

# Contents

<b>1</b>	<b>Metodo del luogo delle radici</b>	<b>3</b>
1.1	Tracciamento del luogo . . . . .	8
1.2	Regole per il tracciamento del luogo . . . . .	10
1.3	Stabilità condizionata . . . . .	30
1.4	Presenza di zeri in particolari regioni del piano complesso . . . . .	31



# Chapter 1

## Metodo del luogo delle radici

Il metodo del luogo delle radici è un procedimento grafico che permette di studiare il spostamento dei poli di una funzione di trasferimento ad anello chiuso al variare di un parametro reale  $K$ .

Supponiamo di considerare il seguente polinomio nella variabile  $s$  dipendente da un parametro  $K$

$$f(s) = (\alpha_n + \beta_n K)s^n + \dots + (\alpha_1 + \beta_1 K)s + (\alpha_0 + \beta_0 K),$$

Allora, raccogliendo  $K$ , si ottiene

$$f(s) = (\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0) + K(\beta_n s^n + \dots + \beta_1 s + \beta_0) = \alpha(s) + K\beta(s).$$

Nello studio degli zeri (o radici) di  $f(s)$  si possono fare delle restrizioni.

1. Si può ipotizzare che  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  siano entrambi polinomi monici, cioè con coefficienti dei termini di grado massimo unitari. In effetti, per rendere monico  $\alpha(s)$ , basta dividere  $f(s)$  per il coefficiente di grado massimo di  $\alpha(s)$  e ciò non cambia gli zeri di  $f(s)$ . Per rendere monico  $\beta(s)$ , basta inglobare il suo coefficiente di grado massimo nel parametro  $K$  che varia. Più precisamente, supponendo che  $\deg \alpha(s) = n$  ( $\deg$  significa grado) e  $\deg \beta(s) = m$ , gli zeri di  $f(s)$  al variare di  $K$  coincidono con gli zeri di

$$\frac{f(s)}{\alpha_n} = \left( s^n + \dots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} s + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right) + \hat{K} \left( s^m + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_m} s + \frac{\beta_0}{\beta_m} \right)$$

al variare del nuovo parametro  $\hat{K} = K\beta_m/\alpha_n$ . Si noti che, se  $\beta_m, \alpha_n$  hanno stesso segno, allora  $K, \hat{K}$  hanno stesso segno, mentre se viceversa  $\beta_m, \alpha_n$  hanno segno opposto, allora anche  $K, \hat{K}$  hanno segno opposto.

2. Si può ipotizzare che  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  siano privi di fattori comuni cioè coprime. Si osservi infatti che, se  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  hanno un fattore comune, questo sarà fattore anche di  $f(s)$  e porterà quindi a un certo numero di zeri che resteranno fissi

quando  $K$  varia. Più precisamente, supponendo che  $\alpha(s) = \alpha'(s)d(s)$  e che  $\beta(s) = \beta'(s)d(s)$ , allora

$$f(s) = (\alpha'(s) + K\beta'(s))d(s)$$

avrà una porzione di zeri fissi, che sono gli zeri di  $d(s)$ , e una porzione di zeri variabili con  $K$ , che sono gli zeri di  $\alpha'(s) + K\beta'(s)$ .

3. Si può ipotizzare che  $\deg \alpha(s) \geq \deg \beta(s)$ . In effetti, nel caso in cui  $\deg \alpha(s) < \deg \beta(s)$ , allora basta osservare che gli zeri di  $f(s)$  al variare di  $K$  coincidono con gli zeri di

$$\frac{f(s)}{K} = \beta(s) + \hat{K}\alpha(s)$$

al variare del nuovo parametro  $\hat{K} = 1/K$ .

Attraverso queste osservazioni possiamo definire formalmente il concetto di luogo delle radici.

**Definizione 1.1** Dati due polinomi **monici coprimi**  $p(s)$  e  $q(s)$  con  $\deg p(s) \geq \deg q(s)$ , il luogo delle radici di  $p(s) + Kq(s)$  è il sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  costituito dagli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  al variare di  $K \in \mathbb{R}$ . Chiameremo **luogo positivo** la porzione associata ai valori di  $K \geq 0$  e luogo negativo la porzione associata ai valori di  $K \leq 0$ .

**Osservazione 1.2** Indichiamo  $\deg p(s) = n$  e  $\deg q(s) = m$ . Si osservi che, se  $n = m$ , allora, per  $K = -1$ , il polinomio  $p(s) + Kq(s)$  calerà di grado. Si osservi che tale fenomeno non avverrà se  $n > m$  o se siamo interessati al solo **luogo positivo**.

**Osservazione 1.3** A ciascun valore di  $K$ , per il quale  $\deg(p(s) + Kq(s)) = n$ , **corrispondono  $n$  punti del luogo**, contati con la rispettiva molteplicità, che corrispondono agli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  per quel valore di  $K$ . Ogni punto del luogo è “tarato” dal valore di  $K$  che determina il punto stesso come zero di  $p(s) + Kq(s)$ . Il luogo avrà perciò  $n$  **rami** parametrizzati in  $K$  che si intersecano per i valori di  $K$  in corrispondenza dei quali il polinomio  $p(s) + Kq(s)$  ha zeri multipli.

Viceversa, ogni intersezione fra due rami del luogo corrisponde sempre a zeri multipli di  $p(s) + Kq(s)$ , per qualche  $K$ . In altre parole, **non** esistono due valori distinti  $K_1 \neq K_2$  tali che un punto del luogo, corrispondente al valore  $K_1$  del parametro  $K$ , sia anche punto del luogo corrispondente anche al valore  $K_2$  (vedi figura 1.1).

Infatti, se ciò si verificasse, esisterebbe  $s_0 \in \mathbb{C}$ , tale che

$$\begin{aligned} p(s_0) + K_1q(s_0) &= 0 \\ p(s_0) + K_2q(s_0) &= 0 \end{aligned}$$

e ciò implicherebbe

$$(K_1 - K_2)q(s_0) = 0 \implies q(s_0) = 0 \implies p(s_0) = 0$$

e quindi  $p(s)$  e  $q(s)$  non sarebbero coprimi.

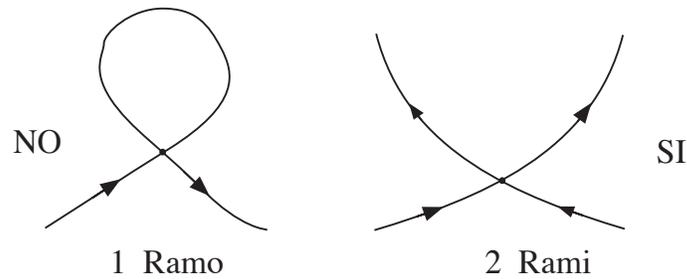


Figure 1.1: Intersezione tra rami impossibile e possibile.

Lo studio degli zeri di un polinomio  $p(s) + Kq(s)$  al variare del parametro  $K$  è equivalente allo studio dei poli del sistema a catena chiusa in figura 1.2 che ha funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{q(s)}{p(s) + Kq(s)}.$$

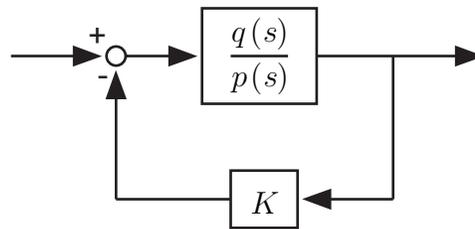


Figure 1.2: Sistema retroazionato.

**Esempio 1.4** Si consideri il sistema in figura 1.3 dove

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

Allora la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita del sistema a catena chiusa è

$$T(s) = \frac{K}{s+1+K}$$

che ha un polo in  $-1 - K$ . Il relativo luogo positivo ha un solo ramo come illustrato in figura 1.4. Se invece

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

allora la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita del sistema a catena chiusa è

$$T(s) = \frac{K}{s(s+1)+K}$$

che ha due poli che dipendono da  $K$ . Il relativo luogo positivo ha due rami come illustrato in figura 1.5. Se infine

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

allora la funzione di trasferimento tra l'ingresso e l'uscita del sistema a catena chiusa è

$$T(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3) + K}$$

che ha tre poli che dipendono da  $K$ . Il relativo luogo positivo ha tre rami come illustrato in figura 1.6.

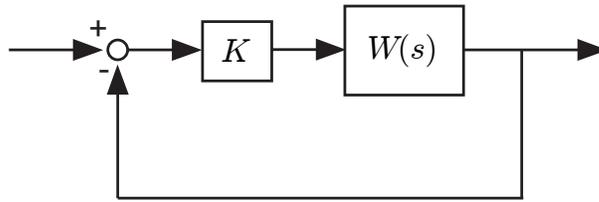


Figure 1.3: Sistema retroazionato dell'esempio 1.4.

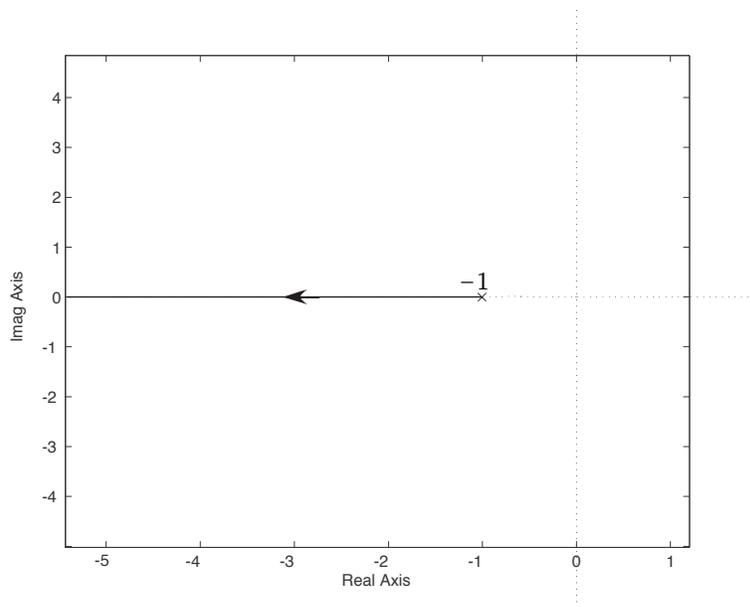


Figure 1.4: Luogo positivo di  $s + 1 + K$ .

In generale non è detto che il sistema che vogliamo studiare abbia esattamente tale funzione di trasferimento, ma avrà più spesso solo una funzione di trasferimento con lo stesso denominatore.

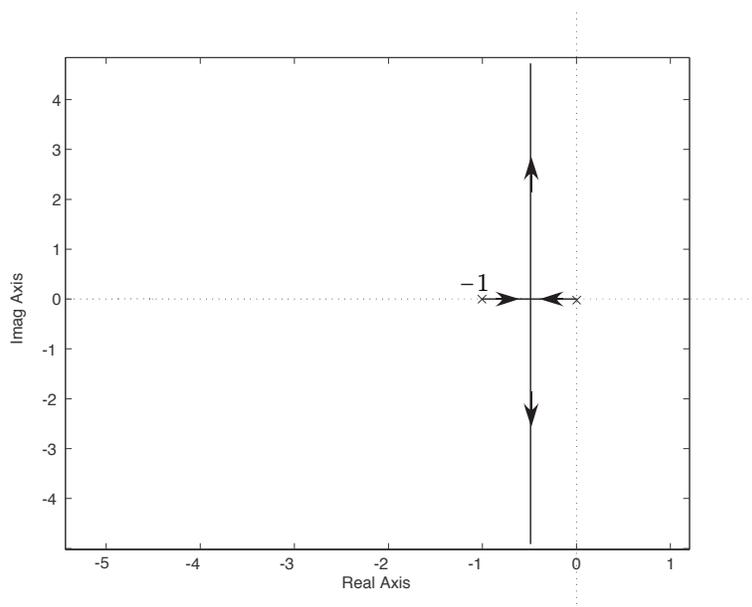


Figure 1.5: Luogo positivo di  $s(s + 1) + K$ .

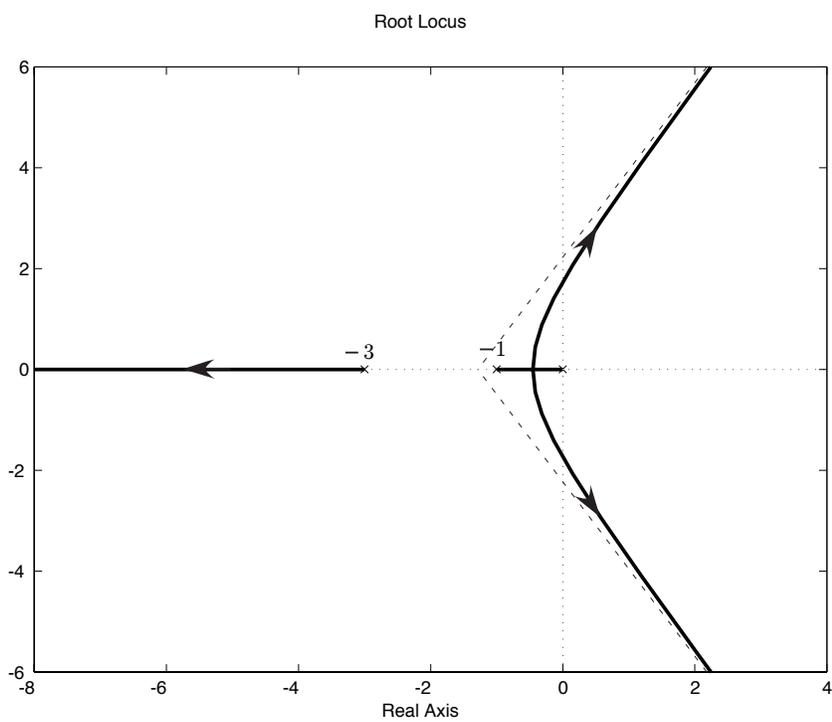


Figure 1.6: Luogo positivo di  $s(s + 1)(s + 3) + K$ .

**Esempio 1.5** Il sistema in figura 1.7 ha funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{K}{s(s+2) + K(s/10 + 1)}.$$

Questa ha lo stesso denominatore della funzione di trasferimento

$$T'(s) = \frac{s/10 + 1}{s(s+2) + K(s/10 + 1)}$$

del sistema in figura 1.8.

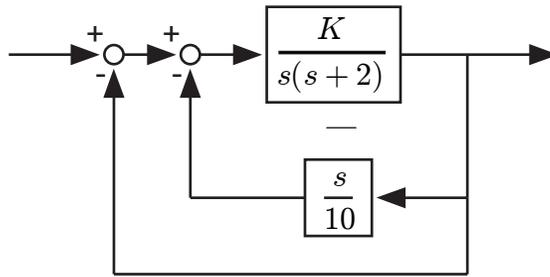


Figure 1.7: Sistema retroazionato dell'esempio 1.5.

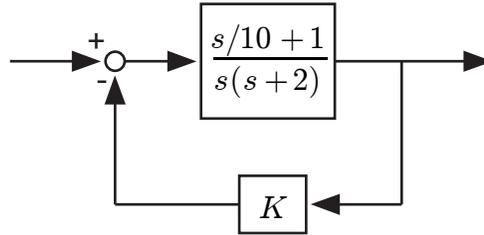


Figure 1.8: Sistema retroazionato dell'esempio 1.5.

## 1.1 Tracciamento del luogo

Partiamo dai due polinomi **monici coprimi**  $p(s)$  e  $q(s)$ .

$$\begin{aligned} p(s) &= s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0 = (s - \bar{z}_1)(s - \bar{z}_2) \cdots (s - \bar{z}_n) \\ q(s) &= s^m + q_{m-1}s^{m-1} + \cdots + q_1s + q_0 = (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) \end{aligned}$$

dove  $p_i, q_i$  sono i coefficienti dei polinomi  $p(s), q(s)$  mentre  $\bar{z}_i, z_i$  sono le radici di  $p(s), q(s)$ . Le radici  $\bar{z}_i$  di  $p(s)$  saranno detti i **poli del luogo** mentre le radici  $z_i$

di  $q(s)$  sono detti gli **zeri del luogo**. Trovare gli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  al variare di  $K$ , corrisponde a trovare i poli del sistema in retroazione unitaria in figura 1.9 dove  $W(s) = K \frac{q(s)}{p(s)}$ , al variare del guadagno  $K$ .

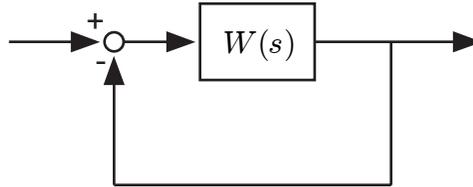


Figure 1.9: Retroazione unitaria.

Scriviamo  $W(s)$  in forma di Evans

$$W(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - \bar{z}_1)(s - \bar{z}_2) \cdots (s - \bar{z}_n)}$$

dove ... Si noti che il  $K$  qui considerato è detto guadagno di Evans ed è legato al guadagno di Bode  $K_B$  dalla seguente relazione

$$K = (-1)^{m+n-l} \frac{\prod \bar{z}_i}{\prod z_i} K_B,$$

dove  $l$  è il tipo del sistema e le produttorie sono estese ai poli e zeri non nulli. Si noti che, se  $W(s)$  è stabile a fase minima (con zeri stabili), allora  $K$  e  $K_B$  hanno lo stesso segno. Si noti inoltre che gli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  coincidono con le soluzioni dell'equazione

$$\frac{q(s)}{p(s)} = -\frac{1}{K}, \quad \forall K \neq 0.$$

Tale equazione, nelle incognite  $s \in \mathbb{C}$  e  $K \in \mathbb{R}$ . Quindi si tratta di due equazioni reali ( $\text{Re}[q(s)/p(s)] = -1/K$  e  $\text{Im}[q(s)/p(s)] = 0$ ) in tre incognite reali ( $K$ ,  $\text{Re}(s)$  e  $\text{Im}(s)$ ). Si può riscrivere tale equazioni come un sistema delle due seguenti equazioni:

1. La prima equazione coinvolge solo la fase di  $\frac{q(s)}{p(s)}$  e individua i punti  $s \in \mathbb{C}$  che appartengono al luogo

$$\angle \left( \frac{q(s)}{p(s)} \right) = \begin{cases} (2h + 1)\pi & , \quad K > 0 \\ 2h\pi & , \quad K < 0 \end{cases}, \quad h \in \mathbb{Z},$$

dove  $\angle$  indica la fase di un numero complesso. Si tratta di una equazione nelle due incognite  $\text{Re}(s)$  e  $\text{Im}(s)$ . Abbiamo così eliminato una equazione e l'incognita  $K$ .

2. La seconda equazione determina, a parte il segno, il valore di  $K$  cui corrisponde un particolare punto del luogo

$$\left| \frac{q(s)}{p(s)} \right| = \frac{1}{|K|}.$$

La prima equazione implica che

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - \bar{z}_i) = \begin{cases} (2h + 1)\pi & , \quad K > 0 \\ 2h\pi & , \quad K < 0 \end{cases},$$

mentre la seconda equazione si riscrive come segue

$$|K| = \frac{\prod_{i=1}^n |s - \bar{z}_i|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}.$$

## 1.2 Regole per il tracciamento del luogo

**Regola 1 (Numero dei rami e simmetria).** Per ogni valore di  $K$  (eccetto il valore  $\bar{K} = -1$ , per il quale si ha l'eventuale caduta di grado) il polinomio  $p(s) + Kq(s)$  ha  $n$  zeri e quindi, al variare di  $K$ , il luogo comprende  $n$  rami. Poiché gli zeri figurano a coppie coniugate, il luogo è **simmetrico rispetto all'asse reale**.

**Regola 2 (Comportamento limite e asintoti).** Per  $K = 0$ , il luogo è costituito dagli zeri di  $p(s)$  e quindi dai poli di  $W(s)$ . Per  $K \rightarrow \pm\infty$ ,  $m$  punti tendono agli zeri di  $q(s)$ , che sono gli zeri di  $W(s)$ , mentre (se  $n > m$ )  $n - m$  punti tendono all' $\infty$  lungo  $n - m$  semirette asintotiche che formano due stelle regolari: una per  $K \rightarrow +\infty$  e una per  $K \rightarrow -\infty$ . In dettaglio, le stelle degli asintoti hanno centro sull'asse reale nel punto

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{q_{m-1} - p_{n-1}}{n - m}$$

e inclinazione

$$\begin{aligned} (K \rightarrow +\infty) \quad \varphi_h^+ &= \frac{(2h + 1)\pi}{n - m} = \frac{\pi}{n - m} + \frac{2\pi}{n - m}h, \\ & \hspace{15em} h = 0, 1, \dots, n - m - 1 \\ (K \rightarrow -\infty) \quad \varphi_h^- &= \frac{2h\pi}{n - m} = \frac{2\pi}{n - m}h. \end{aligned}$$

### Dimostrazione formale della Regola 2

Per dimostrare la regola 2 è necessario utilizzare il seguente lemma.

**Lemma 1.6** Sia  $g(s, K) = \sum_i g_i(K)s^i$  un polinomio a coefficienti complessi che dipendono da un parametro reale  $K$ . Supponiamo che  $g_0(K)$  converga a zero per  $K$  che tende all'infinito, che  $g_1(K) = 1$  e che  $|g_i(K)| \leq M$  per  $i \geq 2$  e per ogni  $K$ . Allora  $g(s, K)$  ha una radice che tende a zero.

**Dimostrazione** Si utilizzerà un risultato dell'analisi complessa, il principio dell'argomento, che verrà enunciato nel capitolo dedicato al criterio di Nyquist. Si consideri la funzione razionale

$$F(s) := \frac{g(s, K)}{s}$$

e si consideri la curva  $\gamma = \{\epsilon e^{j\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$  dove abbiamo scelto  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere (lo prendiamo sufficientemente piccolo come verrà precisato in seguito). Consideriamo la curva sul piano complesso  $F(\gamma)$  formata dai punti  $F(s)$  con  $s \in \gamma$ . Si osservi che  $F(s) = 1 + \Delta(s)$  dove  $\Delta(s) = g_0(K)s^{-1} + s \sum_{i \geq 0} g_{i+2}(K)s^i$ . Per  $s \in \gamma$  si ha che

$$|\Delta(s)| \leq \epsilon^{-1}|g_0(K)| + \epsilon \sum_{i \geq 0} |g_{i+2}(K)|\epsilon^i \leq \epsilon^{-1}|g_0(K)| + \frac{M\epsilon}{1-\epsilon}$$

dove abbiamo assunto che  $\epsilon < 1$ . Se prendiamo  $\epsilon \leq \frac{1}{2M+1}$ , allora si ha che il secondo addendo della formula precedente è  $\leq 1/2$ . Inoltre, poichè il coefficiente  $g_0(K)$  tende a zero per  $K$  che tende all'infinito, allora esisterà un  $K(\epsilon)$  tale che per ogni  $K > K(\epsilon)$  si ha  $|g_0(K)| < \epsilon/2$ . Da questo segue che  $|\Delta(s)| < 1$ . Quindi la curva  $F(\gamma)$  è racchiusa in un cerchio di centro 1 e raggio 1 e quindi non può aggirare l'origine. Per il principio dell'argomento, possiamo dedurre che  $F(s)$  ha un numero di zeri pari al numero di poli dentro  $\gamma$  e quindi pari  $g(s, K)$  ha una radice dentro  $\gamma$ . ■

### Convergenza verso le radici di $q(s)$

Dimostriamo ora che  $m$  radici di  $p(s) + Kq(s)$  convergono verso le radici di  $q(s)$ . Sia  $z$  una radice di  $q(s)$  e supponiamo per semplicità che sia una radice semplice. Quindi  $q(s) = (s - z)\bar{q}(s)$ . Consideriamo un cambiamento di variabile (che corrisponde ad una traslazione)  $x = s - z$ . Il polinomio  $p(s) + Kq(s)$  si trasforma nel polinomio nella variabile  $x$

$$f(x) = p(x + z) + Kxq(x + z)$$

i cui coefficienti  $f_i$  che sono funzioni di  $K$ , cioè  $f(x) = \sum_i f_i(K)x^i$ . Se dimostriamo che una radice di  $f(x)$  tende a zero per  $K$  che tende all'infinito, allora abbiamo dimostrato ciò che volevamo. Si osservi che

$$\sum_i f_i(K)x^i = \sum_i p_i(x + z)^i + Kx \sum_i \bar{q}_i(x + z)^i$$

e quindi  $f_i(K) = f'_i + Kf''_i$ , dove  $f'_i$  dipendono dai coefficienti del polinomio  $p(s)$  mentre  $f''_i$  dipendono dai coefficienti del polinomio  $\bar{q}(s)$ . Nota che

$$f_0(K) = \sum_i p_i z^i = p(z)$$

che implica che  $f''_0 = 0$ , mentre

$$f_1(K) = \sum_i ip_i z^{i-1} + K \sum_i \bar{q}_i z^i = \sum_i ip_i z^{i-1} + K\bar{q}(z)$$

Dato che  $\bar{q}(z) \neq 0$ , allora si ha  $f_1'' \neq 0$ . Si consideri infine il polinomio  $g(x) := f(x)/f_1(K)$  e siano  $g_i(K) = f_i(K)/f_1(K)$  i suoi coefficienti. Si noti che  $g_1(K) = 1$  e che

$$g_0(K) = \frac{f_0'}{f_1' + K f_1''}$$

che converge a zero per  $K \rightarrow +\infty$  dato che  $f_1'' \neq 0$ . Inoltre per  $i \geq 2$  si ha che

$$g_i(K) = \frac{f_i' + K f_i''}{f_1' + K f_1''}$$

e quindi questi coefficienti sono limitati in  $K$  per  $K$  sufficientemente grande. Quindi possiamo applicare il lemma precedente e concludere che una radice di  $g(x)$ , e quindi una radice di  $f(x)$ , converge a zero.

### Convergenza verso gli asintoti

Supponiamo che  $n > m$ . Dobbiamo dimostrare che esiste una radice del polinomio

$$p(s) + Kq(s) = 0$$

che tende a

$$z = z(K) = |K|^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{(2h+1)\pi}{n-m}} + \sigma_a$$

quando  $K \rightarrow +\infty$ . Nota preliminarmente che  $(z - \sigma_a)^{n-m} = -K$ . Consideriamo un cambiamento di variabile (che corrisponde ad una traslazione) dipendente da  $K$   $x = s - z$ . Otteniamo così un polinomio  $f(x)$  in  $x$  con coefficienti che sono funzioni di  $K$

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x+z) + Kq(x+z) = \sum_i p_i(x+z)^i + K \sum_i q_i(x+z)^i \\ &= \sum_i p_i(x+z)^i - (z - \sigma_a)^{n-m} \sum_i q_i(x+z)^i. \end{aligned}$$

Se dimostriamo che una radice di  $f(x)$  tende a zero per  $K$  che tende all'infinito, allora abbiamo dimostrato ciò che volevamo.

Si denoti con  $f_i = f_i(z)$  il coefficiente del polinomio  $f(x)$  relativo al termine  $x^i$ . Si osservi che in generale  $f_i(z)$  è un polinomio in  $z$  di grado minore o uguale a  $n - i$ . Inoltre si osservi che  $f_0(z)$  è un polinomio in  $z$  di grado minore o uguale a  $n - 2$ . Infatti si ha che

$$f_0(z) = \sum_i p_i z^i - (z - \sigma_a)^{n-m} \sum_i q_i z^i$$

per cui il coefficiente di grado  $n$  è  $p_n - q_m = 1 - 1 = 0$  mentre il coefficiente di grado  $n - 1$  è  $p_{n-1} - q_{m-1} + (n - m)\sigma_a = 0$  per definizione di  $\sigma_a$ . Si noti inoltre che  $f_1(z)$  è un polinomio in  $z$  di grado a  $n - 1$ . Infatti si ha che

$$f_1(z) = \sum_i i p_i z^{i-1} - (z - \sigma_a)^{n-m} \sum_i i q_i z^{i-1}$$

da cui segue che il coefficiente di grado  $n-1$  è  $np_n - mq_m = n - m \neq 0$ . Si consideri infine il polinomio  $g(x) := f(x)/f_1(z)$  e siano  $g_i = f_i(z)/f_1(z)$  i suoi coefficienti. Si noti che  $g_1(z) = 1$ . Inoltre si osservi che per  $K \rightarrow +\infty$  si ha che anche per  $z \rightarrow +\infty$  e quindi  $g_i(z)$ ,  $i \neq 1$ , converge a zero dato che questi sono il rapporto di due polinomi in  $z$  e i gradi dei polinomi a denominatore sono sempre maggiori dei gradi dei polinomi a numeratore. Quindi possiamo applicare il lemma precedente e concludere che una radice di  $g(x)$ , e quindi una radice di  $f(x)$ , converge a zero.

**Giustificazione intuitiva semplificata della regola 2.** Diamo una giustificazione intuitiva della regola 2 che però non è da considerarsi una dimostrazione matematica.

**Fase.** Per  $s$  grande, si ha  $\angle(s - z_i) \simeq \angle s$ ,  $\angle(s - \bar{z}_i) \simeq \angle s$ . Allora la condizione di fase diventa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - \bar{z}_i) \simeq m\angle s - n\angle s = \\ & = (m - n)\angle s = \begin{cases} (2h + 1)\pi & , \quad K > 0 \\ 2h\pi & , \quad K < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\angle s = \begin{cases} \frac{(2h + 1)}{n - m} \pi & , \quad K \rightarrow +\infty \\ \frac{2h}{n - m} \pi & , \quad K \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

**Centro asintoti.**

$$\begin{aligned} -K &= \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{z}_i)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)} = \frac{s^n - \sum \bar{z}_i s^{n-1} + \dots}{s^m - \sum z_i s^{m-1} + \dots} = \\ &= s^{n-m} [1 - (\sum \bar{z}_i - \sum z_i) s^{-1} + (\dots) s^{-2} + \dots] \simeq \\ &\simeq s^{n-m} [1 - (\sum \bar{z}_i - \sum z_i) s^{-1}]. \end{aligned}$$

Facciamo la radice  $(n-m)$ -esima di ambo i membri (supponiamo  $K > 0$ ).

$$s [1 - (\sum \bar{z}_i - \sum z_i) s^{-1}]^{\frac{1}{n-m}} \simeq |K|^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{(2h+1)\pi}{n-m}}.$$

Inoltre, se  $az$  è piccolo,  $(1 + az)^b = 1 + abz + \dots \simeq 1 + abz$ . Quindi

$$s \left[ 1 - \frac{\sum \bar{z}_i - \sum z_i}{n - m} s^{-1} \right] \simeq |K|^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{(2h+1)\pi}{n-m}}.$$

$$\boxed{s = \frac{\sum \bar{z}_i - \sum z_i}{n - m} + |K|^{\frac{1}{n-m}} e^{j \frac{(2h+1)\pi}{n-m}}.}$$

Analogamente si risolve il caso  $K < 0$ .

**Esempio 1.7** Il sistema in figura 1.7 dove

$$W(s) = \frac{1}{s+1}$$

La formula precedente indica che il luogo positivo ha asintoti con centro in  $\sigma_a = -1$  e angoli  $\varphi_h^+ = \pi$ . Ciò risulta in accordo col luogo positivo illustrato in figura 1.4. Se invece

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

allora la formula precedente indica che il luogo positivo ha asintoti con centro in  $\sigma_a = -1/2$  e angoli  $\varphi_h^+ = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ . Ciò risulta in accordo col luogo positivo illustrato in figura 1.5. Se infine

$$W(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)}$$

allora la formula precedente indica che il luogo positivo ha asintoti con centro in  $\sigma_a = -4/3$  e angoli  $\varphi_h^+ = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ . Ciò risulta in accordo col luogo positivo illustrato in figura 1.6.

**Regola 2'.** Se  $n = m$ , allora il luogo non va ad  $\infty$  per  $K \rightarrow \pm\infty$ . Infatti, al divergere di  $K$ , gli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  tendono agli  $n = m$  zeri di  $q(s)$ . Si osservi invece che in questo caso, per  $K \rightarrow -1$ , gli zeri di  $p(s) + Kq(s)$  diventano  $r$ , dove  $r := \deg(p(s) - q(s))$  è tale che  $0 < r < n$ , e i restanti  $n - r$  vanno ad infinito. Il comportamento per  $K \rightarrow -1$  può essere ridotto al caso, precedentemente considerato, di  $K \rightarrow \pm\infty$  e  $n > m$  in maniera seguente.

Si noti che  $r(s) := q(s) - p(s)$  ha in questo caso grado  $r$  che è strettamente minore di  $n = m$ . Allora

$$p(s) + Kq(s) = p(s) + K(p(s) + r(s)) = (1 + K)p(s) + Kr(s).$$

Tale polinomio ha per  $1 + K \neq 0$  gli stessi zeri di

$$p(s) + \frac{K}{1+K}r(s) = p(s) + \hat{K}r(s),$$

dove  $\hat{K} := \frac{K}{1+K}$ . Si noti che

$$\begin{aligned} \text{se } K \rightarrow -1^+ & \text{ allora } \hat{K} \rightarrow -\infty \\ \text{se } K \rightarrow -1^- & \text{ allora } \hat{K} \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Quindi gli asintoti per  $K \rightarrow 1$  del luogo di  $p(s) + Kq(s)$  coincideranno con gli asintoti per  $\hat{K} \rightarrow \infty$  del luogo di  $p(s) + \hat{K}r(s)$ .

**Esempio 1.8** Vogliamo trovare il luogo negativo di

$$s(s+1)(s+2) + K(s^3 + 3s^2 + 2s + 1) = p(s) + Kq(s)$$

cioè le radici di tale polinomio al variare di  $K < 0$ . Si noti che  $n = m = 3$  e quindi, per  $K = -1$ , si ha una caduta di grado. Sia

$$r(s) = q(s) - p(s) = 1.$$

Quindi  $p(s) + Kq(s)$  ha, per  $K \neq -1$ , gli stessi zeri di

$$p(s) + \hat{K}r(s) = s(s+1)(s+2) + \hat{K},$$

dove  $\hat{K} := \frac{K}{1+K}$ . Si ottiene così che per  $K \rightarrow -1$  il luogo tenderà all'infinito lungo asintoti con centro  $\sigma_a = (-1 - 2)/3 = -1$  e angoli (vedi figura 1.10)

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} & \text{per } K \rightarrow -1^- \\ 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} & \text{per } K \rightarrow -1^+. \end{array}$$

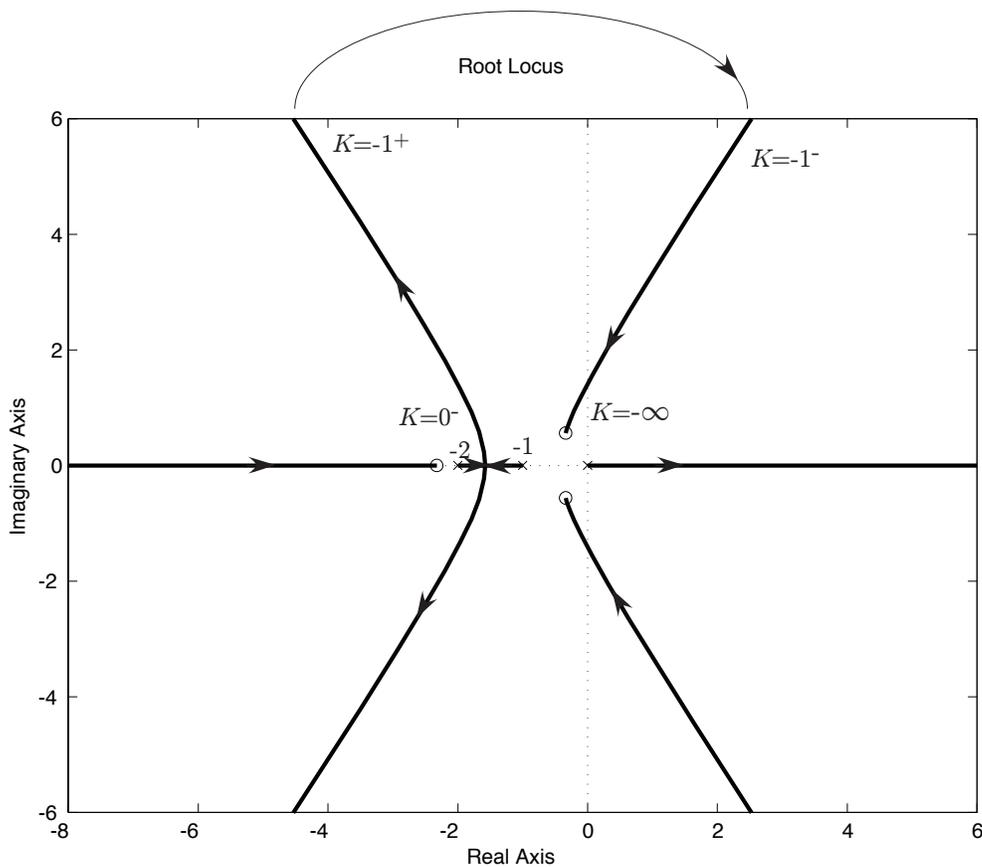


Figure 1.10: Luogo negativo di  $s(s+1)(s+2) + K(s^3 + 3s^2 + 2s + 1)$

**Regola 3 (Porzione dell'asse reale appartenente al luogo).** Se  $s = \sigma$  è reale, nell'equazione delle fasi

$$\sum_{i=1}^m \angle(\sigma - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(\sigma - \bar{z}_i) = \begin{cases} (2h+1)\pi & , \quad K > 0 \\ 2h\pi & , \quad K < 0 \end{cases}$$

- Due zeri o due poli complessi coniugati danno contributo globalmente nullo alla fase.
- Gli zeri e i poli reali danno contributo nullo alla fase se si trovano a sinistra di  $\sigma$  e contributo pari a  $\pi$  se sono a destra di  $\sigma$  (vedi figura 1.11).

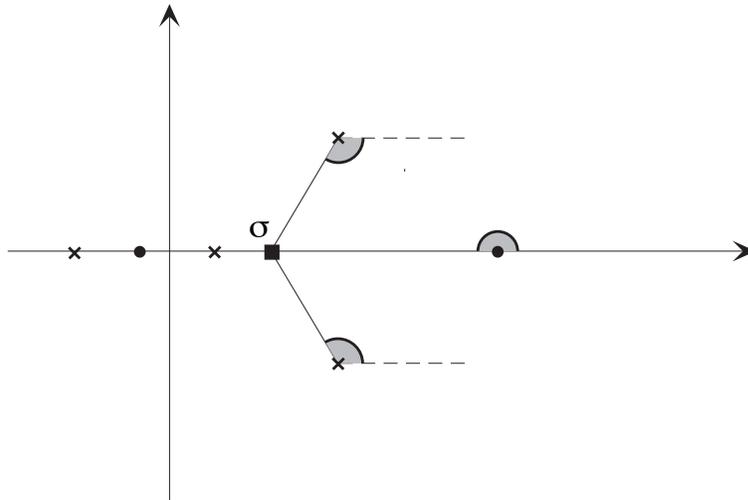


Figure 1.11: Gli angoli formati da un punto appartenente all'asse reale e i poli e gli zeri del luogo.

1. Se  $K > 0$ , la condizione affinché  $\sigma \in \mathbb{R}$  appartenga al luogo delle radici è che

$$\sum_{\substack{\text{zeri reali} \\ \text{a destra di } \sigma}} \pi - \sum_{\substack{\text{poli reali} \\ \text{a destra di } \sigma}} \pi = \left( \begin{array}{c} \text{numero zeri reali} \\ \text{a destra di } \sigma \end{array} - \begin{array}{c} \text{numero poli reali} \\ \text{a destra di } \sigma \end{array} \right) \pi = (2h+1)\pi,$$

ovvero, se e solo se, il numero totale di zeri e poli reali **al finito** a destra di  $\sigma$  è dispari (contando anche le molteplicità).

2. Se  $K < 0$  (luogo negativo), è chiaro che la condizione per cui  $\sigma \in \mathbb{R}$  appartenga al luogo è che, viceversa, il numero totale di zeri e poli reali **al finito** a destra di  $\sigma$  sia pari.

**Regola 4: (Zeri doppi)** Se due zeri reali di  $p(s)$  [segnati con un crocetta  $\times$ ] non sono separati da uno zero reale di  $q(s)$  [segnato con un pallino  $\circ$ ] (o, viceversa, se due zeri reali di  $q(s)$  non sono separati da uno zero reale di  $p(s)$ ), allora il segmento che li congiunge appartiene interamente al luogo positivo o a quello negativo. Supponiamo ad esempio di avere due zeri  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$  di  $p(s)$  sull'asse reale non separati da zeri di  $q(s)$  e inoltre supponiamo che il segmento tra  $\bar{z}_1$  e  $\bar{z}_2$  appartenga al luogo positivo. Allora, quando  $K$  crescerà da 0 a  $+\infty$ , due rami si dipartiranno, uno da  $\bar{z}_1$  verso destra, uno da  $\bar{z}_2$  verso sinistra (vedi figura 1.12). Per qualche  $K$  essi si incontreranno in un punto  $\bar{s}$ , che sarà pertanto uno zero doppio di  $p(s) + Kq(s)$ . Poi i due rami continuano, al crescere di  $K$ , come rami corrispondenti a zeri complessi coniugati di  $p(s) + Kq(s)$ .

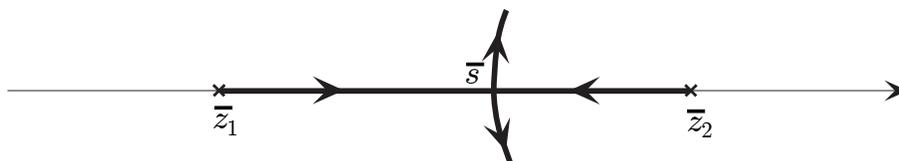


Figure 1.12: Punti doppi sull'asse reale.

Il punto  $\bar{s}$  di diramazione può essere ottenuto imponendo che esso sia uno zero reale doppio di  $p(s) + Kq(s)$  per qualche valore di  $K$ . Per trovare gli zeri doppi di un polinomio si può usare il lemma seguente, del quale non daremo la dimostrazione.

**Lemma 1.9** Sia  $f(s)$  un polinomio. Allora  $\bar{s} \in \mathbb{C}$  è zero avente molteplicità  $l$  di  $f(s)$  se e solo se

$$f(\bar{s}) = f'(\bar{s}) = \dots = f^{(l-1)}(\bar{s}) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(l)}(\bar{s}) \neq 0.$$

Usando il precedente lemma possiamo dedurre che gli zeri doppi di  $p(s) + Kq(s)$  coincidono con gli zeri comuni dei polinomi:

$$\begin{cases} p(s) + Kq(s) = 0 \\ \frac{dp(s)}{ds} + K\frac{dq(s)}{ds} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Si noti che il precedente sistema consiste in quattro equazioni reali in tre incognite reali e quindi genericamente non ammetterebbe soluzione. In realtà, se ipotizziamo che  $s \in \mathbb{R}$ , cioè se cerchiamo solo le soluzioni reali del precedente sistema di equazioni, allora due equazioni sono automaticamente soddisfatte (le parti immaginarie sono automaticamente nulle) e quindi ci si riduce a due equazioni reali in due incognite reali ( $K$  e  $s$ ) che quindi può ammettere soluzione. In definitiva questo ragionamento dimostra che "spesso" esistono punti doppi reali, mentre "molto raramente" esistono punti doppi non reali.

Un metodo equivalente di trovare i punti doppi del luogo è calcolare gli zeri della funzione razionale

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{p(s)}{q(s)} \right) = \frac{q(s) \frac{dp(s)}{ds} - p(s) \frac{dq(s)}{ds}}{q^2(s)} = 0.$$

Infatti, se  $\bar{s}$  è zero di tale funzione, allora, denotando

$$\begin{aligned} q'(s) &= \frac{dq(s)}{ds} \\ p'(s) &= \frac{dp(s)}{ds}, \end{aligned}$$

si ottiene che  $q(\bar{s})p'(\bar{s}) = p(\bar{s})q'(\bar{s})$  e quindi  $K := -\frac{q(\bar{s})}{p(\bar{s})}$  sarà soluzione delle (1.1). Viceversa se  $\bar{s}, K$  sono tali che:

$$\begin{cases} p(\bar{s}) + Kq(\bar{s}) = 0 \\ p'(\bar{s}) + Kq'(\bar{s}) = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

allora, moltiplicando la prima equazione per  $q'(\bar{s})$  e la seconda per  $q(\bar{s})$  e sottraendo si ottiene:

$$p(\bar{s})q'(\bar{s}) - p'(\bar{s})q(\bar{s}) = 0,$$

da cui si ottiene che  $\bar{s}$  è uno zero reale della funzione  $\frac{d}{ds} \left( \frac{p(s)}{q(s)} \right)$ .

La formula  $\frac{d}{ds} \left( \frac{p(s)}{q(s)} \right)$  per determinare i punti doppi reali può essere interpretata in modo grafico (vedi figura 1.13).

Supponiamo di avere due zeri  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  reali di  $p(s)$  non separati da zeri reali di  $q(s)$ . Il numero reale  $\sigma$  compreso tra  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  appartiene al luogo e quindi  $K = -\frac{p(\sigma)}{q(\sigma)} = K(\sigma)$  ci dà il valore di  $K$  in funzione della posizione di  $\sigma$ . Per ogni valore di  $K$  esistono due valori di  $\sigma$  che portano a  $K(\sigma) = K$ , eccetto che per il punto doppio che corrisponderà a un solo valore di  $\sigma$  e coinciderà col massimo (o minimo se il luogo è negativo) di  $K(\sigma)$ . Perciò i punti doppi reali si possono determinare trovando le soluzioni reali dell'equazione

$$\frac{d}{d\sigma} K(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} \left[ -\frac{p(\sigma)}{q(\sigma)} \right] = 0.$$

**Osservazione 1.10** Una volta trovati i punti doppi  $\bar{s}$  si deve verificare che tali punti doppi appartengono al luogo verificando che

$$K = -\frac{p(\bar{s})}{q(\bar{s})}$$

sia un numero reale. In tal caso  $\bar{s}$  apparterrà al luogo positivo se  $K = -\frac{p(\bar{s})}{q(\bar{s})} > 0$  mentre apparterrà al luogo negativo se  $K = -\frac{p(\bar{s})}{q(\bar{s})} < 0$ .

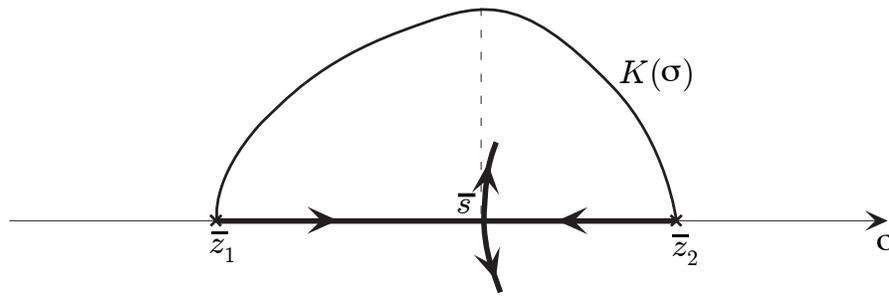


Figure 1.13: I punti doppi sull'asse reale come massimi della funzione  $K(\sigma)$ .

**Esempio 1.11** Determiniamo il luogo delle radici di

$$(s + 2)(s + 3) + K(s + 5) = 0$$

per  $K > 0$  (luogo positivo).

Punti di doppi:

$$\begin{cases} p(s) + Kq(s) = (s^2 + 5s + 6) + K(s + 5) = 0 \\ \frac{dp}{ds} + K \frac{dq}{ds} = 2s + 5 + K = 0 \\ K = -2s - 5 \end{cases}$$

$$s^2 + 5s + 6 + (-2s - 5)(s + 5) = s^2 + 5s + 6 - 2s^2 - 15s - 25 = -s^2 - 10s - 19 = 0$$

$$s_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 19} = -5 \pm \sqrt{6}.$$

Si verifica che sia  $-5 - \sqrt{6}$  che  $-5 + \sqrt{6}$  stanno nel luogo positivo, dato che i due punti doppi sono assunti per

$$K = 5 \mp 2\sqrt{6}.$$

Alternativamente si può derivare rispetto a  $s$  la funzione

$$K(s) = -\frac{s^2 + 5s + 6}{s + 5}$$

ottenendo

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-(2s+5)(s+5) + (s^2+5s+6)}{(s+5)^2} = \frac{-s^2-10s-19}{(s+5)^2}.$$

Se poniamo  $\frac{dK}{ds} = 0$ , otteniamo lo stesso risultato ottenuto sopra. Il luogo finale è illustrato in figura 1.14.

**Ulteriori regole per il tracciamento del luogo.** Riportiamo ora altre regole, di impiego meno frequente, che possono risultare utili per risolvere tracciamenti più complessi.

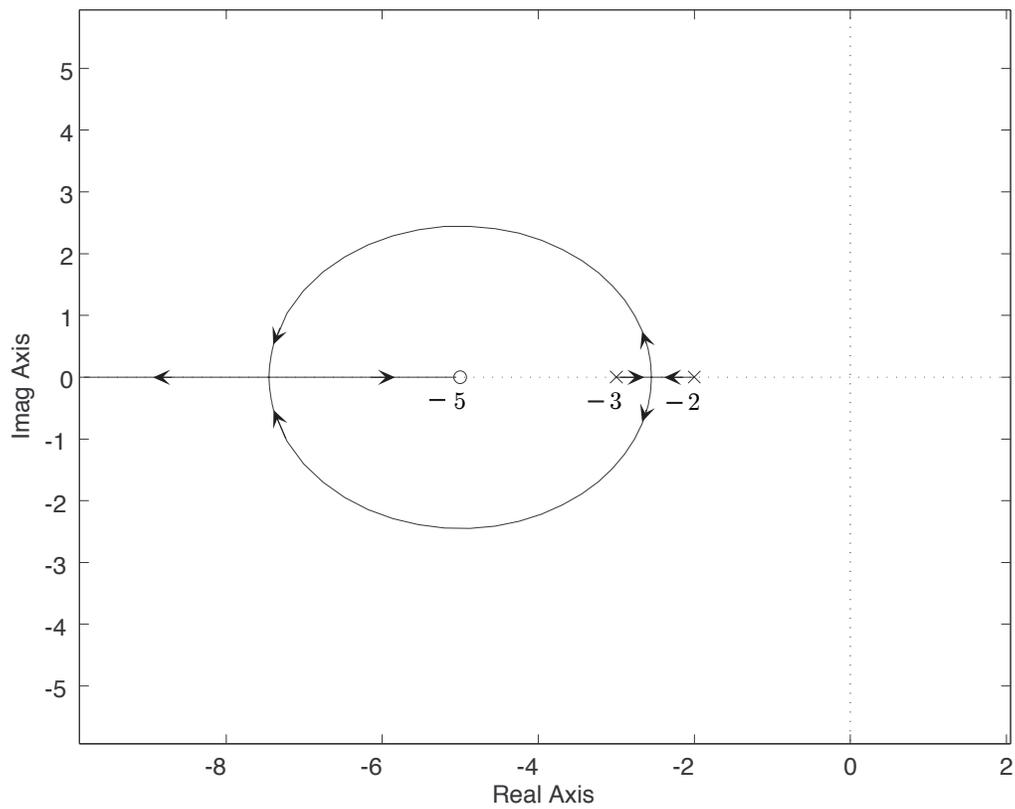


Figure 1.14: Il luogo positivo di  $(s + 2)(s + 3) + K(s + 5) = 0$ .

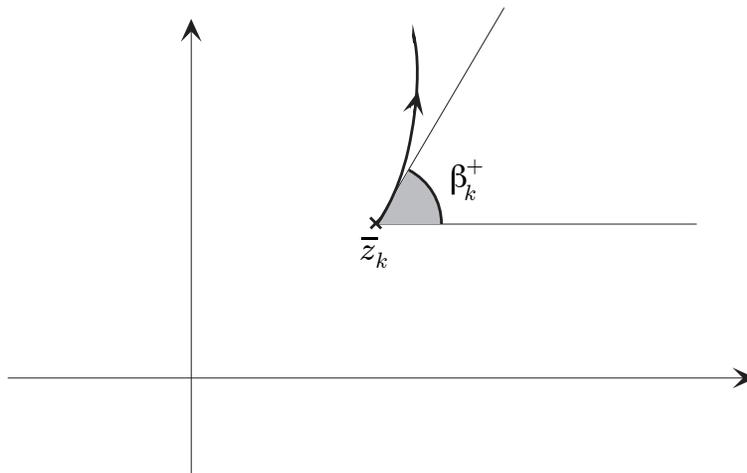


Figure 1.15: Angoli di uscita dai poli nel luogo positivo.

**Regola 5: (Angolo di uscita dai poli e dagli zeri)** Vogliamo determinare ora l'andamento del luogo nell'intorno del polo semplice  $\bar{z}_k$  (zero semplice di  $p(s)$ ), per  $K$  prossimo a zero.

Consideriamo la condizione di fase per il luogo positivo ( $K > 0$ )

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s - \bar{z}_i) = (2h + 1)\pi$$

$$\angle(s - \bar{z}_k) = \sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(s - \bar{z}_i) + (2h + 1)\pi,$$

e chiamiamo  $\beta_k^+$  l'angolo di uscita del luogo da  $\bar{z}_k$ . Allora per  $s$  molto vicino a  $\bar{z}_k$  (quindi  $K$  prossimo a zero) otteniamo

$$\beta_k^+ = \sum_{i=1}^m \angle(\bar{z}_k - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(\bar{z}_k - \bar{z}_i) + \pi,$$

dove abbiamo sostituito  $(2h + 1)\pi$  con  $\pi$  perché al variare di  $h$  otteniamo in realtà un solo angolo. Per quanto riguarda il luogo negativo, attraverso lo stesso ragionamento si ottiene la formula (vedi figura 1.16)

$$\beta_k^- = \sum_{i=1}^m \angle(\bar{z}_k - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(\bar{z}_k - \bar{z}_i) = \beta_k^+ - \pi.$$

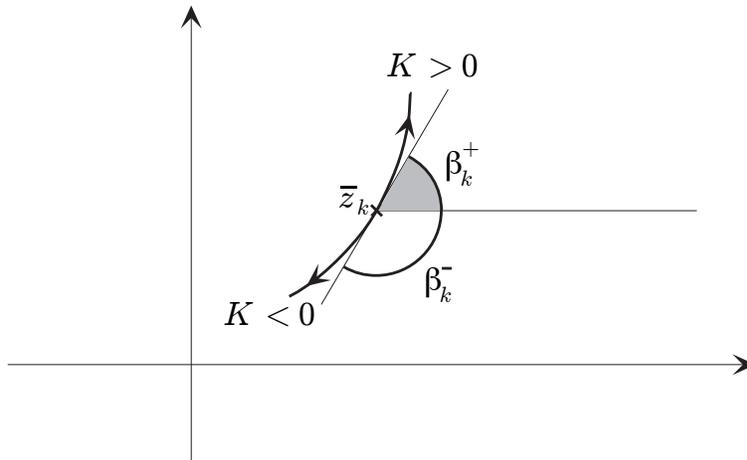


Figure 1.16: Angoli di uscita dai poli nel luogo positivo e negativo.

Infine l'andamento del luogo in prossimità di uno zero  $z_k$  di  $q(s)$  (quindi per valori di  $K \rightarrow +\infty$ ) si ottiene seguendo gli stessi ragionamenti. Denotando con  $\alpha_k^+$  l'angolo

di entrata del luogo positivo in  $z_k$  ( $K \rightarrow +\infty$ ) mentre con  $\alpha_k^-$  l'angolo di entrata del luogo negativo in  $z_k$  ( $K \rightarrow -\infty$ ), si ottengono le formule

$$\alpha_k^+ = \sum_{i=1}^n \angle(z_k - \bar{z}_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \angle(z_k - z_i) + \pi$$

$$\alpha_k^- = \sum_{i=1}^n \angle(z_k - \bar{z}_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \angle(z_k - z_i).$$

Attraverso le stesse tecniche si ottengono le seguenti formule generali per gli angoli di ingresso e di uscita valide anche per poli e zeri multipli

$$\beta_{k,h}^+ = \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^m \angle(\bar{z}_k - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(\bar{z}_k - \bar{z}_i) + \pi \right) + \frac{2\pi}{l} h$$

$$\beta_{k,h}^- = \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^m \angle(\bar{z}_k - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(\bar{z}_k - \bar{z}_i) \right) + \frac{2\pi}{l} h$$

$$\alpha_{k,h}^+ = \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^n \angle(z_k - \bar{z}_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \angle(z_k - z_i) + \pi \right) + \frac{2\pi}{l} h$$

$$\alpha_{k,h}^- = \frac{1}{l} \left( \sum_{i=1}^n \angle(z_k - \bar{z}_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \angle(z_k - z_i) \right) + \frac{2\pi}{l} h,$$

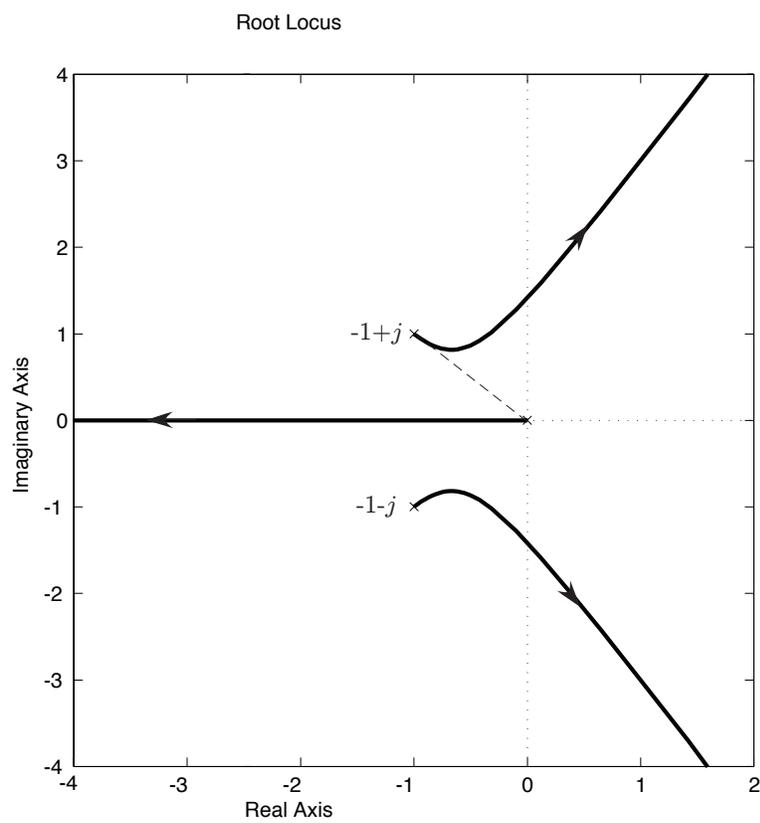
dove  $l$  è la molteplicità dello zero o del polo e dove  $h = 0, 1, \dots, l-1$ .

**Esempio 1.12** Vogliamo trovare il luogo positivo di

$$s(s^2 + 2s + 2) + K = p(s) + Kq(s)$$

Si noti che  $p(s)$  ha radici in  $0, -1 \pm j$  e quindi il centro degli asintoti è  $\sigma_a = -2/3$  e gli angoli sono  $\varphi_h^+ = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$ . Infine, applicando la regola appena vista si ottiene che l'angolo di uscita dal polo in  $-1 + j$  è dato da (vedi figura 1.17)

$$\beta = \pi - \angle(-1 + j) - \angle(-1 + j - (-1 - j)) = \pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

Figure 1.17: Luogo negativo di  $s(s^2 + 2s + 2) + K$

**Regola 6: (Punti multipli del luogo)** Generalizzando la situazione di due rami del luogo che si incontrano in punti doppi corrispondenti a doppi  $p(s) + Kq(s)$ , può avvenire che  $l$  rami vadano ad incontrarsi tutti in un solo punto di molteplicità  $l$  che corrisponde a uno zero di molteplicità  $l$  del polinomio  $p(s) + Kq(s)$ . Generalizzando quanto detto per i punti doppi, i punti multipli di ordine  $l$  si ottengono determinando  $s$  e  $K$  tali che

$$\begin{aligned}
 p(s) + Kq(s) &= 0 \\
 \frac{dp(s)}{ds} + K\frac{dq(s)}{ds} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \frac{d^{l-1}p(s)}{ds^{l-1}} + K\frac{d^{l-1}q(s)}{ds^{l-1}} &= 0 \\
 \frac{d^l p(s)}{ds^l} + K\frac{d^l q(s)}{ds^l} &\neq 0.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Quando si verifica la presenza di un punto multiplo del luogo con molteplicità  $l$ , gli  $l$  rami entranti nel punto e gli  $l$  rami uscenti del punto sono alternati e divisi da  $2l$  angoli tutti pari a  $\frac{\pi}{l}$  (vedi figura 1.18).

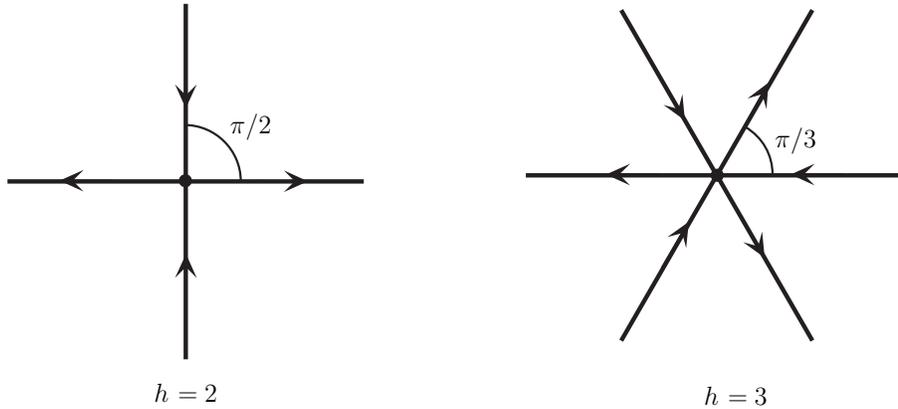


Figure 1.18: Gli angoli di uscita dai punti multipli nel caso di punti doppi o tripli.

**Dimostrazione** Supponiamo che  $(\bar{s}, \bar{K})$  risolvono il sistema di equazioni (1.3). Si osservi che, definendo  $f(s) = p(s) + \bar{K}q(s)$ , si ottiene

$$p(s) + Kq(s) = f(s) + (K - \bar{K})q(s).$$

Inoltre le equazioni (1.3) in  $(\bar{s}, \bar{K})$  indicano che le derivate di  $f(s)$  valutate in  $\bar{s}$ . Ciò implica che  $\bar{s}$  è una radice multipla di ordine  $l$  di  $f(s)$ . Quindi

$$f(s) = (s - \bar{s})^l g(s)$$

per qualche polinomio  $g(s)$  tale che  $g(\bar{s}) \neq 0$ . Possiamo concludere che

$$p(s) + Kq(s) = (s - \bar{s})^l g(s) + (K - \bar{K})q(s) \quad (1.4)$$

Le radici  $s$  dell'equazione  $p(s) + Kq(s) = 0$  coincidono con le soluzioni dell'equazione

$$(s - \bar{s})^l = -(K - \bar{K}) \frac{q(s)}{g(s)}.$$

Questa equazione implica la seguente relazione sulle fasi

$$l\angle(s - \bar{s}) = \angle(K - \bar{K}) + \angle q(s) - \angle g(s) + 2(h + 1)\pi \quad h \in \mathbb{Z}$$

Quindi, per  $K > \bar{K}$ , si ha che

$$\angle(s - \bar{s}) = \frac{\angle q(s) - \angle g(s)}{h} + \frac{2\pi(h + 1)}{l}.$$

Per ottenere gli angoli di uscita  $\alpha_h^+$  dal punto multiplo  $\bar{s}$  basta calcolare  $\angle(s - \bar{s})$  per  $s \rightarrow \bar{s}$

$$\alpha_h^+ = \frac{\angle q(\bar{s}) - \angle g(\bar{s})}{h} + \frac{2\pi(h + 1)}{l} \quad h = 0, 1, \dots, l - 1.$$

Si osservi che  $q(\bar{s}) \neq 0$  e  $g(\bar{s}) \neq 0$  e quindi si possono definire le fasi di questi numeri complessi. Per  $K < \bar{K}$ , si ha che gli angoli di uscita  $\alpha_h^-$  dal punto multiplo  $\bar{s}$  sono

$$\alpha_h^- = \frac{\angle q(\bar{s}) - \angle g(\bar{s})}{h} + \frac{2\pi h}{l} \quad h = 0, 1, \dots, l - 1.$$

■

**Regola 7: (Attraversamento asse immaginario)** Una informazione molto importante connessa al luogo delle radici è dato dai punti nei quali il luogo attraversa l'asse immaginario e i valori di  $K$  per i quali tale attraversamento avviene. Il metodo più efficace per ottenere questa informazione è attraverso l'utilizzo della tabella di Routh. In effetti la presenza di due zeri immaginari complessi coniugati può essere rilevata attraverso la tabella di Routh perché essa porta all'annullamento di una riga della tabella.

**Esempio 1.13** Sia

$$W(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}.$$

Vogliamo tracciare il luogo dei poli del sistema in retroazione unitaria al variare di  $K \geq 0$ . Si tratta quindi di trovare gli zeri di  $s(s + 1)(s + 2) + K = 0$  al variare di  $K \geq 0$ .

Asintoti:

$$\sigma_a = \frac{0 + (-1) + (-2)}{3} = -1$$

$$\varphi_h^+ = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}h.$$

Punti doppi:

$$\begin{cases} s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \\ 3s^2 + 6s + 2 = 0 \end{cases}$$

$$s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = -1 \pm \sqrt{1/3}.$$

Attraversamento asse immaginario: Tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & \frac{6-K}{3} & \\ 0 & K & \end{array}$$

Per  $K = 6$  la riga 1 è nulla e quindi il polinomio  $3s^2 + 6$  (relativo alla riga precedente) dà gli zeri immaginari  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$ . Il luogo delle radici risultante è mostrato in figura 1.19.

**Esempio 1.14** Tracciamo il luogo delle radici di

$$s(s+4)(s^2+4s+5) + K = 0$$

cioè di

$$s^4 + 8s^3 + 21s^2 + 20s + K = 0.$$

Si noti che  $s^2 + 4s + 5$  ha zeri  $\bar{z}_{1,2} = -2 \pm j$ .

Asintoti:

$$\sigma_a = \frac{0 + (-4) + (-4)}{4} = -2$$

$$\varphi_h^+ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}h.$$

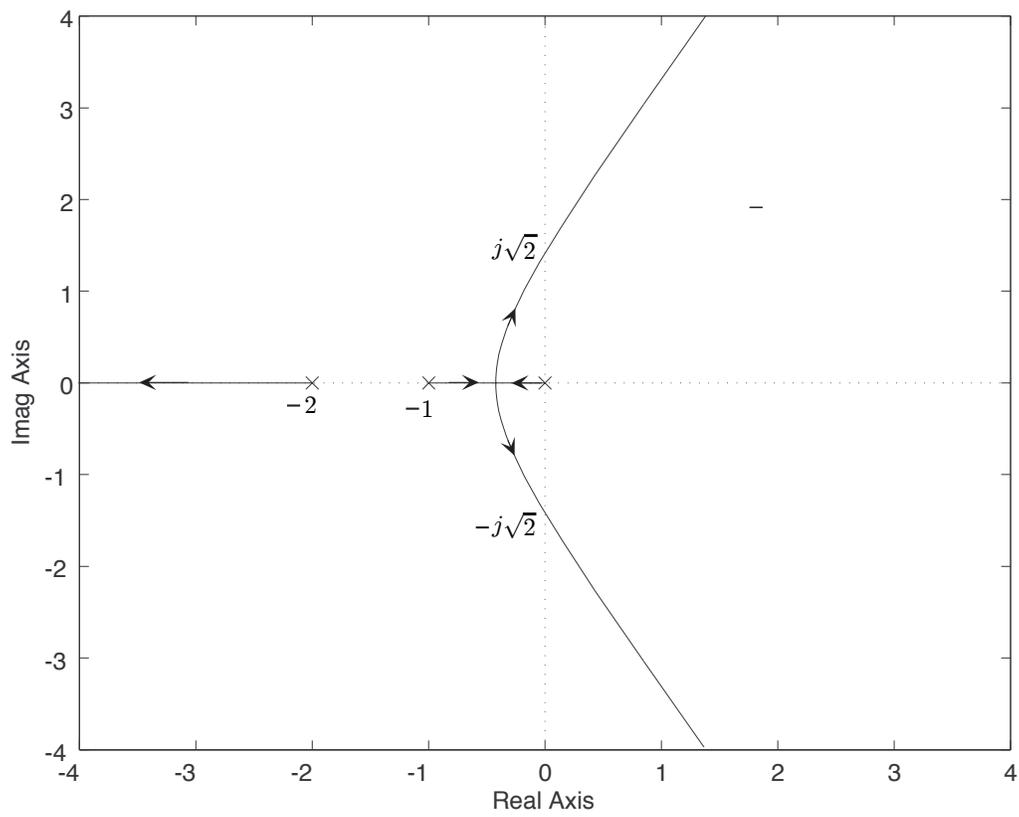
Punti multipli:

$$\begin{cases} s(s+4)(s^2+4s+5) + K = 0 \\ 4s^3 + 24s^2 + 42s + 20 = 0 \end{cases}.$$

I punti doppi coincidono con gli zeri del secondo polinomio.

Per simmetria ci si può aspettare che  $s = -2$  sia punto doppio e che quindi sia uno zero di  $4s^3 + 24s^2 + 42s + 20$ . Infatti  $4(-2)^3 + 24(-2)^2 + 42(-2) + 20 = 0$ . Se dividiamo  $4s^3 + 24s^2 + 42s + 20$  per  $s + 2$  otteniamo la fattorizzazione

$$4s^3 + 24s^2 + 42s + 20 = (s + 2)(4s^2 + 16s + 10)$$

Figure 1.19: Il luogo positivo di  $s(s + 1)(s + 2) + K = 0$

e quindi gli altri due punti doppi sono gli zeri di  $s^2 + 4s + 5/2$ , cioè  $s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3/2}$ .

I punti di attraversamento dell'asse immaginario si trovano attraverso la tabella di Routh

4	1	21	$K$
3	8	20	
2	$\frac{37}{2}$	$K$	
1	$\frac{370-8K}{37/2}$		
0	$K$		

Allora per  $K = \frac{185}{4}$  una riga si annulla e quindi gli zeri di polinomio  $\frac{37}{2}s^2 + \frac{370}{8} = 0$ ,  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{5}{2}}$  forniscono gli attraversamenti dell'asse immaginario. Il luogo risultante è mostrato nella figura 1.20.

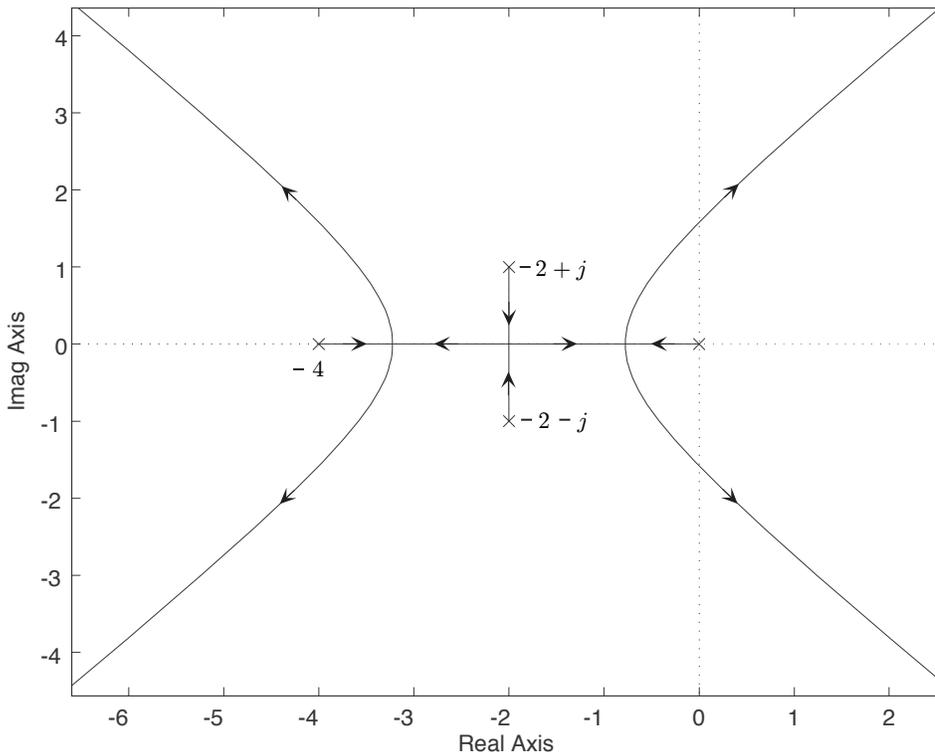


Figure 1.20: Il luogo positivo di  $s(s + 4)(s^2 + 4s + 5) + K = 0$

Consideriamo il luogo di

$$s(s + 4)(s^2 + 4s + 8) + K = 0$$

cioè di

$$s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K = 0.$$

Calcolo dei punti multipli

$$\begin{array}{l|l} \frac{d}{ds} & 4s^3 + 24s^2 + 48s + 32 = 0 \\ \frac{d^2}{ds^2} & 12s^2 + 48s + 48 = 0 \\ \frac{d^3}{ds^3} & 24s + 48 = 0 \end{array} \quad s = -2 \quad \text{soddisfa tutte e tre le equazioni.}$$

Infatti il primo polinomio si può riscrivere  $4s^3 + 24s^2 + 48s + 32 = 4(s+2)^3$ . Quindi in questo caso si ha un punto quadruplo in  $s = -2$ . Il luogo risultante è mostrato nella figura 1.21.

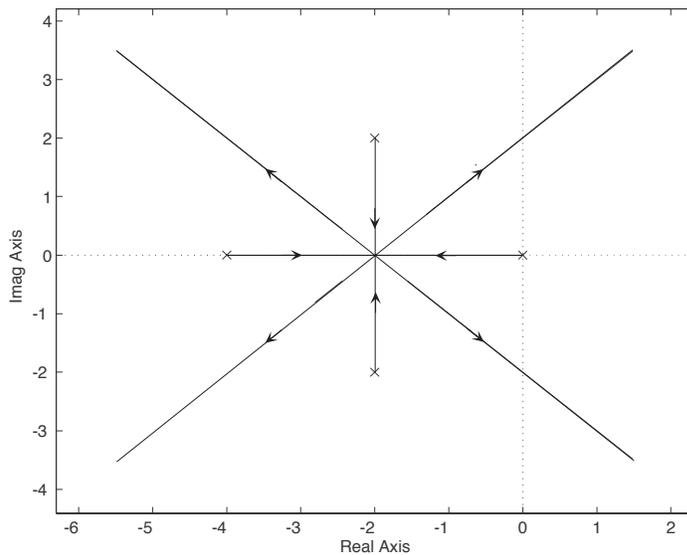


Figure 1.21: Il luogo positivo di  $s(s+4)(s^2+4s+8) + K = 0$

Consideriamo infine il luogo di

$$s(s+4)(s^2+4s+10) + K = 0.$$

Si ottiene che i punti doppi sono dati dagli zeri di

$$\frac{d}{ds}[s(s+4)(s^2+4s+10)] = 4s^3 + 24s^2 + 52s + 40.$$

Uno di questi è  $s = -2$ . Per trovare gli altri due basta dividere per  $s+2$  da cui si ottiene altri due punti doppi  $s_{12} = -2 \pm j$ . Essendo numeri complessi, è necessario verificare che i corrispondenti  $K$  sono reali. In questo caso si può verificare che tali  $K$  sono proprio reali. Il luogo risultante è mostrato nella figura 1.21.

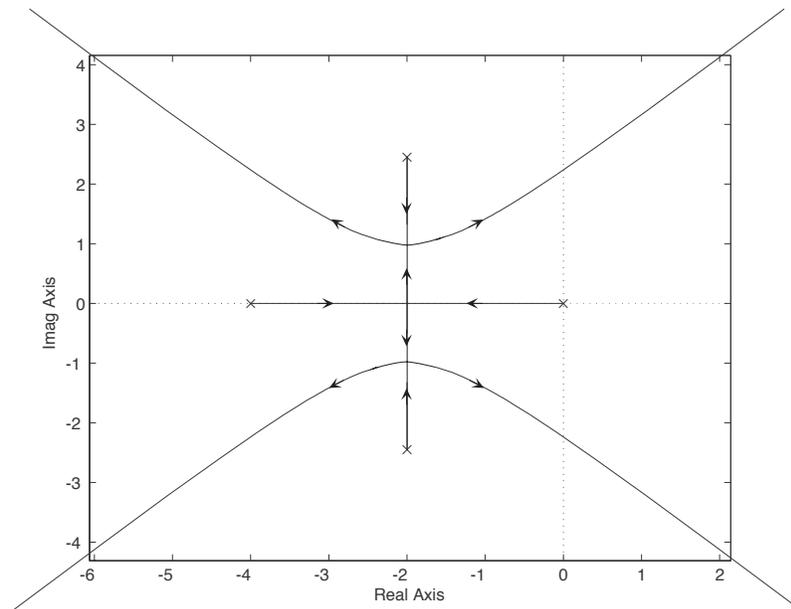


Figure 1.22: Il luogo positivo di  $s(s+4)(s^2+4s+10) + K = 0$

### 1.3 Stabilità condizionata

Studiando il luogo delle radici risulta evidente che esistono esempi nei quali il sistema retroazionato risulta stabile per ogni  $K > 0$  o altri esempi in cui invece si ha la stabilità solo per particolari valori di  $K > 0$ . Quest'ultima situazione è detta di *stabilità condizionata*. Analizziamo varie situazioni con dettaglio.

1. **Stabilità per  $K > 0$**  In questa situazione si ha che il sistema non retroazionato è già stabile e quindi con la retroazione qui si vogliono ottenere altri obiettivi, come ad esempio il miglioramento del comportamento a regime o al transitorio ecc. Si veda ad esempio il luogo di  $(s+2)(s+3) + K(s+5)$ .
2. **Stabilità per  $K \geq K_{min}$**  In questa situazione la retroazione serve anche a stabilizzare il sistema. Questo obiettivo può essere raggiunto attraverso un guadagno sufficientemente alto. Questa situazione si realizza
  - (i) se gli zeri di  $q(s)$  sono stabili e se  $\deg p(s) = \deg q(s)$ . Infatti in questo caso abbiamo che per  $K \rightarrow +\infty$ , gli  $n$  rami del luogo tendono agli zeri stabili di  $q(s)$ . Si consideri ad esempio il luogo relativo al polinomio  $(s-2)(s-3) + K(s+5)(s+1)$ .
  - (ii) se gli zeri di  $q(s)$  sono stabili e se  $\deg p(s) = \deg q(s) + 1$ . Infatti in questo caso abbiamo che per  $K \rightarrow +\infty$ ,  $n-1$  rami del luogo tendono agli zeri stabili di  $q(s)$  mentre un ramo tende a  $-\infty$  lungo l'asse reale che costituisce un asintoto. Si consideri ad esempio il luogo relativo al polinomio  $(s-2)(s-3) + K(s+5)$ .

- 3. Stabilità per  $K \in [0, K_{max}]$**  Questa situazione si verifica quando  $q(s)$  ha zeri instabili o quando  $\deg p(s) \geq \deg q(s) + 3$ . In questo caso un guadagno troppo elevato può portare alla instabilità del sistema a catena chiusa. Si veda ad esempio il luogo del polinomio  $s(s+1)(s+2) + K$ .
- 4. Stabilità  $K \in [K_{min}, K_{max}]$**  In questa situazione, sia un guadagno troppo alto che un guadagno troppo basso porta ad instabilità. Si consideri ad esempio il polinomio  $(s-1)(s+2)(s+4) + K = 0$  che è di Hurwitz se e solo se  $8 < K < 18$ .

## 1.4 Presenza di zeri in particolari regioni del piano complesso

Abbiamo mostrato nei capitoli precedenti che, imporre che il transitorio di un sistema soddisfi a certi vincoli equivale a imporre che i poli dominanti della funzione di trasferimento appartengano a particolari regioni del piano complesso. Ad esempio abbiamo visto che il tempo di assestamento è legato al fatto che i poli dominanti della funzione di trasferimento stiano a sinistra di una retta parallela all'asse immaginario.

In quest'ambito è interessante notare che attraverso la tabella di Routh non è solo possibile determinare i valori di  $K$  per i quali il polinomio

$$p(s) + Kq(s)$$

ha zeri nel semipiano  $\text{Re } s < 0$ , ma anche, più in generale, si riesce a determinare i  $K$  per i quali  $p(s) + Kq(s)$  ha zeri in un semipiano  $\text{Re } s < \alpha$ , dove  $\alpha$  è un numero reale qualsiasi. Questo corrisponde a imporre una condizione sul tempo di assestamento della risposta a gradino.

Si noti infatti che un polinomio  $f(s)$  ha zeri un  $\text{Re } s < \alpha$  se e solo se il polinomio  $f(s + \alpha)$  ha zeri un  $\text{Re } s < 0$ . Ciò perché il polinomio  $f(s + \alpha)$  ha zeri spostati di  $|\alpha|$  (a sinistra se  $\alpha > 0$  e a destra se  $\alpha < 0$ ) rispetto agli zeri di  $f(s)$ . Tale spostamento farà sì che gli zeri di  $f(s)$  saranno a sinistra dell'asse  $\text{Re } s = \alpha$  se e solo se gli zeri di  $f(s + \alpha)$  saranno a sinistra dell'asse  $\text{Re } s = 0$ .

Quindi, per verificare per quali valori di  $K$  il polinomio

$$p(s) + Kq(s)$$

ha zeri nel semipiano  $\text{Re } s < \alpha$  sarà sufficiente applicare il criterio di Routh Hurwitz al polinomio  $p(s + \alpha) + Kq(s + \alpha)$ . In altre parole, si può dimostrare che

$$\{K \mid \text{zeri}[p(s) + Kq(s)] \in \text{Re } s < \alpha\} = \{K \mid \text{zeri}[p(s + \alpha) + Kq(s + \alpha)] \in \text{Re } s < 0\}.$$

**Esempio 1.15** Vogliamo determinare i valori di  $K$  tali che il polinomio

$$s(s+3)(s+9) + K$$

abbia zeri in  $\operatorname{Re} s < -1$ . Si tratta di sostituire  $s - 1$  al posto di  $s$ . Otteniamo così il polinomio

$$(s-1)(s+2)(s+8) + K = s^3 + 9s^2 + 6s - 16 + K$$

la cui tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & K-16 \\ 1 & \frac{70-K}{9} & \\ 0 & K-16 & \end{array}$$

e quindi si ha zeri in  $\operatorname{Re} s < -1$  se e solo se  $16 < K < 70$ . Il luogo di  $s(s+3)(s+9) + K$  è mostrato in figura 1.23.

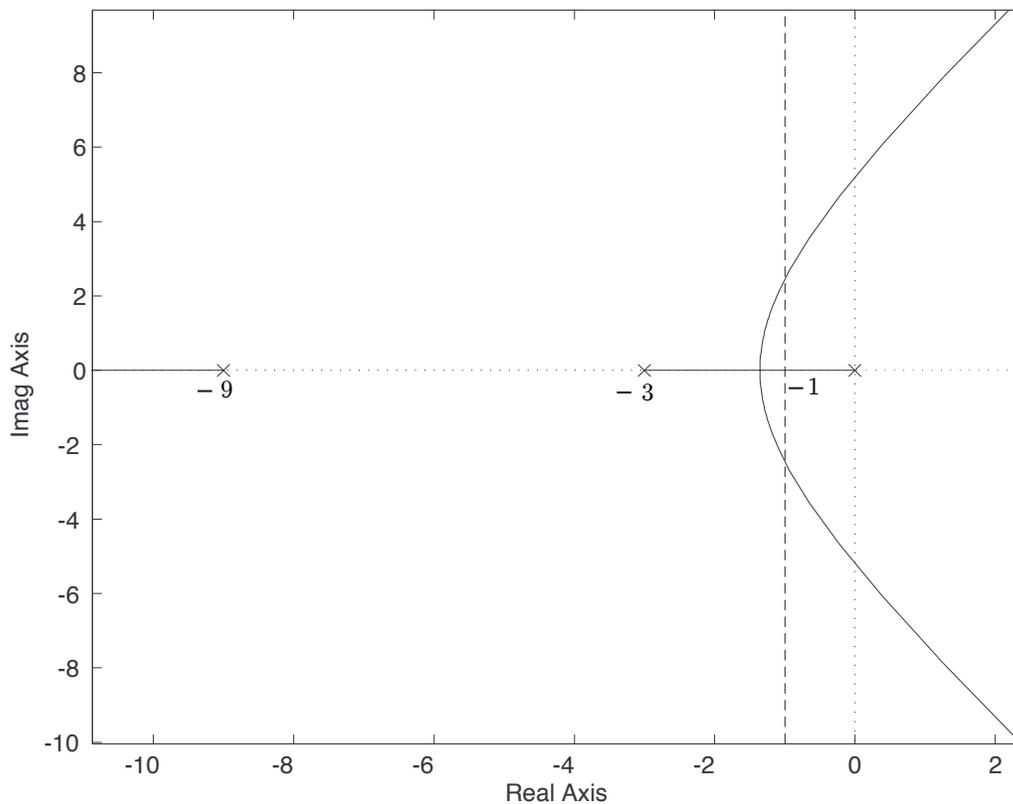


Figure 1.23: Il luogo positivo di  $s(s+3)(s+9) + K$ .

**Esempio 1.16** Vogliamo determinare i valori di  $K$  tali che il polinomio

$$s^2 + 1 + Ks$$

abbia zeri contenuti nel settore angolare di ampiezza di  $\pi/2$  illustrato nella figura 1.24 che mostra il luogo positivo di  $s^2 + 1 + Ks$ . I punti di intersezione con la retta a  $45^\circ$  devono avere coordinate  $s = -x + jx$  dove  $x$  è reale positivo. Per determinare il punto del luogo che attraversa tale retta devo trovare le radici di  $s^2 + 1 + Ks$  del tipo  $-x + jx$ . Quindi

$$(-x + jx)^2 + 1 + K(-x + jx) = 0$$

Separando parte reale e parte immaginario otteniamo

$$1 - Kx = 0$$

$$-2x^2 + Kx = 0$$

da cui si ottiene  $x = 1/\sqrt{2}$  e  $K = \sqrt{2}$ . Possiamo concludere che il luogo delle radici è contenuto nel settore angolare se e solo se  $K \geq \sqrt{2}$ .

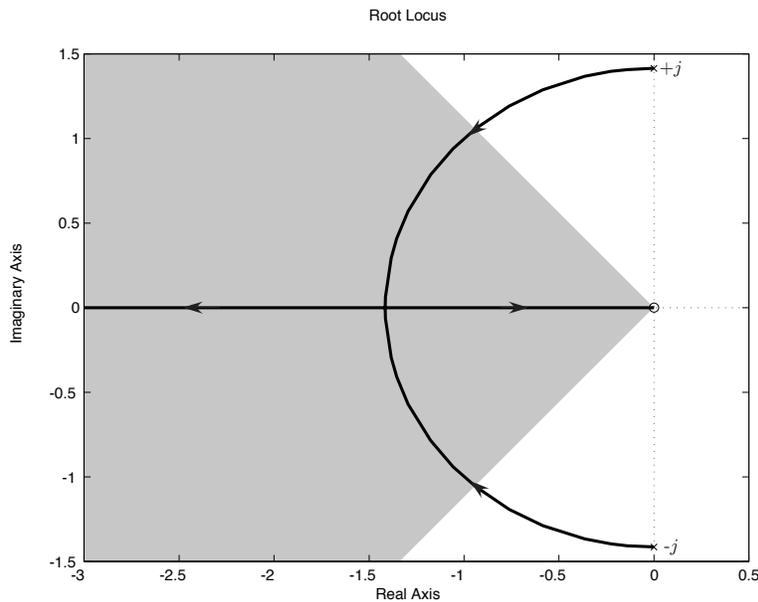


Figure 1.24: Il luogo positivo di  $s^2 + 1 + Ks$