COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
19 febbraio 2009

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad un sistema LTI a tempo discreto, si dia la definizione di risposta impulsiva e si dica, definendole opportunamente, quali proprietà del sistema sono deducibili dalla risposta impulsiva, enunciando i relativi criteri.

Se in aggiunta il sistema è descritto da una equazione alle differenze di ordine finito, si ricavi l'espressione generale della risposta impulsiva; in questo caso come si possono dedurre le proprietà enunciate sopra?

Teoria 2. [5 punti] Si enunci e si dimostri il Teorema del Campionamento. Dal punto di vista pratico, come si deve procedere per evitare effetti "indesiderati" nel campionamento di un segnale?

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
19 febbraio 2009

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - \frac{d^2y(t)}{dt^2} - a\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - 2\frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale.

i) **[2 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$. [*Suggerimento: si utilizzi il fatto che, definito* $p(s) = s^3 - s^2 - as + a$, *vale* $p(1) = 0$.]

ii) **[3 punti]** Si calcoli la risposta impulsiva del sistema (in funzione di $a \in \mathbb{R}$).

iii) **[3 punti]** Con riferimento alla risposta forzata al segnale di ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t) + \sin(2t)\delta_{-1}(t)$ si calcoli esplicitamente, sotto le opportune ipotesi, la componente di regime permanente. È possibile scegliere delle condizioni iniziali opportune affinchè l'uscita complessiva (forzata + libera) sia nulla a regime?

Esercizio 2.
Si consideri il segnale

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\left(\frac{t-10k}{3}\right) \qquad t \in \mathbb{R}$$

i) **[3 punti]** Si calcolino i coefficienti di Fourier v_k della serie di Fourier esponenziale del segnale $v(t)$.

ii) **[4 punti]** Si consideri il segnale $v_c(h) := v(hT_c)$, $h \in \mathbb{Z}$ con $T_c = 1$. Si ricavi la relazione tra i coeficienti di Fourier v_k ricavati al punto precedente e i coefficienti $\bar{v}_\ell$ della DFT:

$$v_c(h) = \sum_{\ell=0}^{9} \bar{v}_\ell e^{j\frac{2\pi}{10}\ell h}$$

Si metta in relazione questo risultato con il teorema del campionamento. È possibile scegliere un valore diverso di T_c in modo che valga $\bar{v}_\ell \simeq v_\ell$, (per opportuni valori di ℓ)?

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = 10\frac{s^2 - 2s + 100}{(s^2-1)(s+1000)}$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = s^3 - s^2 - as + a = 0,$$

Come suggerito dal testo, è immediato verificare che $p(1) = 1 - 1 - a + a = 0$. Quindi il polinomio caratteristico ha sempre una radice in $s = 1$ e quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda la BIBO stabilità, calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^3 - s^2 - as + a}.$$

Facendo la divisione di polinomi si ottiene, al denominatore: $s^3 - s^2 - as + a = (s-1)(s^2 - a)$ e quindi:

$$H(s) = \frac{(s-1)^2}{(s-1)(s^2-a)} = \frac{(s-1)}{(s-\sqrt{a})(s+\sqrt{a})};$$

per $a = 1$ si verifica una cancellazione e la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

che ha un polo in -1 e quindi il sistema è BIBO stabile. Per $a \neq 1$ non ci possono essere cancellazioni e quindi la funzione di trasferimento ha due poli in $\pm\sqrt{a}$. Poichè questi non possono essere mai (cio'è per ogni scelta di a) entrambi a parte reale strettamente negativa il sistema non è BIBO stabile.

In conclusione il sistema è BIBO stabile se e solo se $a = 1$.

ii) [3 punti] Dal punto precedente la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s-\sqrt{a})(s+\sqrt{a})}.$$

Si consideri il caso di radici del denominatore distinte, cioè $a \neq 0$. Facendo l'espansione in fratti semplici, per $a \neq 0$ risulta:

$$H(s) = \frac{A}{s-\sqrt{a}} + \frac{B}{s+\sqrt{a}}$$

con $A = \frac{\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}$ e $B = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}$

Quindi la risposta impulsiva risulta essere:

$$h(t) = \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}} e^{\sqrt{a}t} + \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}t} \right) \delta_{-1}(t).$$

Si osservi che per $a = 1$ l'espressione si semplifica in

$$h(t) = e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Se invece $a = 0$, la funzione di trasferimento è $H(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$ e quindi la risposta impulsiva è:

$$h(t) = \delta_{-1}(t) - t\delta_{-1}(t).$$

In conclusione:

$$h(t) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}} e^{\sqrt{a}t} + \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}t}\right)\delta_{-1}(t) & a \neq 0, a \neq 1 \\ e^{-t}\delta_{-1}(t) & a = 1 \\ (1-t)\delta_{-1}(t) & a = 0 \end{cases}.$$

iii) [3 punti] Dal punto precedente la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{(s-1)}{(s-\sqrt{a})(s+\sqrt{a})};$$

affinchè si possa parlare di risposta a regime permanente il sistema deve essere BIBO stabile, e quindi $a = 1$.

Sotto tali ipotesi la risposta a regime permanente si può calcolare facendo uso della risposta in frequenza:

$$y_{rp}(t) = H(j0)\delta_{-1}(t) + |H(j2)|\sin(2t + \angle H(j2))\delta_{-1}(t)$$

È immediato calcolare $H(j0) = 1$ e $H(j2) = 1/\sqrt{5}e^{-j\angle 1+j2}$ da cui:

$$y_{rp}(t) = \delta_{-1}(t) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2t - \angle 1 + j2)\delta_{-1}(t).$$

Poichè i modi del sistema sono, per $a = 1$, e^t, te^t e^{-t}, l'evoluzione libera ha la forma $y_\ell(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}$ e non è possibile scegliere c_1, c_2 e c_3 affinche $y_{rp}(t) + y_\ell(t) = 0$.

Esercizio 2. i) [3 punti]

Il segnale assegnato si può pensare come la ripetizione periodica, con periodo $T = 10$ del segnale generatore $v_g(t) = \pi\left(\frac{t}{3}\right)$.

Quindi i suoi coefficienti di Fourier sono dati dalla relazione

$$v_k = \frac{1}{T}V_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

dove $V_g(f)$ è la trasformata di Fourier di $v_g(t)$. Dalle trasformate notevoli si ottiene:

$$V_g(f) = 3\text{sinc}(3f)$$

e quindi:

$$v_k = \frac{3}{10}\text{sinc}\left(\frac{3k}{10}\right).$$

ii) [4 punti] Il segnale $v_c(h)$, ottenuto campionando il segnale $v(t)$ con passo di campionamento $T_c = 1$ è un segnale a tempo discreto di periodo $N = 10$.

Di conseguenza di può esprimere usando la trasformata discreta di Fourier:

$$v_c(h) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \bar{v}_\ell e^{j\frac{2\pi}{N}h\ell} = \sum_{\ell=0}^{9} \bar{v}_\ell e^{j\frac{2\pi}{10}h\ell}. \tag{1}$$

Poichè

$$v_c(h) = v(hT_c) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{j2\pi\frac{k}{10}hT_c} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{j2\pi\frac{k}{10/T_c}h}$$

e ricordando che $T_c = 1$ si ottiene che

$$\sum_{\ell=0}^{9} \bar{v}_\ell e^{j\frac{2\pi}{10}h\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{j2\pi\frac{k}{10}h}.$$

Si ricordi, infine che $e^{j2\pi\frac{k}{10}h}$, come funzione di k, è un segnale a tempo discreto periodico di periodo 10, cioè $e^{j2\pi\frac{\ell+10\bar{k}}{10}h} = e^{j2\pi\frac{\ell}{10}h}$, $\forall \bar{k}$.

Di conseguenza si ottiene:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{j2\pi\frac{k}{10}h} = \sum_{\ell=0}^{9} \sum_{\bar{k}=-\infty}^{\infty} v_{\ell+10\bar{k}} e^{j2\pi\frac{\ell+10\bar{k}}{10}h} = \sum_{\ell=0}^{9} \left(\sum_{\bar{k}=-\infty}^{\infty} v_{\ell+10\bar{k}} \right) e^{j2\pi\frac{\ell}{10}h} \tag{2}$$

Eguagliando l'ultimo membro di (2) con (1) si ottiene

$$\sum_{\ell=0}^{9} \bar{v}_\ell e^{j\frac{2\pi}{10}h\ell} = \sum_{\ell=0}^{9} \left(\sum_{\bar{k}=-\infty}^{\infty} v_{\ell+10\bar{k}} \right) e^{j2\pi\frac{\ell}{10}h}$$

da cui

$$\bar{v}_\ell = \sum_{\bar{k}=-\infty}^{\infty} v_{\ell+10\bar{k}}$$

che non è altro che la ripetizione periodica con periodo $N_k = 10$ (passi) dei coefficienti della serie di Fourier di $v(t)$.

Si ricordi che al campionamento nel dominio del tempo con passo T_c corrisponde la ripezione periodica con periodo $F = 1/T_c$ nel dominio della frequenza. Quindi, in termini di frequenza, deve risultare una ripetizione periodica con periodo $F = 1/T_c = 1$. Per verificare questo fatto basto osservare che il $k-esimo$ coefficiente di Fourier si riferisce alla frequenza $\frac{k}{T}$. Quindi una traslazione di $N_k = 10$ indici sui coefficienti di Fourier corrisponde ad una traslazione di $F = N_k/T = 1$ in termini di frequenza.

Il fatto che $\bar{v}_\ell \neq v_\ell$ (per ℓ "piccolo") corrisponde al fatto che vi è aliasing (cioè che si è campionato il segnale a frequenza troppo bassa). Nel caso specifico

$$v_k = \frac{3}{10}\mathrm{sinc}\left(\frac{3k}{10}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3k\pi}{10}\right)}{\pi k}.$$

Si consideri ad esempio $\ell = 1$ e si osservi che $v_1 = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{\pi}$ mentre $v_{11} = \frac{\sin\left(\frac{33\pi}{10}\right)}{11\pi} = -\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)}{11\pi} = -\frac{1}{11}v_1$

Di conseguenza si verifica un fenomeno di aliasing che comporta perturbazioni dell'ordine del 10% sui valori dei coefficienti di Fourier. Se invece avessimo scelto un valore di $T_c = 1/10$ avremmo ottenuto una ripetizione periodica, in frequenza, con passo $F = 10$, che in termini di “indici” sui coefficienti di Fourier equivale a $N_k = FT = 100$. Con delle considerazioni analoghe a quelle fatte sopra questo comporterebbe un fenomeno di aliasing dell’ordine del’ 1%.

Esercizio 3. i) [5 punti]

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -1 \cdot \frac{j\omega(1 - 2j0.1\omega/10 - 1/100)}{(1 + j\omega)(1 - j\omega)(1 + j\omega/1000)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

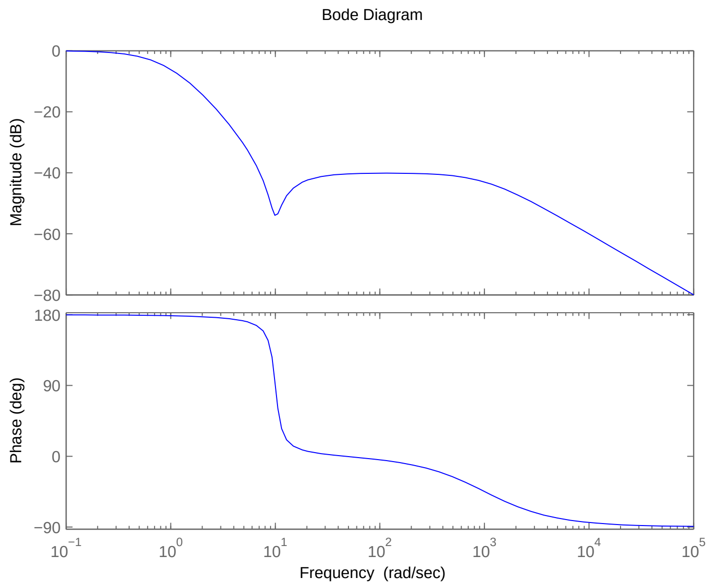

Figura 1. Diagramma di Bode