Chapter 1

Stabilità di sistemi lineari

Una delle proprietà fondamentali di un sistema è la stabilità. Esistono due tipi di stabilità:

1. stabilità rispetto alle condizioni iniziali;
2. stabilità ingresso/uscita.

Prenderemo in consideratione qui solo la stabilità ingresso/uscita.

1.1 Stabilità ingresso/uscita

Questa proprietà è connessa a un qualsiasi operatore (anche non lineare) che mappa un segnale di ingresso in un segnale di uscita. Un caso particolarmente significativo di un operatore di questo tipo e' quello rappresentato dalla convoluzione cio' l'operatore che mappa un ingresso $u(t)$ nell'uscita

$$y(t) = (w * u)(t)$$

dove $w(t)$ e' la risposta impulsiva dell'operatore. Casi particolari di sistemi descrivibili da operatori di convoluzione sono dati dal legame tra ingresso e uscita forzata o in sistemi descritti da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti in sistemi lineari in forma di stato.

Per studiare la stabilita' ingresso uscita di sistemi descritti da operatori di convoluzione, è conveniente introdurre due norme di segnali. Data un segnale $y(t)$, che supponiamo nullo per $t \leq 0$, sia

$$\begin{aligned} \|y\|_1 &:= \int_0^{+\infty} |y(t)| dt \quad , \\ \|y\|_\infty &:= \sup_{t \geq 0} |y(t)| \quad . \end{aligned}$$

Ricordiamo che una funzione $y(t)$ tale che $\|y\|_1 < +\infty$ è detta assolutamente integrabile, mentre una funzione $y(t)$ tale che $\|y\|_\infty < +\infty$ è detta limitata.

Definizione 1.1 Un sistema ingresso/uscita è detto *BIBO (Bounded Input - Bounded Output) stabile* se, ad ogni ingresso $u(t)$ limitato ($\|u\|_\infty < +\infty$), il sistema associa una uscita $y_f(t)$ limitata ($\|y_f\|_\infty < +\infty$).

Teorema 1.2 Consideriamo un sistema (1.1) avente come risposta impulsiva una **funzione** $w(t)$ (cio' senza componenti impulsive; nel caso di sistemi descritti da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti significa richiedere che la funzione di trasferimento sia strettamente propria). Allora il sistema è BIBO stabile se e solo se $\|w\|_1 < +\infty$.

Il teorema precedente si estenda al caso in cui la risposta impulsiva ha una componente impulsiva.

Corollario 1.3 Consideriamo un sistema (1.1) avente come risposta impulsiva una distribuzione w che ammetta la decomposizione

$$w = \alpha\delta + \widetilde{w},$$

dove δ è la delta di Dirac e $\widetilde{w}$ è una funzione. Allora il sistema è BIBO stabile se e solo se $||\widetilde{w}||_1 < +\infty$.

Esempio 1.4 Si consideri un sistema con risposta impulsiva $w = \delta^{(1)} + \widetilde{w}$, dove $\|\widetilde{w}\|_1 < +\infty$,. Se prendiamo l'ingresso $u(t) = \sin t^2$, allora l'uscita forzata è $y(t) = 2t\,\sin t^2 + (\widetilde{w} * u)(t)$, in cui è chiaro che $2t\,\sin t^2$ è un segnale illimitato mentre $(\widetilde{w} * u)(t)$ è limitato. Possiamo concludere che il sistema con risposta impulsiva w non è BIBO stabile.

1.1.1 Stabilità BIBO per funzioni di trasferimento razionali

I sistemi descrivibili da equazioni differenziali

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)} \quad ,$$

che corrispondono a sistemi con funzioni di trasferimento razionale

$$W(s) = \frac{b(s)}{a(s)} \quad ,$$

ammettono una caratterizzazione della BIBO stabilità particolarmente semplice. A tal fine, chiamiamo $s_0 \in \mathbb{C}$ *polo* di $W(s)$ se

$$\lim_{s \to s_0} W(s) = \infty \quad .$$

Se $b(s)$ e $a(s)$ hanno dei fattori comuni e se $\overline{b}(s)$ e $\overline{a}(s)$ sono polinomi ottenuti da $b(s)$ e $a(s)$ dopo aver semplificato tutti i fattori comuni, si ha che i poli di $W(s)$ coincidono con gli zeri di $\overline{a}(s)$. Si osservi che, se $W(s)$ è strettamente propria, allora

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\overline{b}(s)}{\overline{a}(s)}\right) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\alpha_{ij}}{(j-1)!}\, t^{j-1}e^{p_i t} \quad ,$$

dove $p_1, p_2, \ldots, p_t$ sono gli zeri di $\overline{a}(s)$ e quindi i poli di $W(s)$. Quindi, a ciascun polo p_i di $W(s)$ corrisponde una famiglia di modi $e^{p_i t}$, $te^{p_i t}, \ldots$

Teorema 1.5 Sia dato un sistema avente funzione di trasferimento razionale **strettamente propria** $W(s)$. Il sistema è BIBO stabile se e solo se $W(s)$ ha poli a parte reale negativa.

Dimostrazione $(\Longrightarrow)$ La BIBO stabilità implica la (**??**)

$$|W(s)| \leq \|w\|_1, \quad \forall\, s \text{ tale che } \operatorname{Re} s \geq 0$$

e ciò implica che $W(s)$ non può avere poli in $\operatorname{Re} s \geq 0$.

$(\Longleftarrow)$ Supponiamo che $W(s)$ abbia poli $p_1, p_2, \ldots, p_t$ in $\operatorname{Re} s < 0$. Allora, come mostrato sopra,

$$w(t) = \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(j-1)!}\, t^{j-1}e^{p_i t} \quad ,$$

da cui segue che

$$\int_0^{+\infty} |w(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} \sum_{i,j} \left|\frac{\alpha_{ij}}{(j-1)!}\, t^{j-1}e^{p_i t}\right| dt \leq \sum_{i,j} \frac{|\alpha_{ij}|}{(j-1)!} \int_0^{+\infty} t^{j-1}e^{(\operatorname{Re} p_i)t}dt \quad .$$

Si noti che $\sigma_i = \operatorname{Re} p_i < 0$, da cui otteniamo che

$$\int_0^{+\infty} t^j\, e^{\sigma_i t}\, dt = \mathcal{L}\left[\, t^j \,\right]\big|_{s=-\sigma_i} = \left.\frac{j!}{s^{j+1}}\right|_{s=-\sigma_i} = \frac{j!}{(-\sigma_i)^{j+1}} < +\infty \quad ,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathcal{L}\left[\, t^j \,\right] = \dfrac{j!}{s^{j+1}}$ con ascissa di convergenza pari a 0, da cui segue che ha senso calcolarne il valore per ogni s con $\operatorname{Re} s > 0$.

■

Corollario 1.6 Un sistema con funzione di trasferimento razionale *propria* è BIBO stabile se e solo se la funzione di trasferimento ha poli a parte reale negativa.

Dimostrazione Definiamo $\widetilde{W}(s) = W(s) - W(\infty)$. In questo modo si ha che che $\widetilde{W}(s)$ è razionale strettamente propria e ha gli stessi poli di $W(s)$. Siano $w(t)$ e $\widetilde{w}(t)$ sono le antitrasformate di $W(s)$ e $\widetilde{W}(s)$ rispettivamente e $\alpha = W(\infty)$. Allora $w(t) = \alpha\delta(t) + \widetilde{w}(t)$ e quindi, per il corollario 1.3, il sistema è stabile se e solo se $||\widetilde{w}||_1 < \infty$. Per il teorema 1.5, ciò accade se e solo se $\widetilde{W}(s)$ ha poli a parte reale negativa e quindi se e solo se $W(s)$ ha poli a parte reale negativa. ■

Esercizio 1.7 Dimostrare che se $W(s)$ è razionale non propria, allora essa individua un sistema che non può essere BIBO stabile.

1.2 Criteri di stabilità

Sia per determinare se un sistema è asintoticamente stabile rispetto alle condizioni iniziali, sia per determinare se un sistema è BIBO stabile, è necessario verificare che un polinomio abbia o meno tutti gli zeri a parte reale negativa, cioè posizionati nel semipiano sinistro aperto del piano complesso. Questa operazione può essere fatta semplicemente calcolando gli zeri del polinomio, ma ciò, oltre a essere molto oneroso dal punto di vista computazionale, risulta un'operazione che può portare ad errori di calcolo notevoli in molte situazioni. È stato sviluppato perciò un algoritmo, detto *criterio di Routh*, che, oltre ad essere computazionalmente molto efficiente, è di semplice applicabilità e di grande affidabilità. Prima di presentare il criterio di Routh, è conveniente notare che esiste una semplicissima condizione necessaria perché un polinomio abbia zeri a parte reale negativa (in tal caso il polinomio è detto *Hurwitziano* o *polinomio di Hurwitz*). Questa è detta *regola di Cartesio*.

1.2.1 La regola di Cartesio

Teorema 1.8 Se un polinomio $a(s)$ è di Hurwitz, allora deve avere tutti i coefficienti non nulli e dello stesso segno.

Dimostrazione Fattorizziamo $a(s)$ come prodotto di fattori di primo grado relativi agli zeri reali e complessi coniugati

$$\begin{aligned} a(s) &= K \textstyle\prod_j (s-\alpha_j) \prod_j (s-\sigma_j - j\omega_j)(s-\sigma_j + j\omega_j) = \\ &= K \textstyle\prod_j (s-\alpha_j) \prod_j (s^2 - 2\sigma_j\, s + {\sigma_j}^2 + {\omega_j}^2). \end{aligned}$$

1. Poiché i fattori $s - \alpha_j$ hanno zeri α_j stabili, allora possiamo concludere che $\alpha_j < 0$ e quindi i fattori di primo grado hanno tutti i coefficienti positivi.

2. Poiché i fattori $s^2 - 2\sigma_j\, s + {\sigma_j}^2 + {\omega_j}^2$ con parte reale σ_j che deve essere negativa, allora possiamo concludere che $\sigma_j < 0$ e quindi i fattori di secondo grado hanno tutti i coefficienti positivi.

Perciò $a(s)/K$ è il prodotto di polinomi a coefficienti tutti positivi e quindi avrà esso stesso tutti coefficienti positivi. Da ciò segue che $a(s)$ ha tutti i coefficienti positivi o tutti i coefficienti negativi.

■

Si noti che la regola di Cartesio è anche sufficiente solo se $a(s)$ ha grado $n \leq 2$. In generale, è una condizione solo necessaria.

Esempio 1.9 Per la regola di Cartesio, il polinomio $a(s) = s^4 - s^3 + 3s^2 + 1$ non può essere Hurwitziano.

Esempio 1.10 Consideriamo il polinomio

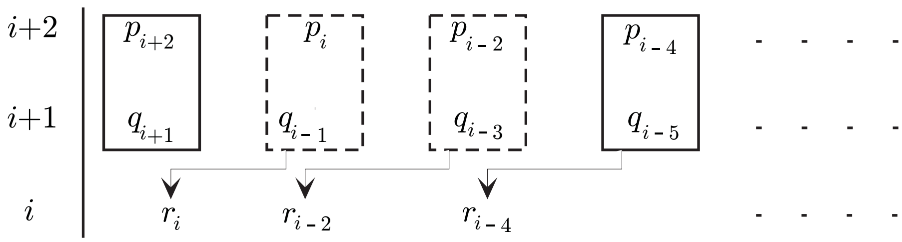
$$a(s) = (s^2 - 2\varepsilon s + 1)(s + 1) = s^3 + (1 - 2\varepsilon)s^2 + (1 - 2\varepsilon)s + 1.$$

Se $0 < \varepsilon < 1/2$, allora $a(s)$ ha coefficienti tutti positivi, ma ha una coppia di zeri $p_{1,2} = \varepsilon \pm j\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ con parte reale $\varepsilon > 0$, il che dimostra che la regola di Cartesio dà una condizione solo necessaria.

1.2.2 Il criterio di Routh

A differenza della regola di Cartesio, il criterio di Routh fornisce una condizione *necessaria e sufficiente* perché un polinomio sia di Hurwitz. In realtà, tale criterio può anche determinare, qualora il polinomio non sia Hurwitziano, il numero di zeri che hanno parte reale positiva o nulla, cioè che appartengono al semipiano destro chiuso. Questo criterio si basa sulla costruzione di una tabella, detta tabella di Routh, che si costruisce ricorsivamente nel modo seguente:

1. Sia $a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$. Le prime due righe della tabella sono
$$\begin{array}{c|cccc} n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ n-1 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \end{array}$$
2. Supponiamo di aver già calcolato le righe n, $n-1, \ldots, i+2$, $i+1$ e supponiamo che le ultime due che abbiamo costruito siano
$$\begin{array}{c|cccc} i+2 & p_{i+2} & p_i & p_{i-2} & \ldots \\ i+1 & q_{i+1} & q_{i-1} & q_{i-3} & \ldots \end{array}$$
Allora la successiva riga i con elementi
$$\begin{array}{c|cccc} i & r_i & r_{i-1} & r_{i-4} & \ldots \end{array}$$
Si calcola secondo la formula
$$r_j := -\frac{1}{q_{i+1}} \det \begin{bmatrix} p_{i+2} & p_j \\ q_{i+1} & q_{j-1} \end{bmatrix} = p_j - \frac{p_{i+2}\, q_{j-1}}{q_{i+1}}, \quad j = i, i-2, i-4, \ldots$$



Perché sia possibile calcolare la riga i-esima, deve essere $q_{i+1} \neq 0$, cioè, in generale, per calcolare una riga, è necessario che la riga precedente abbia il primo elemento non nullo. Se questa situazione si verifica ad ogni passo, diciamo che la tabella è **completabile**. Se, invece, ad un certo punto troviamo che una riga comincia con uno zero, il calcolo della tabella di Routh deve fermarsi e, in tal caso, la tabella di Routh è detta **non completabile**. Si noti che, se l'ultimo elemento della tabella (cioè quello che costituisce la riga 0) e' nullo, allora per definizione la tabella si considera non completabile.

La tabella di Routh può essere interpretata in termini di divisioni successive di polinomi. Infatti, se alle righe $i+2$ e $i+1$ associamo i polinomi $p(s)$ e $q(s)$ come segue

$$\begin{array}{rclclclc} p(s) & = & p_{i+2}s^{i+2} & + & p_i s^i & + & p_{i-2}s^{i-2} & + \dots \\ q(s) & = & q_{i+1}s^{i+1} & + & q_{i-1}s^{i-1} & + & q_{i-3}s^{i-3} & + \dots \end{array}$$

e se $q_{i+1} \neq 0$, allora è facile verificare, da come sono stati definiti $r_i, r_{i-2}, r_{i-4}, \ldots$, che

$$p(s) - s\frac{p_{i+2}}{q_{i+1}}q(s) = r(s) \quad ,$$

dove $r(s) = r_i s^i + r_{i-2}s^{i-2} + \ldots$, o, equivalentemente,

$$\overbrace{p(s)}^{i+2} = \underbrace{\overbrace{s\frac{p_{i+2}}{q_{i+1}}}^{1}}_{\text{quoziente}} \overbrace{q(s)}^{i+1} + \underbrace{\overbrace{r(s)}^{\leq i}}_{\text{resto}}$$

che può essere interpretato come divisione dei polinomi $p(s)$ e $q(s)$, dalla quale risulta il resto $r(s)$. In generale, il resto $r(s)$ deve avere grado minore del grado di $q(s)$ e quindi

$$\deg r(s) \leq i.$$

Inoltre, se il primo coefficiente r_i della riga $i-$esima è non nullo (e ciò avviene se la tabella è completa), si ha che

$$\deg r(s) = i.$$

Quindi, possiamo concludere che alla riga $i-$esima di una tabella di Routh completa corrisponde sempre un polinomio di grado i, avente potenza pari o dispari, a seconda che i sia pari o dispari. Inoltre, possiamo concludere anche che ogni tabella di Routh completa è composta di $n+1$ righe relative ai polinomi di grado rispettivamente

$n, n-1, n-2, \ldots, 1, 0$. Si noti infine che, se la tabella di Routh è completa, allora ogni coppia di polinomi associati a righe adiacenti della tabella di Routh devono essere coprimi, cioè privi di zeri comuni. Infatti, se, per assurdo, i polinomi $p(s)$ e $q(s)$ associati a due righe successive avessero uno zero comune, allora tale zero sarebbe zero comune anche dei polinomi $q(s)$ e $r(s)$. Tale ragionamento si potrebbe così iterare fino a mostrare che tutti i polinomi associati alle righe $i+2, i+1, i, \ldots, 1, 0$ avrebbero tale zero comune, ma ciò non può accadere perché l'ultimo polinomio, essendo non nullo e di grado zero, non può avere zeri.

Consideriamo ora la prima colonna della tabella di Routh e indichiamo con n_p il numero di *permanenze* e con n_v il numero di *variazioni* di segno in tale colonna.

Il seguente teorema mostra che il numero di zeri stabili (a parte reale negativa) e instabili (a parte reale positiva) è dato esattamente dai numeri n_p e n_v.

Teorema 1.11 Sia $a(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ un polinomio di grado n e supponiamo che la tabella di Routh associata al polinomio $a(s)$ sia **completa** e la sua prima colonna abbia n_p permanenze e n_v variazioni. Allora $a(s)$ non ha zeri sull'asse immaginario e ha n_p zeri con $\mathrm{Re}\, s < 0$ e n_v zeri $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Il seguente teorema mostra invece che attraverso la tabella di Routh possiamo ottenere una condizione necessaria e sufficiente per la Hurwitzianità di un polinomio.

Teorema 1.12 Sia $a(s)$ un polinomio. Allora

$a(s)$ è di Hurwitz $\iff$ 1. La tabella di Routh relativa ad $a(s)$ è completabile.
2. Nella tabella appaiono solo permanenze.

Esempio 1.13 Dato $a(s) = s^4 + 5s^3 + 20s^2 + 40s + 50$, la sua tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 20 & 50 \\
3 & 5 & 40 & \\
2 & 12 & 50 & \\
1 & \frac{230}{12} & & \\
0 & 50 & &
\end{array}$$

Possiamo concludere che $a(s)$ è di Hurwitz.

Esempio 1.14 Già il criterio di Cartesio ci assicura che $a(s) = s^3 - 4s^2 + s + 6$ non è di Hurwitz. La sua tabella di Routh è

$$
\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1 \\
2 & -4 & 6 \\
1 & \frac{5}{2} & \\
0 & 6 &
\end{array}
$$

Quindi $a(s)$ ha due zeri a parte reale positiva e uno a parte reale negativa. Infatti, $a(s) = (s+1)(s-2)(s-3)$.

Osservazione 1.15 Si può verificare che i risultati precedenti continuano a valere anche se nel calcolo di una riga della tabella dalle righe precedenti si moltiplica tutti gli elementi per una stessa costante positiva. Poter moltiplicare una riga per una costante opportuna può talvolta rendere più facili i conti. Per verificare questo fatto si può procedere come segue. Supponiamo che a partire da un polinomio $a(s)$ si ottenga una certa tabella di Routh e supponiamo di costruire una nuova tabella di Routh procedendo come al solito fino alla costruzione della riga $i+1$-esima, moltiplicando la riga i-esima per una costante K positiva, e infine calcolando delle righe seguenti come al solito. E' facile verificare che le tabelle così ottenute coincidono, a parte che le righe $i, i-2, i-4, \ldots$ della seconda tabella risultano tutte moltiplicate per K.

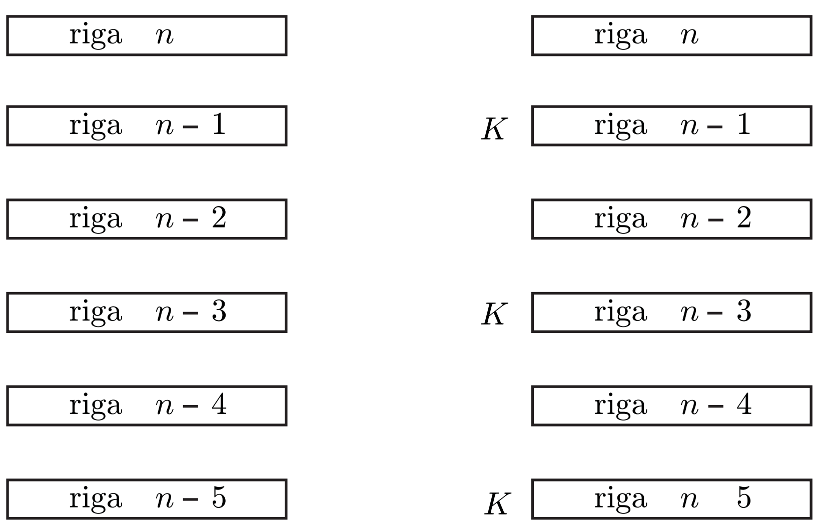


Figure 1.1:

Osservazione 1.16 Se la tabella non è completabile perché il primo elemento di una riga i è nullo, possono verificarsi due situazioni.

1. Tutta la riga $i-$esima è nulla. Allora il polinomio $i-$esimo $r(s) = 0$, da cui segue che il polinomio $p(s)$ relativo alla riga $i+2$ e il polinomio $q(s)$ relativo alla riga $i+1$ sono in questa relazione

$$p(s) = s\frac{p_{i+2}}{q_{i+1}}q(s) \quad ,$$

cioè $q(s)$ è fattore di $p(s)$. È facile vedere che, da come sono legati tra loro i polinomi relativi alle righe precedenti, $q(s)$ è fattore di tutti questi polinomi e quindi anche di $a(s)$.

Il polinomio $q(s)$ è pari o dispari e quindi le sue radici possono essere analizzate attraverso la nuova variabile $t = s^2$. Con questo cambiamento di variabile si dimezza il grado del polinomio. Si noti che, ad ogni zero $\lambda = \rho e^{j\theta}$ di $q(t)$, corrispondono due zeri di $q(s)$, da cui segue che gli zeri di $q(s)$ sono in posizione simmetrica rispetto sia all'asse reale, sia all'asse immaginario; tale fatto si esprime dicendo che vi è simmetria quadrantale.

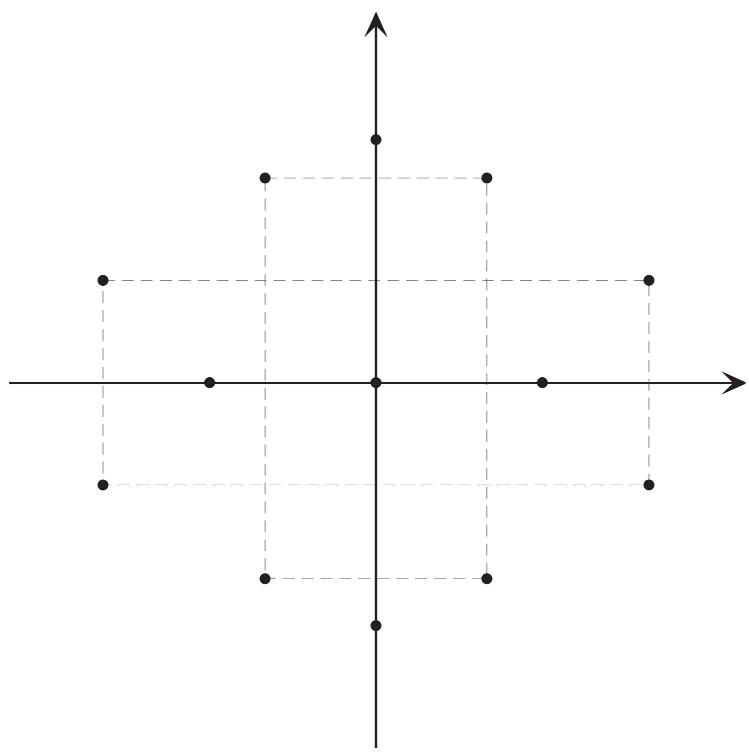


Figure 1.2:

La posizione dei rimanenti zeri può essere dedotta dalle permanenze e variazioni delle righe non nulle. Infatti, chiamati $T_i(s)$ i polinomi relativi alle righe della tabella, se risulta che

$$T_n(s), T_{n-1}(s), \ldots, T_{i+1}(s)$$

hanno gradi $n, n-1, \ldots, i+1$, mentre $T_i(s) = 0$, allora $T_{i+1}(s)$ è fattore di tutti $T_n(s), T_{n-1}(s), \ldots, T_{i+1}(s)$

$$T_{i+1+j}(s) = \widehat{T}_j(s)\, T_{i+1}(s), \quad j = 0, 1, \ldots, n-i-1. \tag{1.1}$$

Si noti che

$$\widehat{T}_{n-i-1}(s), \widehat{T}_{n-i-2}(s), \ldots, \widehat{T}_1(s), \widehat{T}_0(s)$$

hanno grado $n-i-1, n-i-2, \ldots, 1, 0$. Inoltre,

$$a(s) = T_n(s) + T_{n-1}(s) = \left(\widehat{T}_{n-i-1}(s) + \widehat{T}_{n-i-2}(s)\right) T_{i+1}(s) = \widehat{a}(s) T_{i+1}(s).$$

Per cui, i rimanenti zeri di $a(s)$ sono dati dagli zeri di $\widehat{a}(s)$, la cui tabella di Routh è data proprio dai polinomi $\widehat{T}_j(s)$. Si osservi infine che, se α_j sono i coefficienti di grado massimo dei $T_j(s)$, mentre $\widehat{\alpha}_j$ sono i coefficienti di grado massimo dei $\widehat{T}_j(s)$, dalla (1.1), segue che

$$\alpha_{i+1+j} = \widehat{\alpha}_j\, \alpha_{i+1}$$

da cui segue che le variazioni e le permanenze di segno di $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{i+1}$, coincidono con le variazioni e permanenze di $\widehat{\alpha}_{n-i-1}, \widehat{\alpha}_{n-i-2}, \ldots, \widehat{\alpha}_0$.

Esempio 1.17 Si consideri il polinomio $a(s) = s^6 + s^5 + 3s^4 + 5s^3 - 6s^2 + 4s - 8$ che ha la seguente tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cccc} 6 & 1 & 3 & -6 & -8 \\ 5 & 1 & 5 & 4 & \\ 4 & -2 & -10 & -8 & \\ 3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Allora il polinomio relativo alla quarta riga è $q(s) = -2s^4 - 10s^2 - 8 = -2(s^4 + 5s^2 + 4)$. Col cambiamento di variabile $t = s^2$ si ottiene $q(t) = -2(t^2 + 5t + 4)$ che ha radici

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Le radici di $q(s)$, che sono radici anche di $a(s)$, sono quindi $\pm j, \pm 2j$ e sono in simmetria quadrantale come mostrato in figura 1.3. Poiché prima della riga nulla abbiamo 1 permanenza e 1 variazione, avremo che $a(s)$ avrà, oltre agli zeri già menzionati, altri due zeri, uno stabile e uno instabile.

Si osservi che $s^4 + 5s^2 + 4$ divide $a(s)$. Facendo la divisione si ottiene $a(s) = (s^4 + 5s^2 + 4)(s^2 + s - 2)$, da cui segue che i rimanenti due zeri sono $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 1.18 $s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1$ (Hurwitz).

Esercizio 1.19 $s^6 + s^5 + s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 1$ (4 stabili, 2 instabili).

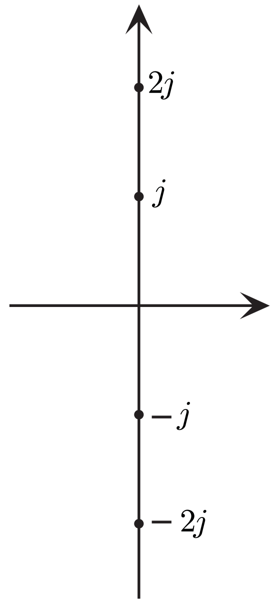


Figure 1.3:

Esercizio 1.20 $s^6 + s^5 + s^4 + s^3 + s^2 + 2s + 1$ (4 stabili, 2 instabili).

2. Se la riga $i-$esima non è tutta nulla, allora si mette al posto del primo elemento non nullo un ε, che si suppone piccolo, e si procede con l'algoritmo.

   Esempio 1.21 Si consideri il polinomio $a(s) = s^3 + 3s - 2$ la cui tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{array}$$

   che è non completabile. Sostituendo ε al posto dello 0 si ottiene

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & \varepsilon & -2 \\ 1 & \frac{3\varepsilon + 2}{\varepsilon} \simeq \frac{2}{\varepsilon} & \\ 0 & -2 & \end{array}$$

   Se $\varepsilon > 0$, si hanno 2 permanenze e 1 variazione. Se $\varepsilon < 0$, si hanno ancora 2 permanenze e 1 variazione, da cui segue che si hanno 2 zeri in $\mathrm{Re}\, s < 0$ e 1 zero in $\mathrm{Re}\, s > 0$.

   Un metodo alternativo è moltiplicare il polinomio per $s+1$ e farne la tabella di Routh. Ciò porta genericamente a una tabella completabile. Usando questo metodo nell'esempio precedente, si ottiene

$$(s+1)(s^3+3s-2) = s^4+s^3+3s^2+s-2$$

la cui tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 3 & -2 \\
3 & 1 & 1 & \\
2 & 2 & -2 & \\
1 & 2 & & \\
0 & -2 & &
\end{array}$$

Si hanno così 3 permanenze e 1 variazione, quindi 3 zeri in $\mathrm{Re}\, s < 0$ e 1 zero in $\mathrm{Re}\, s > 0$. Quindi, togliendo lo zero in -1 che abbiamo aggiunto, si ottiene che il polinomio originario ha 2 zeri stabili e 1 instabile.

Esempio 1.22 Si consideri il polinomio $(s^2-2\varepsilon s+1)(s+1) = s^3+(1-2\varepsilon)s^2+(1-2\varepsilon)s+1$ che ha la seguente tabella di Routh

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 1-2\varepsilon \\
2 & 1-2\varepsilon & 1 \\
1 & \dfrac{(\varepsilon-1)4\varepsilon}{1-2\varepsilon} & \\
0 & 1 &
\end{array}$$

La figura 1.4 mostra come variano i segni degli elementi della prima colonna della tabella di Routh al variare di ε e di conseguenza come varia il numero di poli instabili al variare di ε.

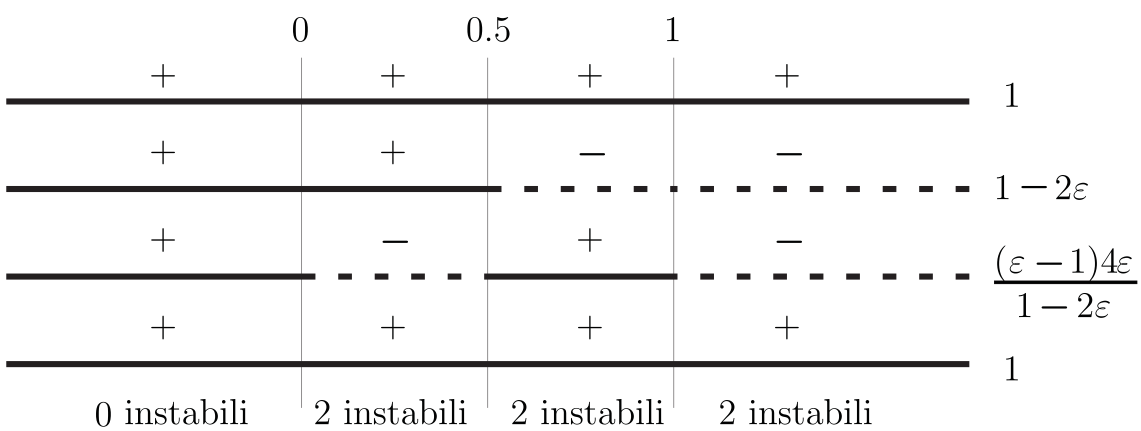


Figure 1.4: