COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
23 luglio 2007

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad sistema lineare tempo invariante, con risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $(h(t) = 0, t \leq 0)$, si dia la definizione di *risposta di regime permanente* in corrispondenza ad un segnale di ingresso di tipo sinusoidale; (si facciano le ipotesi necessarie). Se ne discuta il legame con la risposta in frequenza e si dica come quest'ultima si possa calcolare semplicemente qualora il sistema sia descritto da un'equazione *differenziale* (lineare a coefficienti costanti) di ordine n.

Teoria 2. [5 punti] Si enunci e si dimostri il Teorema del Campionamento ideale. Si discuta la rilevanza di questo importante risultato nell'ambito della Teoria dei Segnali.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
23 luglio 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y(k) + ay(k-1) + \frac{a^2-1}{4}y(k-2) = u(k-1) + 2u(k-2) \qquad k \in \mathbb{Z},$$

con a parametro reale.

i) **[3 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) **[2 punti]** Posto $a = 0$ si scelgano, se possibile, condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera abbia la forma $y_l(k) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$

iii) **[3 punti]** Per $a = -3$, si calcoli, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema. Si verifichi che il risultato ottenuto al punto i) sia compatibile con la risposta impulsiva ottenuta.

Esercizio 2. Si consideri il sistema a tempo continuo la cui risposta impulsiva è:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 + \delta(t) & t \in [0, 1] \\ e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

i) **[2 punti]** Si dica se il sistema è causale e/o BIBO stabile.

ii) **[4 punti]** Si calcoli la risposta in frequenza e, se esiste, l'uscita di regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(2\pi t)\delta_{-1}(t)$ (nel caso la risposta di regime permanente esista, non è necessario calcolarne esplicitamente il termine di fase).

iii) **[2 punti]** Si dica se il sistema può essere descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficenti costanti (di "qualche" ordine n).

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = 10^4 \frac{s^2+1}{(1+100s)(s^2+5s+100)}.$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2, sezioni 6 e 7.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 sezione 6.

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$z^2 + az + \frac{a^2 - 1}{4} = 0$$

Le radici sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm 1}{2}$$

Affinchè il sistema sia asintoticamente stabile deve essere verificata la condizione $|\lambda_{1,2}| < 1$. Quata condizione si verifica se e solo se $a \in (-1, 1)$.

Per quanto riuarda la stabilità BIBO, bisogna verificare se vi possono essere cancellazioni nella funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z + 2}{z^2 + az + \frac{a^2-1}{4}}$$

Ovviamente si possono verificare cancellazioni se e solo una delle due radici del polinomio caratteristico è uguale a -2, cioè se $\frac{-a+1}{2} = -2$ (cioè $a = 5$) oppure $\frac{-a-1}{2} = -2$ (cioè $a = 3$).

Consideriamo di due casi. Se $a = 5$ le due radici del polinomio caratteristico risultano $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$; la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{z + 3}$$

che non descrive un sistema BIBO stabile.

Se $a = 3$ le due radici del polinomio caratteristico risultano $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$; la funzione di trasferimento è

$$H(z) = \frac{1}{z + 1}$$

che non descrive un sistema BIBO stabile.

In conclusione il sistema è asintoticamente stabile e BIBO stabile se e solo se $a \in (-1, 1)$.

ii) [2 punti] Per $a = 0$ le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_{12} = \pm\frac{1}{2}$ e quindi l'evoluzione l'ibera ha la forma $y_l(k) = \left[c_1(1/2)^k + c_2(-1/2)^k\right]$. Quindi non è possibile scegliere condizioni iniziale affinchè $y_l(k) = (1/3)^k$.

iii) [3 punti]. Per $a = -3$ le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Poichè il sistema è strettamente proprio, la risposta impulsiva ha la forma

$$h(k) = (d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k)\delta_{-1}(k-1) = (d_1 2^k + d_2 1^k)\delta_{-1}(k-1).$$

Calcolando esplicitamente i primi valori della risposta impulsiva si ottiene: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = 5$. Imponendo queste condizioni all'espressione di $h(k)$ trovata sopra si ottiene:

$$h(1) = 2d_1 + d_2 = 1 \quad h(2) = 4d_1 + d_2 = 5$$

da cui $d_1 = 2$ e $d_2 = -3$. Di conseguenza

$$h(k) = \left(2^{k+1} - 3\right) \delta_{-1}(k-1).$$

Chiaramente la risposta impulsiva diverge per $k \to \infty$ e quindi non è assolutamente sommabile. Questo implica che il sistema non è BIBO stabile per $a = -3$ in accordo con i risultati del punto i).

Esercizio 2. i) [2 punti] Il sistema è causale perchè la risposta impulsiva è nulla per $t < 0$ ed è BIBO stabile perchè $h(t)$ è assolutamente integrabile, infatti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt + \int_0^1 1\, dt + \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-(t-1)}\, dt = 1 + 1 + 1 = 3$$

ii) [4 punti] La risposta in frequenza del sistema (espressa in termini della frequenza f) è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva, i.e.

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Conviene riscrivere la risposta impulsiva per mezzo di segnali notevoli:

$$h(t) = \delta(t) + \Pi\left(t - \frac{1}{2}\right) + e^{-(t-1)}\delta_{-1}(t-1).$$

Quindi è immediato calcolare la risposta in frequenza usando le trasformate notevoli:

$$\mathcal{F}[\delta(t)](f) = 1$$

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right](f) = e^{-j\pi f}\mathrm{sinc}(f)$$

$$\mathcal{F}\left[e^{-(t-1)}\delta_{-1}(t-1)\right](f) = e^{-j2\pi f}\frac{1}{j2\pi f + 1}.$$

Di conseguenza si ottiene:

$$H(f) = 1 + e^{-j\pi f}\mathrm{sinc}(f) + e^{-j2\pi}\frac{1}{j2\pi f + 1}.$$

Poichè il sistema è BIBO stabile si può calcolare la risposta a regime permanete corrispondente al segnale di ingresso $u(t) = \sin(2\pi t)\delta_{-1}(t)$, che è data dalla formula:

$$y_{rp}(t) = |H(1)| \sin(2\pi t + \angle H(1))\delta_{-1}(t)$$

dove si è usato il fatto che la sinusoide di ingresso ha frequenza $f_0 = 1$.

Il modulo della risposta in frequenza $|H(1)|$, che fornisce l'ampiezza dell'oscillazione a regime permanente, è:

$$\mid H(1) \mid = \mid 1 + \frac{1}{1 + j2\pi} \mid = \sqrt{\frac{4 + 4\pi^2}{1 + 4\pi^2}} \simeq 1.0364$$

ii) Poichè la risposta impulsiva NON si può scrivere come combinazione di esponenziali (eventualmente complessi) allora certamente non può essere la risposta impulsiva di un sistema descritto da una equazione differenziale di ordine n. In maniera analoga, basterebbe calcolare la funzione di trasferimento

$$H(s) = 1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s+1}$$

e notare che non è una funzione razionale si s (e di conseguenza non può essere la funzione di trasferimento di un sistema lineare descritto da un'equazione differenziale di ordine n.)

Esercizio 3. i) [5 punti]

$$H(s) = 10^4 \frac{s^2+1}{(1+100s)(s^2+5s+100)}.$$

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = 100 \frac{(1-\omega^2)}{(1+j\omega 100)(1+j2\cdot 0.25\omega/10 - \omega^2/100)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

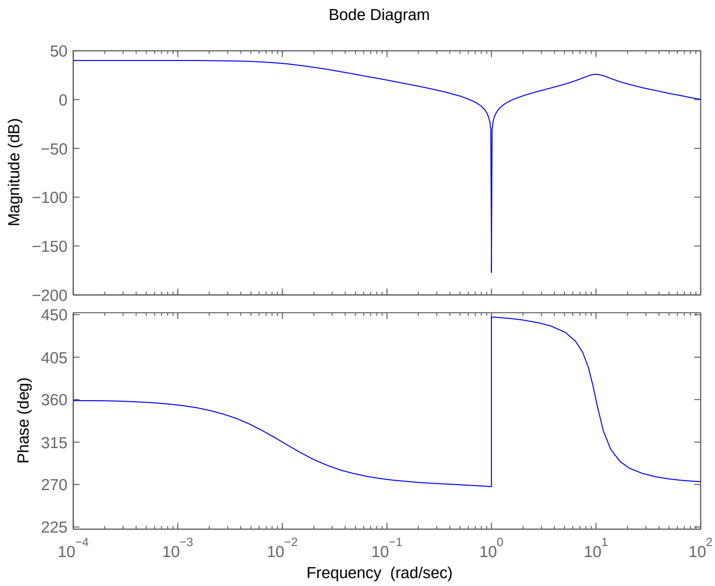

Figura 1. Diagramma di Bode