COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
15 luglio 2008

Teoria 1. [5 punti] Si diano le definizioni di serie di Fourier e trasformata di Fourier per segnali a tempo continuo. Si ricavi il legame tra serie di Fourier e Trasformata di Fourier per un segnale a tempo continuo, periodico di periodo T.

Siano $u(t)$ e $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$ rispettivamente l'ingresso e l'uscita di un sistema lineare tempo invariante BIBO stabile con funzione di trasferimento $H(s)$. Assumendo che $u(t)$ sia periodico di periodo $T = 3$, si ricavi la relazione che intercorre tra i coefficienti di Fourier di $u(t)$ e quelli di $y(t)$.

Teoria 2. [5 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto con risposta impulsiva $h(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Si enuncino le condizioni affinchè:

1. il sistema sia causale
2. il sistema sia tempo invariante
3. il sistema sia BIBO stabile

Assumendo che il sistema sia descritto da un'equazione alle differenze di ordine n, si descriva la forma generale della risposta impulsiva. Si faccia un esempio di $h(k)$ che soddisfi le condizioni di cui sopra, sia descritto da una equazione alle differenze, e ammetta come risposta libera

$$y_\ell(k) = 2^k, \quad k \geq 0$$

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
15 Luglio 2008

Esercizio 1. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(10s^2 + 9990s - 10000)}{s(s^2 + 2s + 10001)}$$

Esercizio 2. **[12 punti]** Si consideri il sistema LTI a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 2a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a^2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + bu(t) \quad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

1. Si discutano la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare dei parametri $a \in R$ e $b \in \mathbb{R}$

2. Ponendo, nel seguito dell'esercizio, $a = -1$ e $b = 1$,

    - si trovino, se possibile, condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera $y_\ell(t)$, sia costante e non nulla per tutti i tempi positivi.
    - si ricavi la risposta impulsiva del sistema.
    - si ricavi, se possibile, un opportuno ingresso $u(t) \neq 0$ ed opportune condizioni iniziali affiché l'uscita del sistema per $t \geq 0$ contenga tutti e solo termini del tipo e^{-t} e te^{-t}.

Esercizio 3. **[3 punti]** Si trovino i coefficienti di Fourier del segnale $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, che si ottiene filtrando $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi(t - 5k)$ con il filtro la cui funzione di trasferimento é

$$H(s) = \frac{1}{s + 10}$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, Capitolo 6.

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10\frac{1000}{10001} \cdot \frac{(1 + j\frac{\omega}{1000})\,(1 - j\omega)}{s\left(1 + 2\frac{1}{\sqrt{10001}}\frac{1}{\sqrt{10001}}\omega - \frac{\omega^2}{10001}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

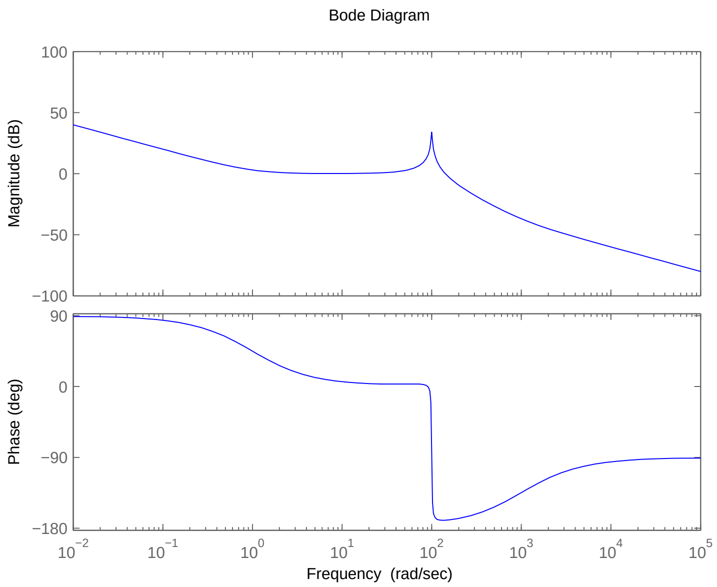

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

1) [3 punto] Il polinomio caratteristico è $p(s) = s(s-a)^2$. Le radici sono $\lambda_1 = 0$ (semplice) e $\lambda_{2,3} = a$. Poichè, per ogni valore di a e b, $p(s)$ ha una radice a parte reale nulla, il sistema non è mai asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento ha la forma

$$H(s) = \frac{s+b}{s(s-a)^2}$$

Il sistema è BIBO stabile se e solo se i poli di $H(s)$ sono a parte reale negativa. Questo succede solo se $b = 0$, nel qual caso la funzione di trasferimento ha la forma

$$H(s) = \frac{1}{(s-a)^2},$$

che è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile se e solo se $a < 0$.

2) per $a = -1$ e $b = 1$ il polinomio caratteristico è $p(s) = s(s+1)^2$ ed il sistema ha funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- [3 punti] L'evoluzione libera ha la forma $y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$. Affinché l'evoluzione libera sia costante e non nulla per $t \geq 0$ devono essere soddisfatte le condizioni: $c_1 \neq 0$, $c_2 = c_3 = 0$. Questo è garantito se e solo se:

$$y(0) = c_1 + c_2 = c_1, \quad \frac{dy(0)}{dt} = -c_2 + c_3 = 0, \quad \frac{d^2y(0)}{dt} = c_2 - 2c_3 = 0$$

- [3 punti] La risposta impulsiva si ottiene per antitrasformazione (di Laplace) della funzione di trasferimento:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}\right](t) = (A + Be^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Le costanti A e B si ricavano dall'espansione in fratti semplici di $H(s)$ e risultano: $A = 1$, $B = -1$. Da cui

$$h(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

- [3 punti] Affinché l'uscita $y(t)$ contenga tutti e solo termini del tipo e^{-t} e te^{-t} é necessario sufficiente che la sua trasformata di Laplace $Y(s)$ sia della forma

$$Y(s) = \alpha \frac{s+\gamma}{(s+1)^2}$$

con $\gamma \neq 1$, $\alpha \neq 0$.

Ci sono varie scelte possibili che garantiscono questa condizione.

Si ricordi che l'uscita $y(t)$, $t \geq 0$ è la somma di evoluzione libera e risposta forzata, cioè, nel dominio delle trasformate, $Y(s) = Y_f(s) + Y_\ell(s)$.

Si puó scegliere un ingresso $u(t)$ tale che la risposta forzata contenga solo combinazioni lineari dei modi del sistema, ad esempio:

$$\frac{s+\gamma}{s(s+1)^2} = Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s(s+1)}U(s)$$

da cui $U(s) = \frac{s+\gamma}{s+1}$. Nel dominio del tempo l'ingresso corrispondente é

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\gamma}{s+1}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{s+1}\right](t) = \delta(t) + (\gamma - 1)e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

Dall'espansione in fratti semplici si ottiene:

$$Y_f(s) = \frac{s+\gamma}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

con $A = \gamma$, $B = -\gamma$, $C = 1 - \gamma$. Quindi, nel dominio del tempo, l'uscita forzata ha la forma:

$$y_f(t) = \left[\gamma - \gamma e^{-t} + (1-\gamma)te^{-t}\right]\delta_{-1}(t)$$

affinchè $y(t)$ contenga solo i termini e^{-t} e te^{-t} è sufficiente scegliere condizioni iniziali affinchè $y_\ell(t) = -\gamma$, in modo che

$$y(t) = y_f(t) + y_\ell(t) = -\gamma e^{-t} + (1-\gamma)te^{-t} \quad t \geq 0.$$

Dalla soluzione del punto precedente basta porre

$$y(0) = -\gamma \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0 \quad \frac{d^2y(0)}{dt^2} = 0$$

Alternativamente, si sarebbe potuto scegliere un ingresso $u(t)$ in modo che l'uscita forzata non contenga il termine costante, ad esempio ponendo $U(s) = \frac{s}{s+1}$, garantendo

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

In tal modo l'uscita forzata è $y_f(t) = te^{-t}\delta_{-1}(t)$. È poi sufficente scegliere condizioni iniziali in modo che l'evoluzione libera, che ha la forma

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2e^{-t} + c_3te^{-t}$$

soddisfi a $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$, $c_3 \neq -1$.

Esercizio 3.

i) [3 punti] I coefficienti di Fourier di $u(t)$, periodico di periodo $T = 5$, si possono ricavare dal campionamento, con passo $\frac{1}{T}$, della trasformata di Fourier del segnale $u_g(t) = \Pi(t)$, cioé $U_g(f) = \mathrm{sinc}(f)$, da cui

$$u_k = \frac{1}{5}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{5}\right).$$

Poichè il sistema é BIBO stabile, il segnale di uscita $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, é periodico di periodo $T = 5$ ed i suoi coefficienti di Fourier si ottengono dalla relazione

$$y_k = H\left(j2\pi\frac{k}{5}\right)u_k = \frac{1}{j2\pi k + 50}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{5}\right)$$