}_C(t) := v_C(t) - \bar{v}_C$ . Queste variabili rappresentano le variazioni dei segnali rispetto ai loro valori di equilibrio. Se supponiamo che tali variazioni siano "piccole", allora la terza equazione di (1.1) si puo' approssimare usando l'espansione di Taylor<sup>1</sup> attorno al valore  $\bar{i}_{R_2}$

$$v = f(i_{R_2}) \simeq f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})(i_{R_2} - \bar{i}_{R_2}) = f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2}$$

Così le equazioni (1.1) diventano

$$\begin{cases} \bar{v} + \tilde{v} &= R_1 C (\bar{v}_C + \tilde{v}_C)^{(1)} + \bar{v}_C + \tilde{v}_C \\ \bar{i} + \tilde{i} &= C (\bar{v}_C + \tilde{v}_C)^{(1)} + \bar{i}_{R_2} + \tilde{i}_{R_2} \\ \bar{v} + \tilde{v} &= f(\bar{i}_{R_2}) + f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2} \end{cases}$$

Le condizioni sui valori di equilibrio permettono di semplificare le costanti e ottenere

$$\begin{cases} \tilde{v} &= R_1 C \tilde{v}_C^{(1)} + \tilde{v}_C \\ \tilde{i} &= C \tilde{v}_C^{(1)} + \tilde{i}_{R_2} \\ \tilde{v} &= f'(\bar{i}_{R_2})\tilde{i}_{R_2} = f'(\bar{i})\tilde{i}_{R_2} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Se  $f(x)$  e una funzione qualsiasi, allora la sua espansione di Taylor del primo ordine intorno al valore  $x = \bar{x}$  e' data da  $f(x) \simeq f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\tilde{x}$ , dove  $\tilde{x} := x - \bar{x}$  (vedi figura 1.4).

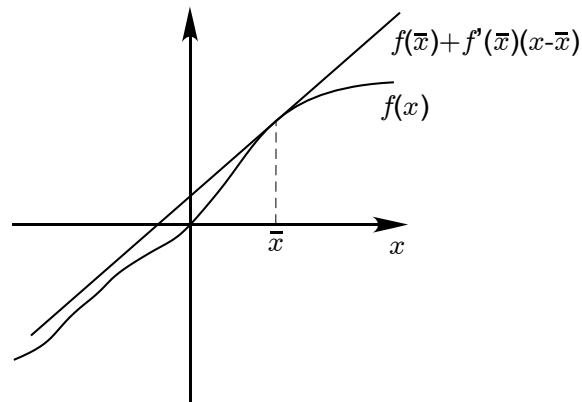


Figure 1.4:

A questo punto si puo' passare alle trasformate di Laplace e ottenere

$$\begin{cases} \tilde{V} &= sR_1C\tilde{V}_C + \tilde{V}_C \\ \tilde{I} &= sC\tilde{V}_C + \tilde{I}_{R_2} \\ \tilde{V} &= f'(\bar{i})\tilde{I}_{R_2} \end{cases}$$

Con passaggi simili a quelli fatti sopra si ottiene che la funzione di trasferimento tra l'ingresso  $\tilde{i}(t)$  e l'uscita  $\tilde{v}(t)$  e'

$$\frac{\tilde{V}(s)}{\tilde{I}(s)} = \frac{f'(\bar{i})(1 + sR_1C)}{1 + sCR_1 + sCf'(\bar{i})}$$

cioe' la stessa di prima solo che al posto di  $R_2$  abbiamo ora  $f'(\bar{i})$ . Osserviamo che la funzione di trasferimento dipende dal valore costante della corrente di ingresso.

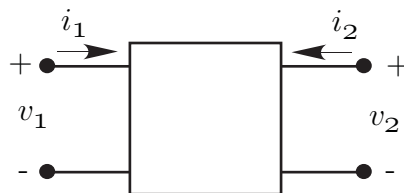


Figure 1.5: Doppio dipolo

Consideriamo ora un doppio dipolo, illustrato in figura 1.5. Le variabili che caratterizzano questo sistema sono le due tensioni  $v_1, v_2$  e le due correnti  $i_1, i_2$  sulle due porte. Il doppio dipolo impone due equazioni che legano queste quattro variabili. Ne risulta che, per poter determinare le quattro grandezze ho bisogno di fissare dall'esterno due di queste, che quindi sono nel nostro contesto individuabili come ingressi. Supponiamo ad esempio di fissare  $v_1$  e  $i_2$ . Supponiamo di voler determinare il comportamento forzato del sistema. Siccome il sistema complessivo risulta lineare,

per determinare ad esempio l'uscita  $v_2$  possiamo applicare la sovrapposizione degli effetti. Quindi nel dominio delle trasformate di Laplace risulta

$$V_2(s) = W(s)V_1(s) + Z(s)I_2(s)$$

La funzione di trasferimento  $W(s)$  descrive la relazione tra  $v_1$  e  $v_2$  ipotizzando  $i_2 = 0$ , cioè nell'ipotesi di impedenza infinita alla seconda porta. La funzione di trasferimento  $Z(s)$  (che è una impedenza) descrive la relazione tra  $i_2$  e  $v_2$  ipotizzando  $v_1 = 0$ , cioè ipotizzando di cortocircuitare la prima porta. Il sistema risultante è illustrato nello schema a blocchi nella figura 1.6.

Infine, se colleghiamo la seconda porta a un dipolo, questo mette in relazione  $v_2$  e  $i_2$  attraverso una funzione di trasferimento

$$I_2(s) = -A(s)V_2(s)$$

dove  $A(s)$  è l'ammettenza del dipolo. Il sistema risultante può essere descritto dallo schema nella figura 1.6 e la relazione finale tra  $v_1$  e  $v_2$  risulta essere

$$V_2(s) = \frac{W(s)}{1 + A(s)Z(s)}V_1(s)$$

Si noti che l'ipotesi di trascurare effetti di carico è plausibile se l'impedenza  $1/A(s)$  è elevata, nel qual caso la relazione tra  $v_1$  e  $v_2$  si riduce a

$$V_2(s) = W(s)V_1(s)$$

Quando si ipotizza che  $1/A(s)$  sia elevata, si dice che si trascurano i cosiddetti "effetti di carico".

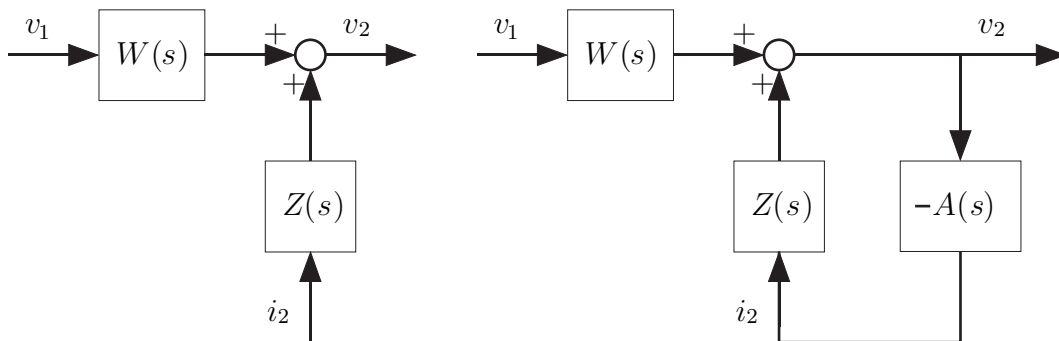


Figure 1.6: Schema a blocchi che descrive la relazione tra tensioni e correnti nel doppio dipolo sconnesso o connesso a un dipolo

**Esempio 1.2** Si consideri ad esempio il partitore di tensione mostrato in figura 1.7, che può essere visto come un blocco con ingresso  $v_1$  e uscita  $v_2$  in cui la relazione



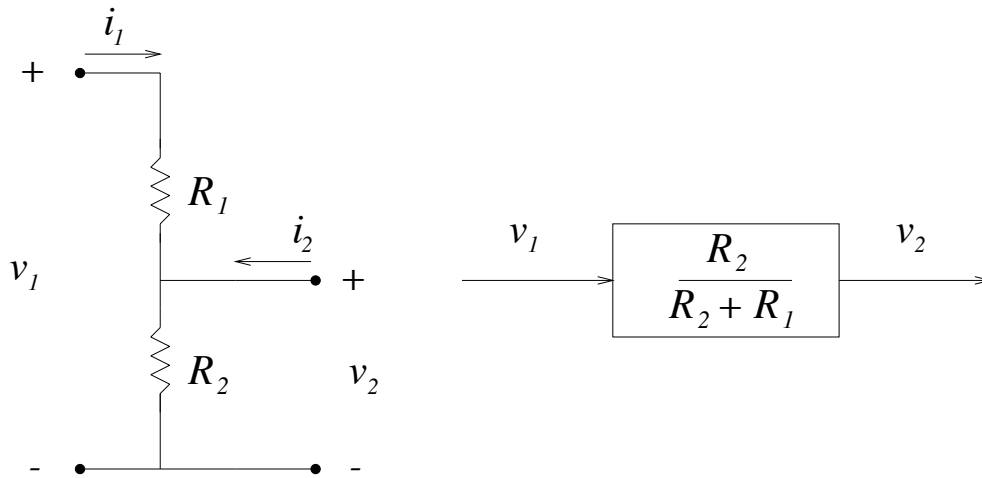


Figure 1.7:

tra ingresso e uscita è data dalla moltiplicazione per una costante minore o uguale a 1

$$v_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_1(t). \quad (1.2)$$

Questa relazione è valida solo se l'impedenza di ingresso del sistema che colleghiamo alla seconda porta è alta in modo che sia trascurabile la corrente  $i_2$  che esce dalla seconda porta. Se ciò non avviene, dobbiamo considerare la rete precedente più propriamente come un sistema con due ingressi  $v_1, i_2$  e un'uscita  $v_2$  descritto dall'equazione

$$v_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_2$$

Qualora collegassimo la seconda porta ad un'altra resistenza  $R$ , avremmo che  $v_2$  e  $i_2$  sarebbero messi in relazione  $v_2 = R i_2$  e quindi ne risulta la seguente relazione tra  $v_1$  e  $v_2$

$$v_2 = \frac{R R_2}{R R_1 + R R_2 + R_1 R_2} v_1$$

che coincide con la relazione ricavabile dalla formula (1.1) Se  $R$  è molto elevata, la relazione tra  $v_1$  e  $v_2$  coincide con quella data in (1.2).

### Esempio 1.3 Modelli tempo-varianti: un circuito elettrico con interruttori

Una classe di modelli che non rientrano tra quelli presentati finora è quella dei così detti **modelli tempo-varianti** in contrapposizione ai modelli presentati che sono invece detti **modelli a tempo-invarianti**. Questi modelli sono descritti da equazioni differenziali nelle quali i parametri variano nel tempo. In generale non è possibile descrivere la relazione tra l'ingresso e l'uscita di un sistema tempo-variante attraverso funzioni di trasferimento.

Mostriamo ora un esempio di modello a tempo-variante. Si tratta del modello che descrive il circuito dotato di interruttori mostrato in figura 1.8. Questo circuito può

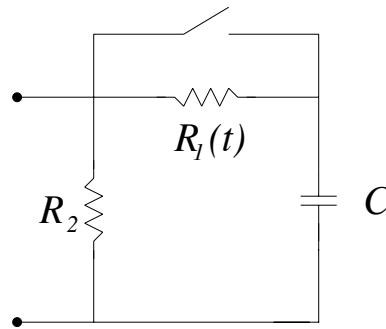


Figure 1.8:

essere visto come un circuito avente una resistenza di valore tempo-variante,  $R_1(t)$  che può assumere solo i due valori  $R$  e  $0$ . L'equazione differenziale diventa

$$R_1 i + R_1(t) R_2 C \frac{di}{dt} = v + (R_1(t) + R_2) C \frac{dv}{dt}$$

#### Esempio 1.4 Modelli a parametri distribuiti: l'equazione dei telegrafisti

Un'altra classe di modelli che non rientrano tra quelli presentati finora è quella dei così detti **modelli a parametri distribuiti** in contrapposizione ai modelli presentati che sono invece detti **modelli a parametri concentrati**. I modelli a parametri distribuiti sono descritti da equazioni alle derivate parziali. Mostriamo ora un esempio di modello a parametri distribuiti. Si tratta del modello che descrive la propagazione dei segnali di tensione e corrente lungo una linea elettrica.

Siano  $v(x, t)$  e  $i(x, t)$  rispettivamente le tensioni e correnti nella posizione  $x$  e all'istante  $t$  lungo la linea di trasmissione a due conduttori mostrata in figura 1.9. Supponendo

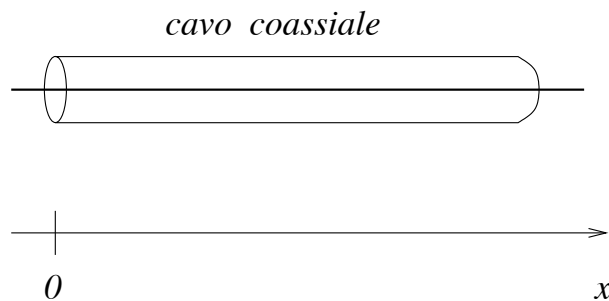


Figure 1.9:

trascurabili gli effetti resistivi, possiamo pensare alla linea come a una successione infinita dei circuiti infinitesimi mostrati in figura 1.10. Otteniamo così

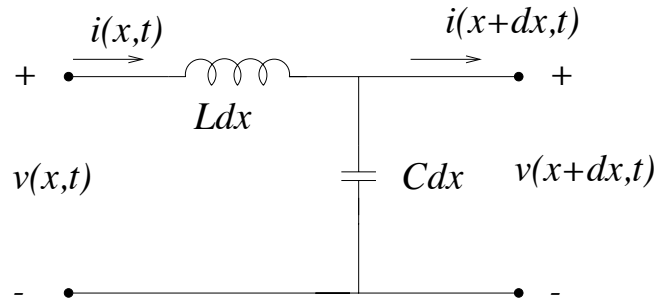


Figure 1.10:

$$\begin{aligned}
 v(x+dx, t) &= v(x, t) - Ldx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\
 i(x+dx, t) &= i(x, t) - Cdx \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + LC(dx)^2 \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

in cui l'ultimo addendo della seconda equazione può essere considerato trascurabile. Si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Per semplicità analizziamo l'equazione per  $C = L = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Attraverso una sostituzione è facile verificare che la soluzione generale di questo sistema di equazioni è data da

$$\begin{cases} v(x, t) = f_1(x-t) + f_2(x+t) \\ i(x, t) = f_1(x-t) - f_2(x+t), \end{cases}$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  sono due funzioni arbitrarie. Si noti che

$$\begin{cases} v(x, t) + i(x, t) = 2f_1(x-t) = 2\sigma^{-x} f_1 \\ v(x, t) - i(x, t) = 2f_2(x+t) = 2\sigma^x f_2. \end{cases}$$

Supponiamo che la linea inizi in  $x = 0$  e finisca in  $x = L$ . La linea può essere modellata un doppio dipolo con tensioni e correnti sulle porte ingressi denotati con i simboli  $v_0, i_0$  e  $v_L, i_L$  (vedi figura 1.11). Viste le convenzioni utilizzate si ha che

$$\begin{aligned}
 i_0(t) &= i(0, t) & v_0(t) &= v(0, t) \\
 i_L(t) &= -i(L, t) & v_L(t) &= v(L, t)
 \end{aligned}$$

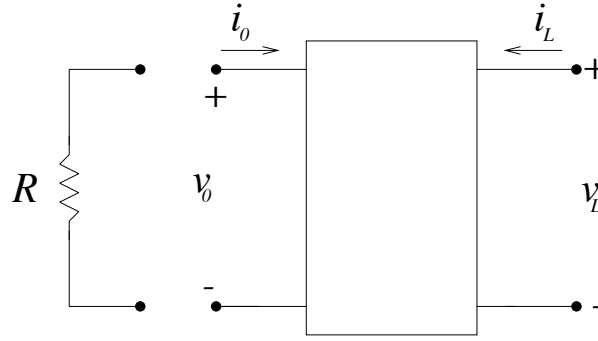


Figure 1.11:

Si ottiene così

$$\begin{cases} v_L - i_L = \sigma^{-L}(v_0 + i_0) \\ v_L + i_L = \sigma^L(v_0 - i_0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_L = \frac{\sigma^{-L} + \sigma^L}{2}v_0 + \frac{\sigma^{-L} - \sigma^L}{2}i_0 \\ i_L = \frac{-\sigma^{-L} + \sigma^L}{2}v_0 + \frac{-\sigma^{-L} - \sigma^L}{2}i_0 \end{cases}$$

Questa relazione imposta da questo doppio dipolo può essere interpretata come un sistema con ingressi  $v_0, i_0$  e uscite  $v_L, i_L$ . Se colleghiamo il doppio dipolo ad una resistenza  $R$ , otteniamo all'altro capo una certa induttanza, cioè una relazione tra  $v_L$  e  $i_L$ . Questa può essere ottenuta nel modo seguente:

$$v_0 = -Ri_0$$

$$\begin{cases} v_L = \frac{i_0}{2}\{(1-R)\sigma^{-L} - (1+R)\sigma^L\} \\ i_L = \frac{i_0}{2}\{-(1-R)\sigma^{-L} - (1+R)\sigma^L\}. \end{cases}$$

Eliminando  $i_0$ , si ottiene la seguente relazione tra  $v_L$  e  $i_L$

$$\{(1-R)\sigma^{-L} + (1+R)\sigma^L\}v_L = \{-(1-R)\sigma^{-L} + (1+R)\sigma^L\}i_L.$$

Poniamo  $i_L = u$  come ingresso e  $v_L = y$  come uscita. Allora si ha

$$y(t) + ay(t - 2L) = u(t) - au(t - 2L),$$

dove  $a = \frac{1-R}{1+R} < 1$ . A questa relazione corrisponde la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1 - ae^{-2Ls}}{1 + ae^{-2Ls}}$$

mentre la risposta impulsiva  $w(t)$  che è la antitrasformata di  $W(s)$ , è

$$w(t) = \delta(t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \delta(t - 2kL),$$

Intuitivamente l'impulso viene ripetuto infinite volte attenuato di  $a$  e ritardato di  $2L$  ad ogni passo.

## 1.2 Modellizzazione di circuiti elettrici attivi

I circuiti attivi sono dati dall'interconnessione di componenti passivi, cioè resistenze, condensatori e induttanze, con transistor o con amplificatori operazionali.

### 1.2.1 Circuiti elettrici con amplificatori operazionali

L'amplificatore operazionale è un circuito attivo (vedi figura 1.12) che amplifica per una costante  $A$  (molto elevata  $> 0$ ) la differenza delle tensioni ai due morsetti di ingresso

$$v_0 = A(v_+ - v_-).$$

Osserva che  $A$  invece che una costante potrebbe essere una funzione di trasferimento

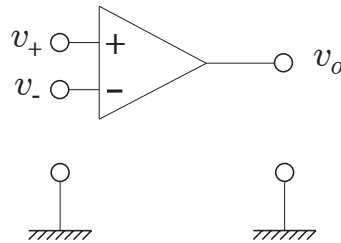


Figure 1.12:

$A(s)$  e i ragionamenti che seguono resterebbero gli stessi. Un'altra generalizzazione consiste nell'avere  $v_0 = f(v_+ - v_-)$  dove  $f(\cdot)$  è una funzione non lineare, come, ad esempio, una funzione lineare con saturazione.

Si assume idealmente che tale amplificatore abbia impedenza di ingresso infinita, cioè che attraverso i rami uscenti dai morsetti  $+$  e  $-$  passino correnti nulle.

L'amplificatore operazionale può essere utilizzato in molti schemi. Consideriamo ad esempio lo schema illustrato in figura 1.13, nel quale l'amplificatore operazionale è collegato a due dipoli con impedenze  $Z_1(s)$  e  $Z_2(s)$ . Allora, ragionando nel dominio delle trasformate di Laplace, sapendo che  $V_{Z_1} = Z_1 I_{Z_1}$  e  $V_{Z_2} = Z_2 I_{Z_2}$  e che  $I_{Z_1} = I_{Z_2} = I$ , si deduce che  $V_o - V_i = (Z_1 + Z_2)I$  e quindi

$$I = \frac{V_o - V_i}{Z_1 + Z_2}$$

Da ciò desumiamo che

$$\begin{aligned} V_- &= V_i + Z_1 I = V_i + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (V_o - V_i) \\ V_+ &= 0 \end{aligned}$$

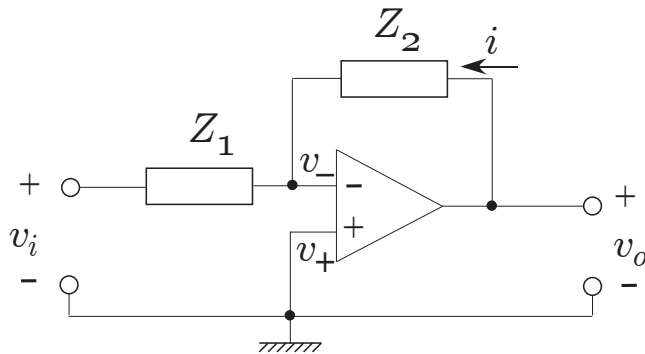


Figure 1.13:

e quindi

$$V_o = -A \left\{ V_i - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} (V_i - V_o) \right\} = \frac{-AZ_2}{Z_1 + Z_2 + AZ_1} V_i$$

Per  $A \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Quindi la funzione di trasferimento diventa in questo caso  $Z_2/Z_1$  che coincide con la funzione di trasferimento che si sarebbe ottenuta supponendo che, per effetto di una amplificazione infinita, si abbia  $V_+ = V_-$ . Questo corrisponde in effetti a un modello semplificato dell'amplificatore operazionale.

**Osservazione 1.5** Si vede che la relazione tra la tensione di ingresso e la tensione di uscita risulta indipendente dal valore di  $A$  a patto che tale valore risulti elevato. Questo è un esempio di un effetto generale della retroazione, cioè la diminuzione della sensibilità alla variazione dei parametri del sistema. Questo è stato uno dei motivi che storicamente hanno portato all'uso della retroazione in generale e del circuito visto prima in particolare. Si dovevano infatti utilizzare dei tubi amplificatori in grado di amplificare notevolmente i segnali, ma le cui prestazioni variavano notevolmente nel tempo. La retroazione era utilizzata per rendere più uniformi le caratteristiche di amplificazione.

**Osservazione 1.6** Nei calcoli fatti precedentemente non cambia nulla se vengono invertiti i due morsetti  $+$  e  $-$  o equivalentemente si può vedere che l'approssimazione vista sopra vale anche se  $A \rightarrow -\infty$ . In realtà, come vedremo più avanti, la situazione nei due casi è molto diversa. Infatti se si cambiano i morsetti  $+$  e  $-$  si avrà un comportamento *instabile* del circuito.

**Esempio 1.7** Si consideri la rete elettrica illustrata in figura 1.14, dove l'amplificatore, che si suppone ideale e cioè con impedenza di ingresso infinita (circuito aperto in ingresso), amplifica per una costante  $A > 0$  la differenza delle tensioni di ingresso  $v_+$  e  $v_-$ . Questo schema rappresenta una caso particolare di quello visto prima in

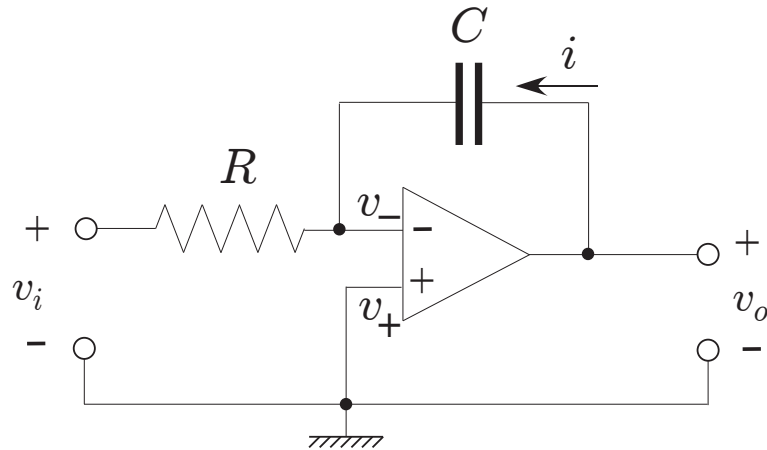


Figure 1.14:

cui  $Z_1 = R$  e  $Z_2 = 1/sC$ . Sostituendo nella formula generale con cui si otteneva da  $Z_1$  e  $Z_2$  la funzione di trasferimento da  $v_i$  a  $v_o$  si trova

$$W(s) = \frac{-A/sC}{R + 1/sC + AR} = \frac{-A}{RC(A+1)s + 1}$$

Si noti che

$$W(s) \xrightarrow{A \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{RCs}$$

Nota che la risposta impulsiva e'

$$w(t) = -\frac{A}{RC(A+1)} e^{-\frac{1}{RC(A+1)}t}$$

che ha un comportamento diverso se  $A$  e' grande positivo o se  $A$  e' grande e negativo. Infatti, se  $A$  e' grande positivo, allora  $w(t)$  e' un esponenziale convergente, mentre se  $A$  e' grande negativo, allora  $w(t)$  e' divergente e quindi, come vedremo, il sistema e' instabile.

## 1.2.2 Circuiti elettrici con transistor

Un transistor può essere descritto come un apparato elettrico con tre fili in uscita detti Gate, Drain e Source, come mostrato nella figura 1.15. Il modello del transistor, illustrato nella figura 1.15, è dato da una rete passiva con un generatore di corrente la cui corrente segue una legge del tipo

$$i = F(v_{GS}, v_{DS})$$

dove  $v_{GS}$  è la tensione tra Gate e Source, mentre  $v_{DS}$  è la tensione tra Gate e Source<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Più precisamente  $v_{GS}$  è la tensione ai capi del condensatore che sta tra Gate e Source.

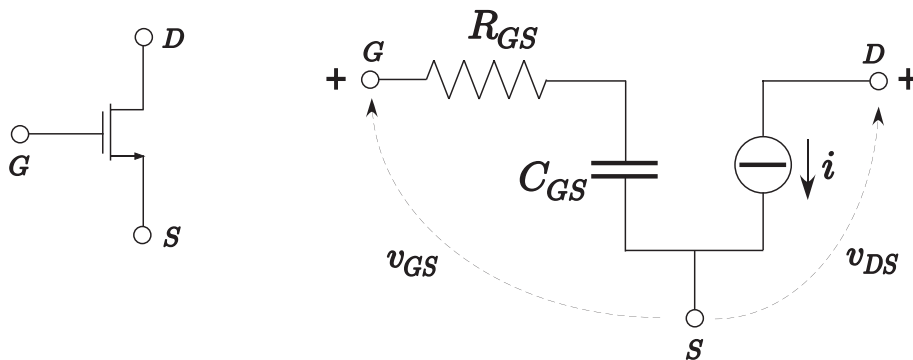


Figure 1.15:

Il transistor può essere utilizzato in molti schemi. Consideriamo ad esempio lo schema illustrato in figura 1.16, nel quale il transistor è collegato a un dipolo con impedenza  $Z(s)$ . Il modello è illustrato in figura 1.17. La tensione  $V_{cc}$  è la tensione di alimentazione ed è ipotizzata costante.

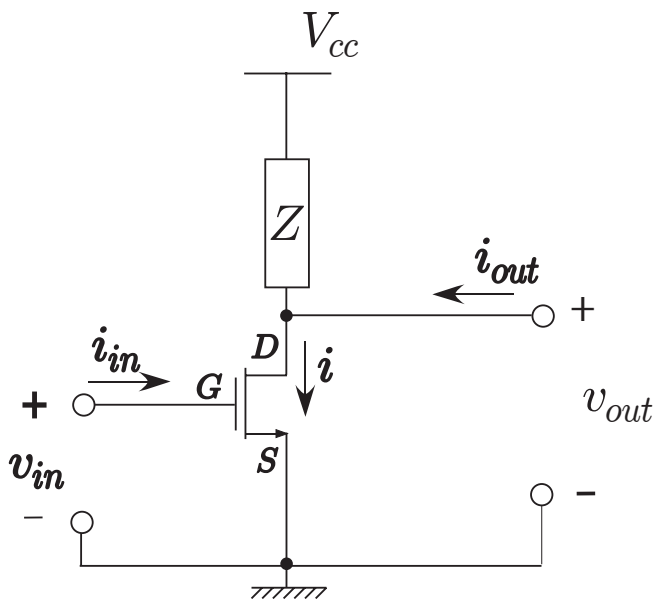


Figure 1.16:

Scegliamo  $u = v_{in}$  come ingresso,  $y = v_{out}$  come uscita e  $d = i_{out}$  come disturbo. Supponiamo che la relazione tra la tensione  $v_Z$  e la corrente  $i_z$  sul dipolo passivo sia descritta dal modello di stato

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bi_Z(t) \\ v_Z(t) &= Cx(t) + d_0 i_Z(t) + d_1 \frac{di_Z(t)}{dt} \end{aligned}$$



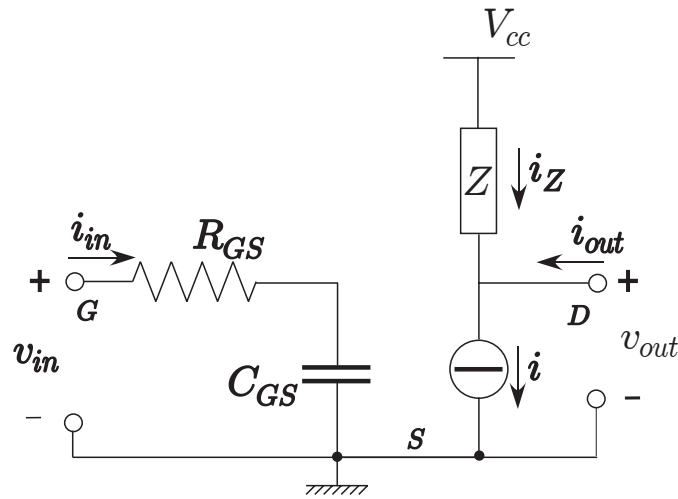


Figure 1.17:

Si noti inoltre che

$$\begin{aligned} i_Z + d &= i = F(u, y) \\ v_Z + y &= V_{cc} \end{aligned}$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bi_Z(t) \\ y(t) &= V_{cc} - Cx(t) - d_0 i_Z(t) - d_1 \frac{di_Z(t)}{dt} \\ i_Z(t) + d(t) &= F(u(t), y(t)) \end{aligned}$$

Possiamo interpretare queste equazioni differenziali come in modello con variabili latenti  $i_Z(t)$  e  $x(t)$ . Cerchiamo le evoluzioni di equilibrio, cioè i valori costanti  $\bar{u}, \bar{d}, \bar{y}, \bar{x}, \bar{i}_Z$  che soddisfano le equazioni statiche

$$\begin{aligned} 0 &= A\bar{x} + B\bar{i}_Z \\ \bar{y} &= V_{cc} - C\bar{x} - d_0 \bar{i}_Z \\ \bar{i}_Z + \bar{d} &= F(\bar{u}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Supponiamo che il valore nominale del disturbo  $\bar{d} = 0$ . Eliminando  $\bar{x}$  e  $\bar{i}_Z$  e supponendo per semplicità che  $A$  sia una matrice invertibile, si desume che

$$\bar{y} = V_{cc} + (CA^{-1}B - d_0)F(\bar{u}, \bar{y})$$

che è un'equazione nelle variabili  $\bar{u}, \bar{y}$  da cui posso progettare  $\bar{u}$  per ottenere la  $\bar{y}$  che voglio. Una volta fissati  $\bar{u}, \bar{y}$ , e quindi anche di conseguenza  $\bar{x}, \bar{i}_Z$ , si può linearizzare il modello ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= A\tilde{x}(t) + B\tilde{i}_Z(t) \\ \tilde{y}(t) &= -C\tilde{x}(t) - d_0 \tilde{i}_Z(t) - d_1 \frac{d\tilde{i}_Z(t)}{dt} \\ \tilde{i}_Z(t) + \tilde{d}(t) &= a\tilde{u}(t) + b\tilde{y}(t) \end{aligned}$$

dove  $a = \frac{\partial F}{\partial u} |_{\bar{u}, \bar{y}}$  e  $b = \frac{\partial F}{\partial y} |_{\bar{u}, \bar{y}}$ . Passando alle trasformate di Laplace otteniamo

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BI_Z(s) \\ Y(s) &= -CX(s) - d_0I_Z(s) - d_1sI_Z(s) \\ I_Z(s) + D(s) &= aU(s) + bY(s) \end{aligned}$$

dove i simboli  $U(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $D(s)$ ,  $X(s)$  e  $I_Z(s)$  denotano le Laplace trasformate di  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{y}(t)$ ,  $\tilde{d}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$ ,  $\tilde{i}_Z(t)$ . Possiamo quindi concludere che

$$Y(s) = -[C(sI - A)^{-1}B + d_0 + sd_1]I_Z(s) = -Z(s)I_Z(s)$$

dove  $Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + d_0 + sd_1$  è l'impedenza del dipolo. Si ottiene

$$-Y(s)/Z(s) + D(s) = aU(s) + bY(s)$$

e quindi

$$Y(s) = \frac{-a}{b + 1/Z(s)}U(s) + \frac{1}{b + 1/Z(s)}D(s) = \frac{-aZ(s)}{1 + bZ(s)}U(s) + \frac{Z(s)}{1 + bZ(s)}D(s) \quad (1.3)$$

che evidenzia le funzioni di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita e tra il disturbo e l'uscita.

**Esempio 1.8** Si consideri la rete elettrica illustrata in figura 1.18.

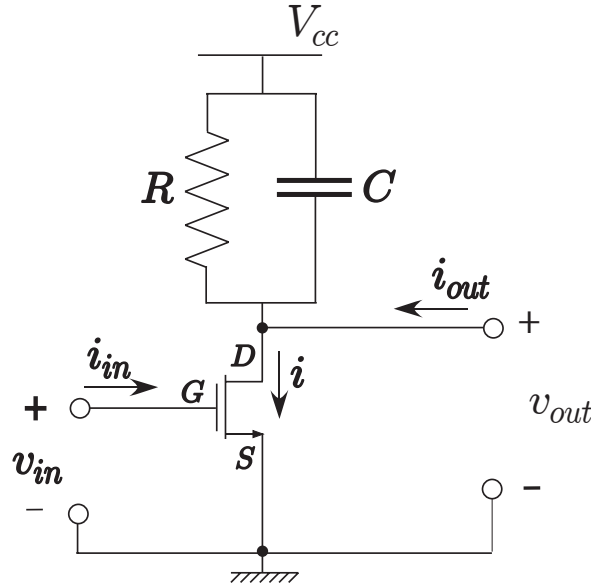


Figure 1.18:

In questo esempio le equazioni di stato che rappresentano il dipolo passivo sono

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}i_Z \\ v_Z &= x \end{aligned}$$

e la risultante impedenza è

$$Z(s) = \frac{R}{1 + RCs}$$

Prendendo come prima  $u = v_{in}$  come ingresso,  $y = v_{out}$  come uscita e  $d = i_{out}$  come disturbo e osservando che, come prima, si ha  $i_Z = F(u, y) - d$  e  $v_Z = V_{cc} - y$ , si ottiene

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC}x + \frac{1}{C}F(u, V_{cc} - x) - \frac{1}{C}d$$

$$y = V_{cc} - x$$

Cerchiamo le evoluzioni di equilibrio, cioè i valori costanti  $\bar{u}, \bar{d} = 0, \bar{y}$  e si trova che devono soddisfare l'equazione statica  $RF(\bar{u}, \bar{y}) + \bar{y} = V_{cc}$ . Una volta fissati  $\bar{u}, \bar{y}$ , e quindi anche di conseguenza  $\bar{x}, \bar{i}_z$ , si può linearizzare il modello ottenendo

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}\tilde{x}(t) + \frac{a}{C}\tilde{u}(t) - \frac{b}{C}\tilde{x}(t) - \frac{1}{C}\tilde{d}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = -\tilde{x}(t)$$

dove  $a = \frac{\partial F}{\partial u}|_{\bar{u}, \bar{y}}$  e  $b = \frac{\partial F}{\partial y}|_{\bar{u}, \bar{y}}$ . Possiamo così determinare le funzioni di trasferimento dagli ingressi  $\tilde{u}$  e  $\tilde{d}$  all'uscita  $\tilde{y}$  che sono date da

$$W_{\tilde{u}, \tilde{y}}(s) = \frac{-aR}{1 + bR + RCs}$$

e

$$W_{\tilde{d}, \tilde{y}}(s) = \frac{R}{1 + bR + RCs}$$

rispettivamente. Queste coincidono con quanto si ottiene applicando la formula generale (1.3).

## 1.3 Modellizzazione di sistemi meccanici

Per i sistemi meccanici le equazioni si scrivono esprimendo l'equilibrio delle forze e/o delle coppie applicate a ciascuna delle parti in movimento.

### 1.3.1 Sistemi in moto traslatorio

Nei sistemi meccanici in moto traslatorio le variabili significative che vengono vincolate dal modello sono le posizioni e le forze. Si usa la convenzione secondo la quale le posizioni fanno riferimento a un sistema di coordinate orientato in modo che le coordinate positive siano a destra dell'origine. Le forze si intendono positive se orientate verso destra.

I meccanici in moto traslatorio risultano dalla connessione di componenti elementari di tre tipologie:

1. Massa (sede delle forze di *inerzia*).
2. Molla (sede della forza *elastica*).
3. Smorzatore (sede della forza di *attrito viscoso*).

La somma di tutte le forze agenti sul punto (esterne al sistema, di inerzia ed esercitate da altri punti del sistema) deve essere zero in ogni istante.

**1. Massa:** Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui la massa si oppone alla sua accelerazione. La forza di inerzia  $F_i$  (le frecce in figura 1.19 indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) dovuta a un punto materiale di massa  $M$  nella posizione  $x$ , cioè esercitata sul punto  $x$  dal corpo di massa  $m$  che si trova in  $x$ , è data da (vedi figura 1.19)

$$F_i = -m \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

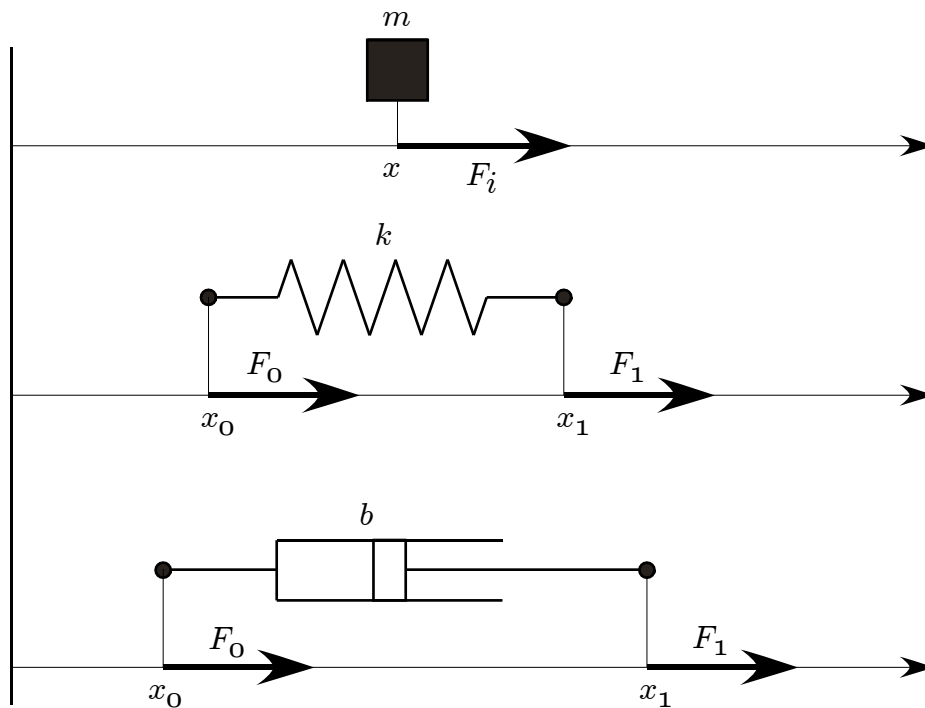


Figure 1.19:

**2. Molla:** La molla modella la forza elastica. Una molla ideale esercita ai suoi due estremi due forze (le frecce in figura 1.19 indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) di segno opposto (e quindi di direzioni opposte) e di uguale intensità proporzionale all'allungamento (o accorciamento) della molla

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - x_0 - L) \\ F_0 &= -F_1 = -k(x_0 - x_1 + L) \end{aligned}$$

dove  $k$  è la costante di elasticità e  $L$  è la lunghezza a riposo della molla. Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui un corpo elastico si oppone alla sua deformazione. In effetti se  $x_1 = x_0 + L$  (molla a riposo), allora la forza elastica  $F_1$  è nulla. Se  $x_1 > x_0 + L$  (molla estesa), allora la forza elastica  $F_1$  è negativa e quindi spinge verso sinistra. Se infine  $x_1 < x_0 + L$  (molla compressa), allora la forza elastica  $F_1$  è positiva e quindi spinge verso destra.

**3. Smorzatore:** Uno smorzatore ideale esercita ai suoi due estremi due forze (le frecce in figura 1.19 indicano convenzionalmente la direzione a cui corrispondono forze positive) di segno opposto (e quindi di direzioni opposte) e di uguale intensità proporzionale alla velocità di allungamento (o accorciamento) dello smorzatore

$$\begin{aligned} F_1 &= -b \frac{d}{dt}(x_1 - x_0) = -b \left( \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right) \\ F_0 &= -F_1 = -b \left( \frac{dx_0}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) \end{aligned}$$

dove  $b$  è la costante di attrito dello smorzatore. Lo smorzatore ideale modella la forza di attrito. Questo tipo di forza nasce dalla resistenza con cui l'attrito si oppone al movimento.

**Osservazione 1.9** In situazioni reali sia le molle che gli smorzatori possono presentare comportamenti non lineari. Ad esempio le molle reali avranno gli andamenti della forza in funzione dello spostamento mostrati in figura 1.20, nella quale si può notare la presenza di fenomeni di saturazione. L'andamento lineare ideale può essere considerato una "buona" approssimazione del comportamento non lineare.

Per quanto riguarda gli smorzatori, si noti che esistono altri tipi di attriti che presentano andamenti completamente diversi di quello dell'attrito viscoso. Si noti che nei casi non lineari l'andamento non è neppure approssimabile con una funzione lineare, come illustrato dalla figura 1.21.

**Esempio 1.10** Consideriamo l'apparato meccanico illustrato in figura 1.22. Applicando le regole sopra enunciate, si ottengono due equazioni differenziali accoppiate corrispondenti all'equilibrio di forze nei punti  $x_1$  e  $x_2$

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{x}_1 - k_1(x_1 - x_0 - L_1) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F = 0 \\ -m_2 \ddot{x}_2 - b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_2(x_2 - x_3 + L_2) = 0. \end{cases}$$

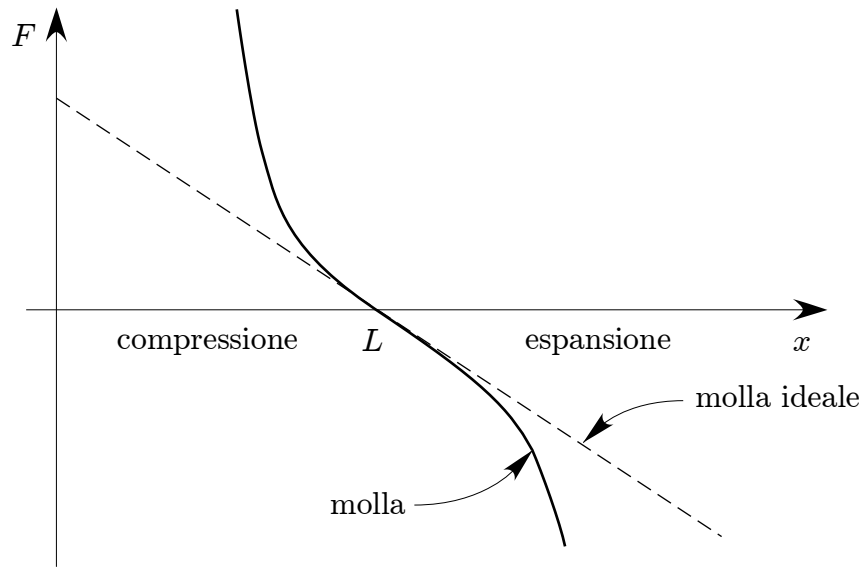


Figure 1.20:

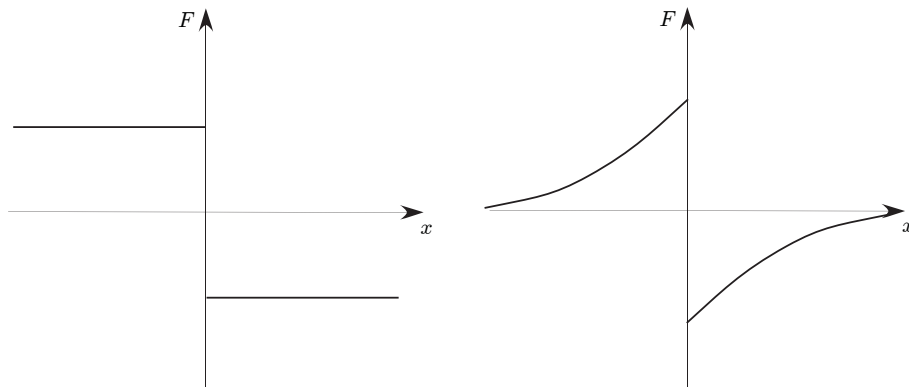


Figure 1.21:

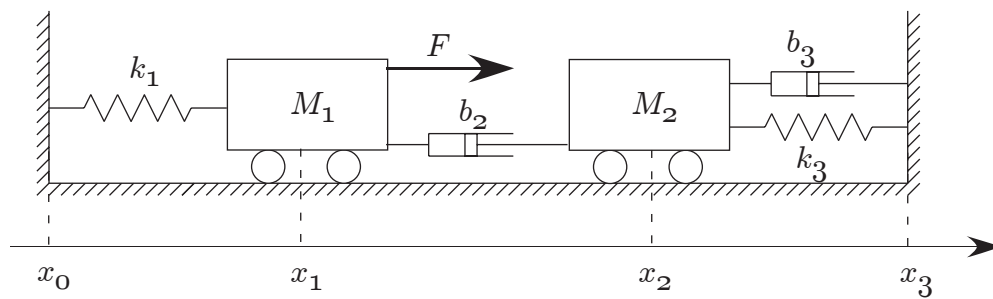


Figure 1.22:

Le evoluzioni di equilibrio in questo caso corrispondono alle soluzioni costanti delle precedenti equazioni  $x_1(t) = \bar{x}_1$  e  $x_2(t) = \bar{x}_2$  con  $F = 0$ . Ciò implica che  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 = 0$  e quindi, sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene

$$\begin{cases} -k_1(\bar{x}_1 - x_0 - L_1) = 0 \\ -k_2(\bar{x}_2 - x_3 + L_2) = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare a due equazioni in due incognite  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  che possono così essere ottenute con tecniche standard. Si trova che  $\bar{x}_1 = x_0 + L_1$  e  $\bar{x}_2 = x_3 - L_2$ . Effettuiamo un cambiamento di variabile

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ y_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \end{aligned}$$

e, osservando che  $\dot{x}_0 = \dot{x}_3 = 0$ , si ha che  $\dot{y}_1 = \dot{x}_1$  e  $\dot{y}_2 = \dot{x}_2$ . Si ottiene perciò

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + k_1y_1 + b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = F \\ m_2\ddot{y}_2 + k_2y_2 + b_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + b_2\dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che  $u = F$  sia l'ingresso e  $y = y_1$  l'uscita. Per manipolare le equazioni è conveniente passare alla rappresentazione dominio delle trasformate di Laplace, nel quale la derivata con la moltiplicazione per  $s$  (volendo ottenere la funzioni di trasferimento, si suppone che le condizioni iniziali siano nulle). Si ottiene così

$$\begin{aligned} (m_1s^2 + B_1s + K_1)Y_1 - B_1sY_2 &= F \\ -B_1sY_2 + (m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2)Y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $(m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2)$  e sostituendo si ottiene

$$[(m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2)(m_1s^2 + B_1s + K_1) - B_1^2s^2]Y = (m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2)U(s)$$

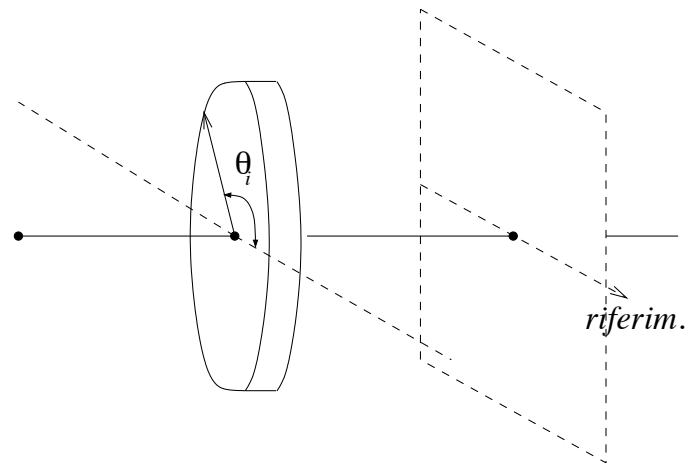
Quindi la funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2}{(m_2s^2 + (B_1 + B_2)s + K_2)(m_1s^2 + B_1s + K_1) - B_1^2s^2}$$

### 1.3.2 Sistemi in moto puramente rotatorio

Per questa classe di sistemi meccanici i componenti ideali elementari da prendere in considerazione sono:

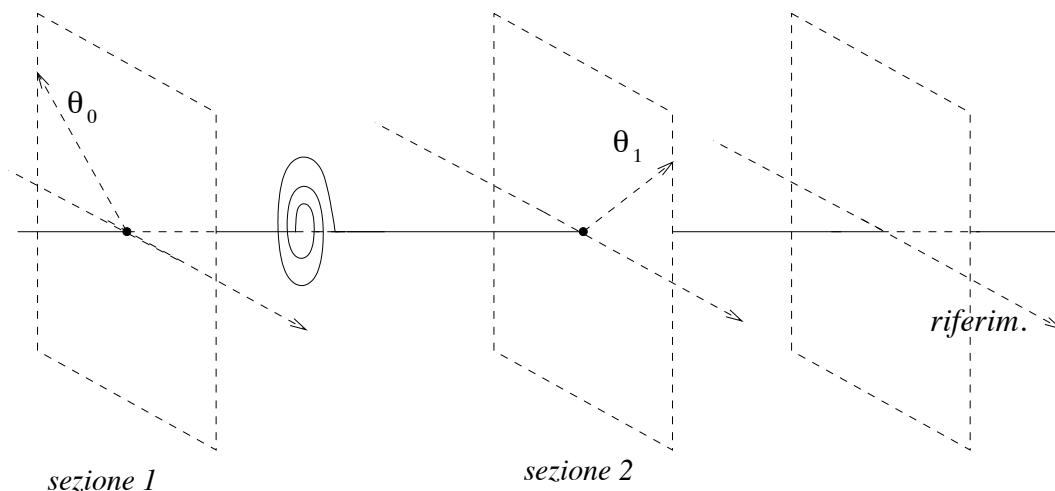
**1. Rotore ideale, con momento d'inerzia  $J$ .** La sua posizione è definita dall'angolo  $\theta_i$  formato da una generatrice solidale con il rotore stesso e da una generatrice fissa su una regione di riferimento.



Per indurre nel rotore un'accelerazione angolare pari a  $d^2\theta/dt^2$ , la sezione del rotore deve esercitare su quest'ultimo una coppia di valore uguale a  $Jd^2\theta/dt^2$ . Quindi il rotore esercita sulla sezione una coppia d'inerzia di valore pari a

$$-J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

**2. Molla torsionale.** Se  $\theta_1$  e  $\theta_0$  sono gli spostamenti angolari delle sezioni solidali con i terminali della molla rispetto ad una sezione di riferimento fissa, la molla esercita sulla sezione 1 una coppia pari a  $-K(\theta_1 - \theta_0)$ , ed è intesa essere "a riposo" se  $\theta_1 = \theta_0$  ( $K > 0$ ).

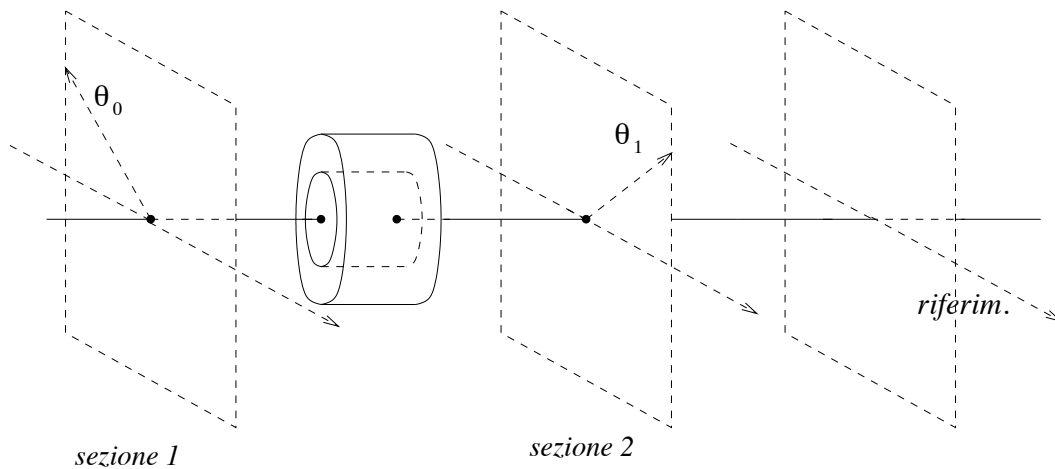


**3. Smorzatore viscoso.** Se  $\theta_1$  e  $\theta_0$  hanno significato analogo al precedente, lo smorzatore esercita sulla sezione 1 una coppia pari a

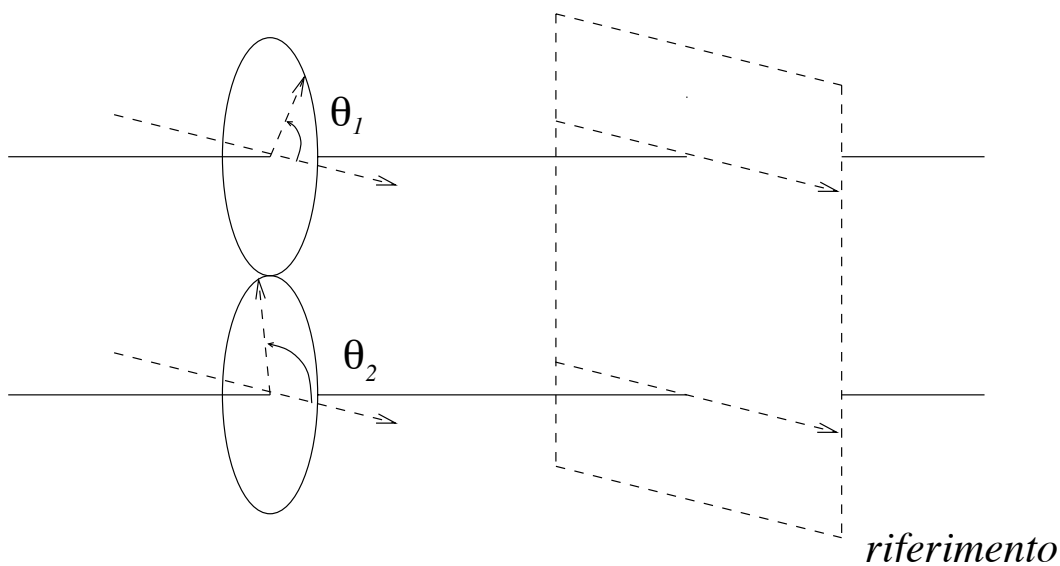
$$-B \left( \frac{d\theta_1}{dt} - \frac{d\theta_0}{dt} \right),$$

con  $B > 0$ .





**4. Trasmissioni ideali.** Una trasmissione ideale consiste in due ruote dentate ingaggiate tra loro.



Si noti che, per ruote ingaggiate, il numero di denti è proporzionale al raggio con costante di proporzionalità uguale. Questo significa che, se  $n_1$  ed  $n_2$  sono i denti delle ruote calettate sull'asse 1 e sull'asse 2 rispettivamente e  $r_1$  e  $r_2$  sono i loro raggi, allora

$$\frac{n_1}{r_1} = \frac{n_2}{r_2}$$

Siano  $\dot{\theta}_1$  e  $\dot{\theta}_2$  le velocità angolari delle due ruote rispetto a un riferimento fisso nello spazio, allora si ha

$$n_1 \dot{\theta}_1 = -n_2 \dot{\theta}_2.$$

In condizioni ideali, ipotizzando cioè assenza di attriti e ruote con inerzia nulla, le coppie che le ruote trasmettono agli assi devono soddisfare la condizione che la potenza meccanica erogata dal sistema delle due ruote al sistema dei due alberi è

complessivamente nulla, ossia dette  $T_1$  e  $T_2$  le due coppie erogate all'asse 1 e all'asse 2 dalle due ruote dentate, si deve avere

$$T_1 \dot{\theta}_1 + T_2 \dot{\theta}_2 = 0.$$

Da ciò si ottiene

$$\frac{T_1}{T_2} = -\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

ovvero

$$T_1 n_2 = T_2 n_1.$$

**Esempio 1.11** Si consideri il sistema meccanico in moto rotatorio illustrato in figura 1.23. Le equazioni del sistema sono

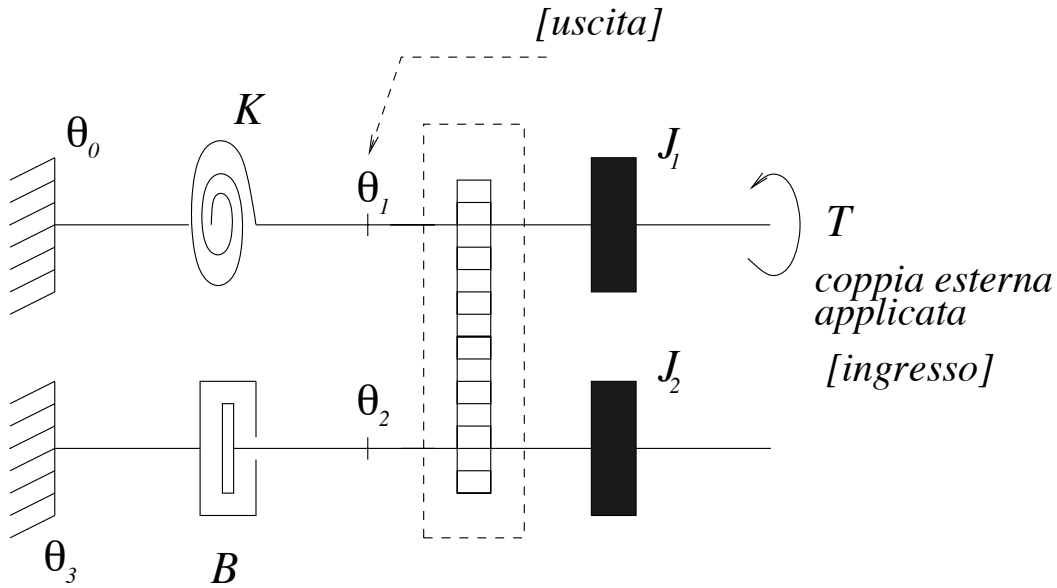


Figure 1.23:

$$\begin{cases} 0 = T - J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K(\theta_1 - \theta_0) + T_1 & \text{coppie sulla sezione 1} \\ 0 = -J_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} - B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) + T_2 & \text{coppie sulla sezione 2,} \end{cases}$$

dove  $T_1$  e  $T_2$  sono le coppie esercitate sulle sezioni 1 e 2 dalle ruote dentate. Tenendo conto che  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_3 = 0$  e che  $T_1 n_2 = T_2 n_1$  e che  $\dot{\theta}_1 n_1 = -\dot{\theta}_2 n_2$ , si ha, eliminando  $\dot{\theta}_2$  e  $T_2$ ,

$$\begin{cases} 0 = T - J_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K \theta_1 + T_1 \\ 0 = +J_2 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} \frac{n_1}{n_2} + B \frac{d \theta_1}{dt} \frac{n_1}{n_2} + T_1 \frac{n_2}{n_1}. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $n_2/n_1$  e sottratta la seconda alla prima si elimina  $T_1$

$$0 = -\frac{n_2}{n_1} T - J_1 \frac{n_2}{n_1} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - K \frac{n_2}{n_1} \theta_1 + T_1 \frac{n_2}{n_1} - J_2 \frac{n_1}{n_2} \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} - B \frac{n_1}{n_2} \frac{d \theta_1}{dt} - T_1 \frac{n_2}{n_1}$$

da cui

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \left[ J_1 \frac{n_2}{n_1} - J_2 \frac{n_1}{n_2} \right] + \frac{d\theta_1}{dt} \left[ B \frac{n_1}{n_2} \right] + \theta_1 \left[ K \frac{n_2}{n_1} \right] = \frac{n_2}{n_1} T$$

ovvero

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \left[ J_1 + J_2 \frac{n_1^2}{n_2^2} \right] + \frac{d\theta_1}{dt} B \frac{n_1^2}{n_2^2} + \theta_1 K = T.$$

**Esempio 1.12 Il pendolo** Consideriamo un'asta rigida incernierata all'asse di un motore elettrico e libera di ruotare attorno a tale asse (vedi figura 1.24). Supponiamo

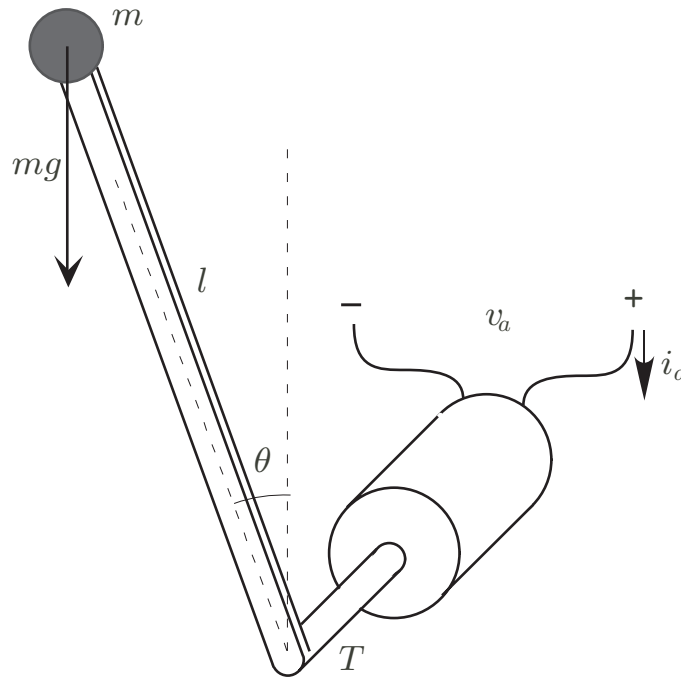


Figure 1.24:

che all'estremo dell'asta non incernierato al motore sia saldata una massa  $m$ . Sia  $\theta$  l'angolo compreso tra l'asta e l'asse verticale e  $T$  la coppia esercitata dal motore. Se supponiamo che l'asta abbia massa trascurabile, allora il momento di inerzia del sistema asta+massa è  $J = ml^2$ . Inoltre la forza di gravità esercita sull'asta una coppia pari a  $lmg \sin \theta$ . Si ottiene così

$$\begin{aligned} -J\ddot{\theta} + lmg \sin \theta + T &= 0 \\ l\ddot{\theta} - g \sin \theta - \frac{1}{ml}T &= 0 \end{aligned}$$

che può essere considerato un sistema non lineare con ingresso  $u = T$  e uscita  $y = \theta$ . Supponendo che  $\bar{u} = 0$ , si vede che esistono due punti di equilibrio dato che esistono due soluzioni dell'equazione statica  $\sin(\bar{y}) = 0$  che sono  $\bar{y} = 0, \pi$ .

(i) Linearizziamo nell'intorno di  $\bar{y} = 0$ . In questo caso, siccome

$$\sin(y) \simeq \cos(\bar{y})\tilde{y} = \tilde{y}$$

dove  $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y} = y(t)$ , allora in questo caso la linearizzazione dà la seguente equazione

$$l\ddot{\tilde{y}} - g\tilde{y} = \frac{1}{ml}u,$$

che può essere considerato una buona approssimazione del sistema di partenza, quando  $y$  e  $u$  assumono valori “piccoli”. La funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{s^2 - g/l}.$$

mentre la risposta impulsiva è

$$w(t) = c_1 e^{pt} + c_2 e^{-pt}.$$

dove

$$p = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e dove  $c_1, c_2$  sono opportune costanti. Si noti che uno dei due modi è un esponenziale divergente.

(ii) Linearizziamo ora nell'intorno di  $\bar{y} = \pi$ . In questo caso, siccome

$$\sin(y) \simeq \cos(\bar{y})\tilde{y} = -\tilde{y}$$

dove  $\tilde{y}(t) := y(t) - \bar{y} = y(t) - \pi$ , allora in questo caso la linearizzazione dà la seguente equazione

$$l\ddot{\tilde{y}} + g\tilde{y} = \frac{1}{ml}u,$$

La funzione di trasferimento è in questo caso

$$W(s) = \frac{1}{ml^2} \frac{1}{s^2 + g/l}.$$

mentre la risposta impulsiva è in questo caso del tipo

$$w(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e dove  $A, \varphi$  sono opportune costanti.

## 1.4 Modellizzazione di sistemi elettromeccanici

Consideriamo ora un modello semplificato di un motore elettrico a corrente continua. Questo costituisce l'esempio più comune di attuatore per il controllo di sistemi meccanici. Come mostrato dalla figura 1.25, il motore è composto da una *parte statorica*, con funzioni di induttore, schematizzabile con il circuito  $R_e, L_e$  detto di eccitazione, e di una *parte rotorica*, schematizzabile con un circuito  $R, L$  detto armatura, in serie con un rotore ideale in cui ha luogo la conversione della potenza elettrica in potenza meccanica. Ai morsetti di eccitazione viene applicata la tensione  $v_e(t)$  per effetto

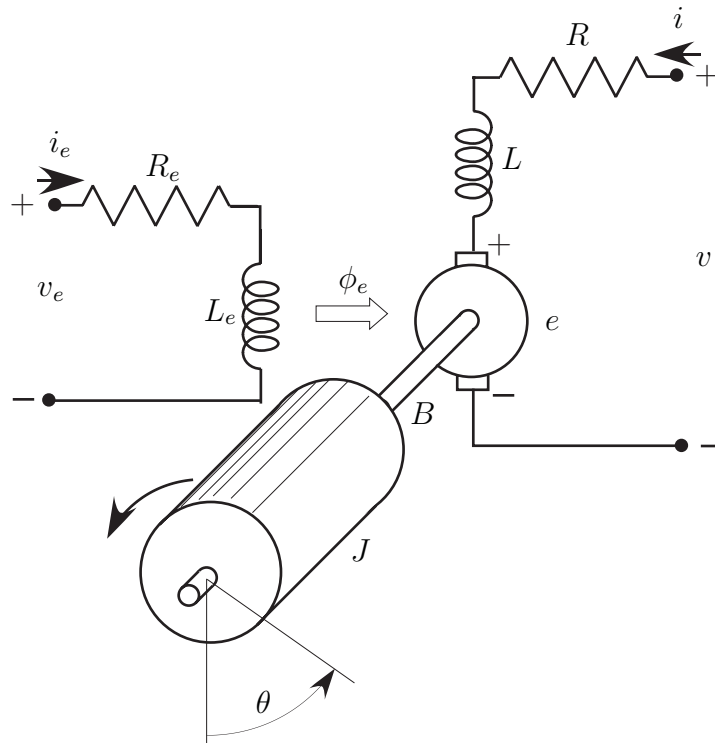


Figure 1.25:

della quale nel circuito di eccitazione circola la corrente  $i_e(t)$  che sostiene il flusso di eccitazione  $\phi_e(t)$  che investe il rotore. L'equazione del circuito di eccitazione è

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{d}{dt} i_e(t)$$

e inoltre  $\phi_e(t) = L_e i_e(t)$ . Il circuito di armatura associato alla parte rotante ha invece equazione elettrica

$$v(t) = R i(t) + L \frac{d}{dt} i(t) + e(t),$$

dove  $e(t)$  è la forza contro elettromotrice che si sviluppa nel circuito d'armatura, indotta dal movimento dell'armatura nel campo prodotto del circuito di eccitazione.

La forza contro elettromotrice è data dalla formula

$$e(t) = K_e \phi_e(t) \omega(t) = K_e L_e i_e(t) \omega(t),$$

dove  $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$  è la velocità di rotazione e  $K_e$  è una opportuna costante. Una seconda equazione di tipo elettromeccanico (perchè coinvolge sia grandezze elettriche che meccaniche) è la seguente

$$c(t) = K_m \phi_e(t) i(t) = K_m L_e i_e(t) i(t),$$

dove  $c(t)$  è la coppia generata e dove  $K_m$  è una opportuna costante. In condizioni ideali la potenza elettrica fornita  $e(t)i(t)$  deve coincidere con la potenza meccanica erogata  $c(t)\omega(t)$ , da cui segue che

$$K_e L_e i_e(t) \omega(t) i(t) = K_m L_e i_e(t) \omega(t) i(t)$$

da cui

$$K_e = K_m.$$

Tale uguaglianza si ha solo se si sono usate per le grandezze meccaniche ed elettriche unità di misura coerenti in modo tale che la potenza meccanica  $e(t)\omega(t)$  sia espressa nella stessa unità di misura della potenza elettrica  $e(t)i(t)$ . Sia  $K := K_e = K_m$ . Il sistema meccanico, cui viene applicata la coppia  $c(t)$ , è descritto dall'equazione

$$-J \frac{d\omega(t)}{dt} - B\omega(t) + c(t) + T(t) = 0,$$

nel quale  $J$  esprime il momento di inerzia,  $B$  la costante di attrito viscoso dell'asse in rotazione e  $T$  una coppia applicata esternamente. Riassumendo si hanno le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \\ v = Ri + L \frac{di}{dt} + e \\ e = K L_e i_e \omega = K \phi_e \omega \\ c = K L_e i_e i \\ -J \frac{d\omega}{dt} - B\omega + c + T = 0. \end{array} \right.$$

Sono cinque equazioni differenziali nelle sette incognite  $v_e, i_e, v, i, e, c, \omega$ . Si possono eliminare due equazioni e le due incognite  $e, c$  ottenendo

$$\left\{ \begin{array}{l} v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \\ v = Ri + L \frac{di}{dt} + (K L_e) i_e \omega \\ -J \frac{d\omega}{dt} - B\omega + (K L_e) i_e i + T = 0. \end{array} \right.$$

Si ottengono quindi tre equazioni nelle sei incognite  $v_e, i_e, v, i, \omega, T$ . Si tratta quindi di un sistema non lineare con tre ingressi. È naturale in questo caso porre come uscita  $\omega$ . Osservando la prima equazione si nota che essa rappresenta un sistema che lega  $v_e$  con  $i_e$  quindi è necessario prendere  $v_e$  (o  $i_e$ ) come uno degli ingressi. Come i rimanenti due ingressi possiamo prendere  $v$  (o  $i$ ) e  $T$ . A questo punto possiamo procedere fissando degli ingressi nominali costanti  $\bar{v}_e, \bar{v}, \bar{T}$  dai quali determinare le evoluzioni di equilibrio, cioè i valori di  $\bar{i}_e, \bar{i}, \bar{\omega}$  che risolvono le equazioni statiche

$$\begin{cases} \bar{v}_e = R_e \bar{i}_e \\ \bar{v} = R \bar{i} + (KL_e) \bar{i}_e \bar{\omega} \\ -B \bar{\omega} + (KL_e) \bar{i}_e \bar{i} + \bar{T} = 0. \end{cases}$$

e poi linearizzare nell'intorno di tali punti di equilibrio. Procediamo invece ad analizzare un caso semplificato.

In effetti, nella maggior parte delle applicazioni si applica come ingresso  $v_e$  una tensione costante. Il sistema del primo ordine (come visto in precedenza) reagisce con una uscita  $i_e(t)$  che tende a diventare costante (vedi risposta al gradino di un sistema del primo ordine). In questo caso si può supporre che, dopo un breve transitorio, anche  $i_e(t)$ , e quindi anche il flusso  $\phi_e(t) = L_e i_e(t)$ , sia costante. Questa situazione descrive anche i motori in continua nei quali, al posto del circuito di eccitazione, c'è un magnete permanente che induce un flusso magnetico  $\phi_e(t)$  costante. In questo caso, definendo la costante

$$H := (KL_e) i_e$$

si ottiene che il secondo sistema a due ingressi  $v, T$  e uscita  $\omega$  diventa lineare

$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} = v - H\omega \\ J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = Hi + T \end{cases} \quad (1.4)$$

Si osservi che la prima equazione può essere interpretata come un sistema elettrico RL con ingresso la tensione  $v - H\omega$  e uscita la corrente  $i$ . Questo sistema a funzione di trasferimento

$$\frac{1}{Ls + R}$$

La seconda equazione invece può essere interpretata come un sistema meccanico rotatorio con ingresso la coppia  $Hi + T$  e uscita la velocità angolare  $\omega$ . Questo sistema a funzione di trasferimento

$$\frac{1}{Js + B}$$

Quindi la dinamica complessiva può essere ricavata interpretando le precedenti equazioni attraverso lo schema a blocchi mostrato nella figura 1.26.

Attraverso l'algebra degli schemi a blocchi si possono ottenere le funzioni di trasferimento d'interesse. Ad esempio, se ci interessa la funzione di trasferimento tra

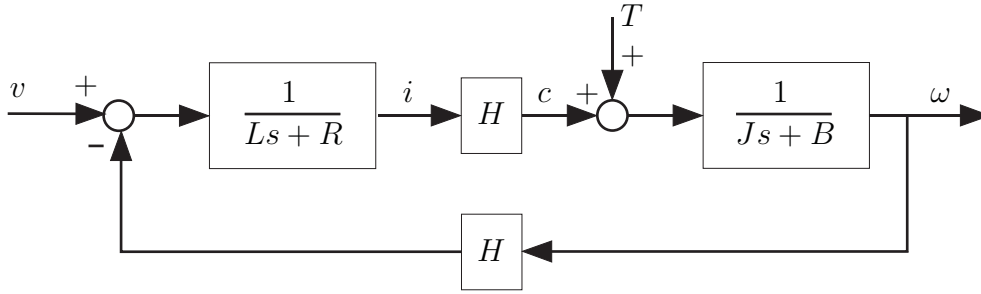


Figure 1.26:

l'ingresso  $v$  e l'uscita  $\omega$ , si pone  $T = 0$  e si trova che essa vale

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{\frac{H}{(Ls + R)(Js + B)}}{1 + \frac{H^2}{(Ls + R)(Js + B)}} = \frac{H}{LJs^2 + (RJ + LB)s + (RB + H^2)}$$

mentre per il calcolo della funzione di trasferimento tra l'ingresso  $T$  e l'uscita  $\omega$ , si pone  $v = 0$  e si trova che essa vale

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{\frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{H^2}{(Ls + R)(Js + B)}} = \frac{Ls + R}{LJs^2 + (RJ + LB)s + (RB + H^2)}$$

Consideriamo ora un sistema meccanico rotatorio. Questo sistema può essere descritto da una funzione di trasferimento  $M(s)$  che mette in relazione l'ingresso, che è la coppia  $T$  applicata all'asse del sistema meccanico, con l'uscita, che è la velocità angolare  $\omega$  dell'asse del sistema meccanico. Se colleghiamo rigidamente l'asse del motore con l'asse del sistema meccanico, lo schema a blocchi che ne risulta è quello illustrato nella figura 1.27. Il sistema meccanico ha ora funzione di trasferimento

$$\frac{\frac{1}{Js + B}}{1 + \frac{1}{(Js + B)M(s)}} = \frac{1}{(Js + B) + 1/M(s)}$$

Se  $J$  e  $B$  sono "piccoli", allora la precedente funzione di trasferimento si può approssimare con  $M(s)$ .

Nelle configurazioni proposte finora per il controllo del motore in continua si assume che l'ingresso di controllo sia la tensione. Esiste un'altra configurazione che permette di controllare direttamente la corrente del motore che porta a funzioni di trasferimento più semplici e quindi a problemi di controllo di più semplice soluzione. Si consideri infatti il seguente schema elettrico mostrato nella figura 1.28. In questo schema, assumendo che l'operazionale abbia amplificazione infinita, si ha che le tensioni  $v_-$  e  $v_+$  coincidono e quindi la corrente  $i$  che attraversa il motore vale  $i = v/R_1$ .



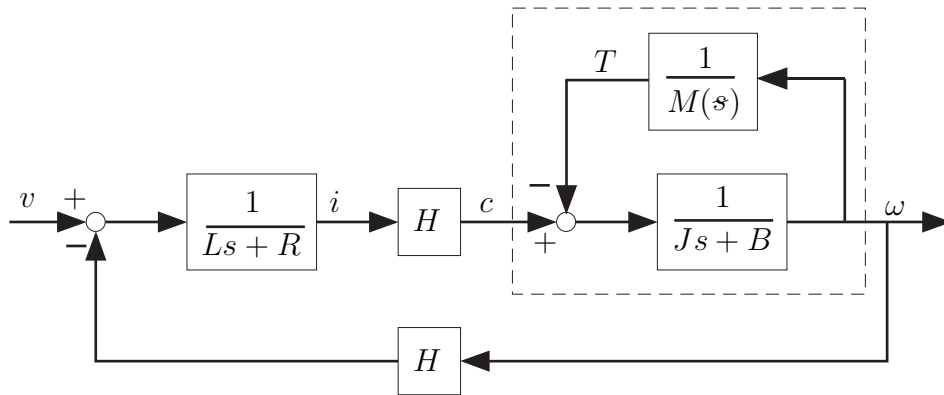


Figure 1.27:

Da ciò e dalla seconda equazione della formula (1.7) possiamo desumere che la funzione di trasferimento tra la tensione  $v$  e la velocità angolare  $\omega$  è

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{H/R_1}{Js + B}$$

e che la funzione di trasferimento tra la coppia  $T$  e la velocità angolare  $\omega$  è

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{1}{Js + B}$$

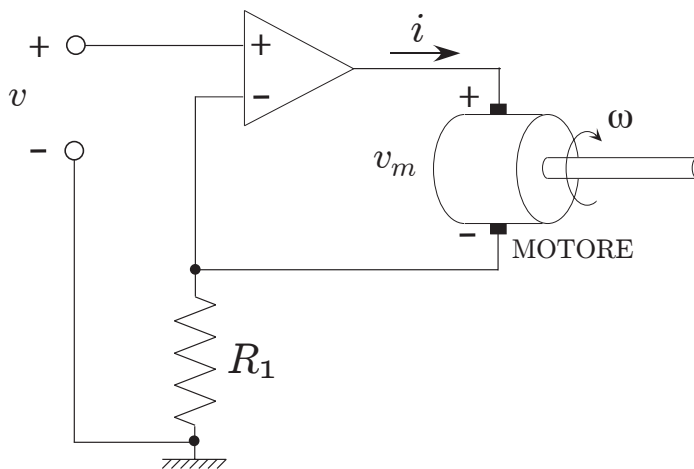


Figure 1.28:

Un'analisi piu' accurata porterebbe alle seguenti equazioni

$$\begin{cases} Ri + L \frac{di}{dt} = v_m - H\omega \\ J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = Hi + T \\ A(v_+ - v_-) = R_1 i + v_m \end{cases} \quad (1.5)$$

dove  $v_+ = v$  e  $v_- = R_1 i$ . Passando alle trasformate di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} (Ls + R)I(s) = V_m(s) - H\Omega(s) \\ (Js + B)\Omega(s) = HI(s) + T(s) \\ A(V(s) - R_1 I(s)) = R_1 I(s) + V_m(s) \end{cases} \quad (1.6)$$

Dall'ultima equazione si ottiene

$$V_m(s) = AV(s) - (A + 1)R_1 I(s)$$

che sostituita nelle altre due da'

$$\begin{cases} (Ls + R + (A + 1)R_1)I(s) = AV(s) - H\Omega(s) \\ (Js + B)\Omega(s) = HI(s) + T(s) \end{cases} \quad (1.7)$$

da cui si ricavano le funzioni di trasferimento

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{AH}{(Ls + R + (A + 1)R_1)(Js + B) + H^2}$$

$$W_{T,\omega}(s) = \frac{Ls + R + (A + 1)R_1}{(Ls + R + (A + 1)R_1)(Js + B) + H^2}$$

Si osservi che se  $A$  e' grande, le precedenti funzioni di trasferimento sono approssimabili con

$$W_{v,\omega}(s) = \frac{H/R_1}{Js + B}, \quad W_{T,\omega}(s) = \frac{1}{Js + B}$$

ma che il segno di  $A$  influenza la stabilita'.