COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
31 agosto 2007

Teoria 1. [5 punti]

Con riferimento ad generico sistema lineare tempo invariante, a tempo discreto, si dia la definizione di stabilità BIBO. Si dica come si possa dedurre la stabilità BIBO dalla risposta impulsiva $h(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, e si faccia un esempio di sistema BIBO stabile ed uno di sistema non BIBO stabile.

Assumendo ora che il sistema sia descritto da un'equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti di ordine n, si enunci e dimostri il criterio che lega la stabilità BIBO ai coefficienti dell'equazione alle differenze, facendo un esempio di sistema BIBO stabile e uno di sistema non BIBO stabile.

Teoria 2. [5 punti]

Si dia la definizione di serie di Fourier di un segnale a tempo continuo periodico e di trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo.

Si mostri come sia possibile ricavare i coefficienti di Fourier di un segnale a tempo continuo periodico a partire dalla trasformata di Fourier di un suo generatore.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
31 agosto 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (a+1)\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{du(t)}{dt} - 2u(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale.

i) **[3 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) **[2 punti]** Si determinino, se possibile, le restrizioni da imporre sulle condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera sia limitata per $t > 0$. Discutere in che maniera queste restrizioni dipendono dal valore di a?

iii) **[3 punti]** Posto $a = -2$ e fissate le condizioni iniziali $y(0^-) = 0$ e $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$, si determini il segnale di ingresso causale $u(t)$ in modo che l'uscita, per $t \geq 0$, sia $y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + e^{-2t}$.

Esercizio 2. Si consideri il segnale a tempo continuo $v(t)$, periodico di periodo $T = 2$, ottenuto per ripetizione periodica del segnale generatore

$$v_g(t) = \Pi(t - 1/2).$$

Sia $y(t)$ il segnale che si ottiene filtrando $v(t)$ con un filtro la cui risposta in frequenza è $H(f) = \Lambda(f)$.

i) **[2 punti]** Si scriva la serie di Fourier del segnale $v(t)$.

ii) **[4 punti]** Si calcoli esplicitamente (cioé scrivendolo in forma esplicita tramite un numero finito di segnali elementari, tipo esponenziali, finestre rettangolari etc.) il segnale di uscita $y(t)$.

iii) **[2 punti]** Se il filtro $H(f)$ avesse risposta in frequenza $H(f) = \Lambda\left(\frac{f-1/2}{1/2}\right)$ il segnale di uscita sarebbe reale (non è necessario calcolarlo esplicitamente)?

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s^2 - 1}{s(1 + 100s)(s^2 + 10s + 100)}.$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6, sezioni 4 e 5.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5 sezioni 1, 3 e 4.

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + (a+1)s + a = 0$$

Le radici sono:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -a$$

Affinchè il sistema sia asintoticamente stabile deve essere verificata la condizione $\mathcal{R}e\{\lambda_{1,2}\} < 0$. Questa condizione si verifica se e solo se $a > 0$.

Per quanto riguarda la stabilità BIBO, bisogna verificare se vi possono essere cancellazioni nella funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2 + (a+1)s + a} = \frac{s-2}{(s+1)(s+a)}$$

Ovviamente si possono verificare cancellazioni se e solo $a = -2$,

In tal caso la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

che descrive un sistema BIBO stabile.

In conclusione il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a > 0$ e BIBO stabile se e solo se $a \in (0, +\infty) \cup \{-2\}$.

ii) [2 punti] Per $a \geq 0$ i modi sono certamente limitati e quindi l'evoluzione libera é limitata (per tempi positivi) per ogni scelta delle condizioni iniziali. Si noti che invece, per $a < 0$, i modi sono e^{-t} e e^{-at}. Il modo e^{-at} é divergente per $a < 0$; di conseguenza l'unica possibilità é che le condizioni iniziali non "eccitino" il modo instabile. A tale scopo é necessario e sufficiente scegliere $y(0^-)$ e $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-}$ in modo che nell'espressione

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-at}$$

risulti $c_2 = 0$.

Dalle equazioni

$$y_\ell(0) = c_1 + c_2$$

e

$$\frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0^-} = -c_1 - ac_2$$

é immediato verificare che ponendo

$$y(0^-) = y_0, \quad \frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = -y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

si ottiene $c_1 = y_0$ e $c_2 = 0$, cioé

$$y_\ell(t) = y_0 e^{-t}.$$

Quindi per $a > 0$ le condizioni iniziali vanno opportunamente vincolate, ma il vincolo non dipende dallo specifico valore di a.

iii) [3 punti]. Per $a = -2$ le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -a = 2$ ed i modi sono e^{-t} e e^{2t}.

L'evoluzione libera é del tipo $y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$. Imponendo le condizioni $y(0^-) = y_\ell(0^-) = 0$ e $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = \frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$ si ottiene

$$y_\ell(t) = -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Ne consegue che, per $t \geq 0$, la risposta forzata deve essere $y_f(t) = y(t) - y_\ell(t) = e^{-2t}$. Operando nel dominio delle trasformate si ottiene

$$Y_f(s) = \mathcal{L}[y_f(t)](s) = \frac{1}{s+2}$$

Di conseguenza l'ingresso da applicare deve avere trasformata di Laplace

$$U(s) = \frac{Y_f(s)}{H(s)} = \frac{1}{s+2} \cdot (s+1) = \frac{s+1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

Antitrasformando si ottiene l'ingresso richiesto:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}[U(s)](t) = \delta(t) - e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

Esercizio 2. i) [2 punti] Il segnale

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_g(t - 2k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi(t - 1/2 - 2k)$$

é ottenuto come ripetizione periodica con periodo $T = 2$ del segnale generatore $v_g(t)$.

I coefficienti v_k della sua serie di Fourier

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k e^{j2\pi\frac{k}{2}t}$$

si possono ottenere dalla relazione $v_k = \frac{1}{T} V_g\left(\frac{k}{T}\right)$, dove $V_g(f)$ é la trasformata di Fourier del segnale generatore $v_g(t)$.

Usando le traformate notevoli e la regola per la traslazione nel tempo si ottiene:

$$V_g(f) = \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f}$$

da cui i coefficienti di Fourier

$$v_k = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-j\pi\frac{k}{2}}$$

ii) [4 punti] Utilizzando le ben note regole sulla risposta di un sistema lineare ad una combinazione (a coefficienti in ℓ^2) di segnali sinusoidali, la serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{j2\pi \frac{k}{2} t}$$

del segnale di uscita $y(t)$ ha coefficenti di Fourier y_k dati da

$$y_k = H\left(\frac{k}{2}\right) v_k = \Lambda\left(\frac{k}{2}\right) \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) e^{-j\pi\frac{k}{2}}$$

Poiché $\Lambda(f) = 0$ per $|f| \geq 1$ i coefficienti y_k sono nulli per $|k| > 1$. Ne segue che il segnale di uscita si scrive nella forma

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{-1}e^{-j2\pi\frac{1}{2}t} + y_0 + y_1 e^{j2\pi\frac{1}{2}t} \\ &= \tfrac{1}{4}\text{sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right) e^{j2\pi\frac{1}{2}(1/2-t)} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\text{sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right) e^{j2\pi\frac{1}{2}(1/2-t)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \text{sinc}\left(\tfrac{1}{2}\right)\cos\left(\pi(t-1/2)\right)\right) \end{aligned}$$

iii) [2 punti] Poichè la risposta in frequenza non ha simmetria Hermitiana, non é la trasformata di Fourier di un segnale reale e quindi la risposta impulsiva del sistema é un segnale a valori complessi. Poiché il segnale di ingresso é reale, ne segue che l'uscita non puó essere reale.

Esercizio 3. i) [5 punti]

$$H(s) = \frac{s^2-1}{s(1+100s)(s^2+10s+100)}.$$

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{1}{100}\frac{(1-j\omega)(1+j\omega)}{(1+j\omega 100)(1+j2\cdot 0.5\omega/10 - \omega^2/100)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

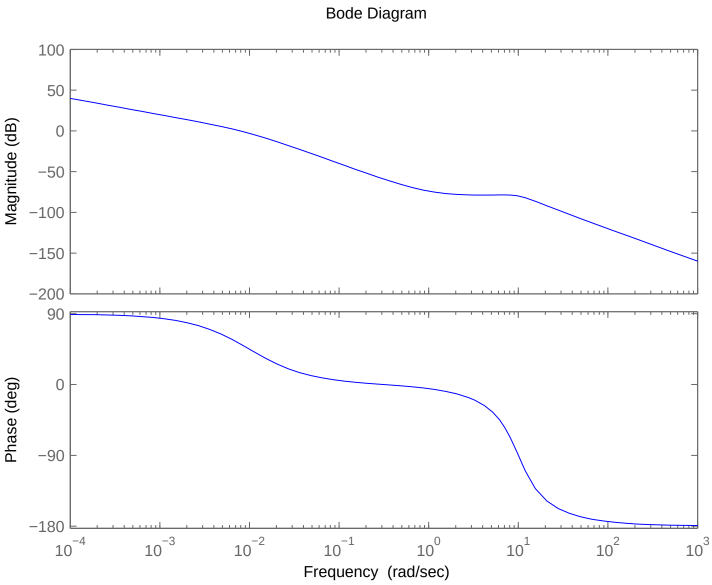

Figura 1. Diagramma di Bode