COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 luglio 2010

Teoria 1. Si enunci e dimostri il Teorema del Campionamento ideale

Teoria 2. Dato un sistema LTI a tempo discreto, descritto da una equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(t-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(t-i), \quad a_0 \neq 0.$$

i) Si ricavino le condizioni sui coefficenti a_i e b_i affinchè la funzione di trasferimento $H(z)$ abbia tutti i poli nell'origine (e non vi siano cancellazioni).

ii) Si ricavi, sotto le condizioni del punto i), la forma generale della risposta impulsiva. Quale importante proprietà hanno questi sistemi?

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 luglio 2009

Esercizio 1. Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 0.02s + 1}{s^3 + 2s^2 + 10000s}$$

Esercizio 2. Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-6k}{2}\right) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-6k-3}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T.

ii) Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $u(t)$.

iii) Si consideri un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale e sia $y(t)$ l'uscita (in regime permanente) corrispondente all'ingresso $u(t)$ in (1). Con riferimento alla serie esponenziale di Fourier di $y(t)$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t},$$

si determini il valori di a affinchè la potenza della componente con $k = 1$ dello sviluppo in serie di Fourier di $y(t)$ si riduca di un fattore 2 (cioè diventi la metà) rispetto alla corrispondente componente dello sviluppo in serie di $u(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$v(k) + \left(\frac{1}{2} + b\right) v(k-1) + \frac{b}{2} v(k-2) = u(k-1) + au(k-2), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a e b sono due parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a e b.

ii) Fissando $a = b$ si calcoli, nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si determini, in funzione di a e b, un ingresso $u(k)$ affinchè l'uscita forzata del sistema sia

$$v(k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

Cosa succede per $a = b$? Era prevedibile?

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{10000} \cdot \frac{(1 + j2 \cdot 0.01 \cdot \omega - \omega^2)}{j\omega \left(1 + j2 \cdot 0.01 \cdot \frac{\omega}{100} - \frac{\omega^2}{10000}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

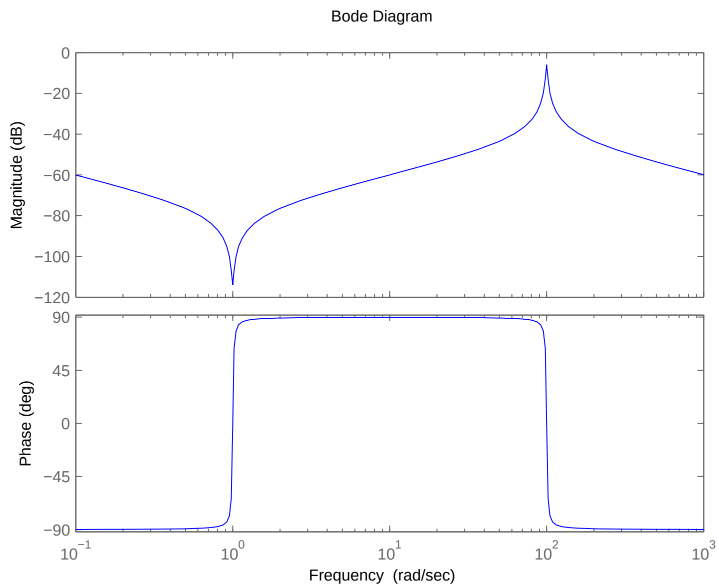

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [1 punto] Il più piccolo valore di T per il quale segnale $u(t)$ soddisfa $u(t) = u(t + Tk)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ è $T = 6$, e quindi $u(t)$ è periodico di periodo 6.

ii) [3 punti] Il segnale $u(t)$ si ottiene per ripetizione periodica, con periodo $T = 6$, del segnale

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) - \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$$

La trasformata di Fourier del segnale dgeneratore $u_g(t)$ si calcola semplicemente usando la trasformata notevole dell'impulso rettangolare e le regole di traslazione e cambio di scala:

$$U_g(f) = 2\text{sinc}\,(2f)\left(1 - e^{-j2\pi f 3}\right)$$

e di conseguenza la trasformata di Fourier di $u(t)$ risulta

$$
\begin{aligned}
U(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{3}\right)\left(1-e^{-jk\pi}\right) \delta\left(f-\frac{k}{6}\right)
\end{aligned}
$$

iii) [3 punti] La funzione di straferimento del sistema è

$$H(s) = \frac{1}{s-a}$$

Il coefficiente di Fourier y_1 si ottiene dalla relazione $y_1 = H\left(j2\pi f\right)_{|f=\frac{1}{6}} u_1$ dove $u_1 = \frac{1}{6} U_g\left(\frac{1}{6}\right)$. Affinchè la potenza della componente per $k=1$ si dimezzi deve essere

$$\left|H\left(j2\pi f\right)\right|^2_{|f=\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

cioè

$$\left|j2\pi f - a\right|^2_{|f=\frac{1}{6}} = 2$$

da cui $a^2 = 2 - \frac{\pi^2}{9}$ e quindi $a = -\sqrt{2-\frac{\pi^2}{9}}$ (si ricordi che il sistema deve essere BIBO stabile).

Esercizio 3.

i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è $z^2 + (b+1/2)z + b/2 = (z+1/2)(z+b) = 0$. Le radici sono $z_1 = -1/2$ e $z_2 = -b$. Quindi il sistema è asintoticamente stabile per $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |b| < 1\}$.

Per verificare la BIBO stabilità si puo calcolare la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z+a}{(z+1/2)(z+b)}$$

il sistema è BIBO stabile quando i poli della funzione di traserimento (cioè le radici del denominatore dopo eventuali cancellazioni) sono in modulo strettamente minore di 1.

Quindi il sistema è BIBO stabile per $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |b| < 1\} \cup \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a = b\}$

ii) [3 punti] Per $a = b$ si ha una cancellazione tra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento e quindi il comportamento ingresso uscita è descritto dall'equazione alle differenze di ordine 1

$$v(k) + 1/2v(k-1) = u(k-1)$$

La risposta impulsiva $h(k)$ si ottiene risolvendo

$$h(k) = -1/2h(k-1) + \delta(k-1)$$

con $h(k) = 0$, $\forall k < 0$.

da cui: $h(0) = -1/2h(-1) + \delta(-1) = 0$, $h(1) = -1/2h(0) + \delta(0) = 1$, $h(k) = 1/2h(k-1) + \delta(k) = -1/2h(k-1)$, $\forall k > 1$. Di conseguenza

$$\begin{cases} h(k) = 0 & k \leq 0 \\ h(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(k-1)} & k \geq 1 \end{cases}$$

iii) [3 punti] Si può procedere nel dominio delle trasformate.
La trasformata zeta dell'uscita desiderata $v(k)$ è

$$V(z) = \frac{1}{z + 1/2}$$

Dalla relazione ingresso uscita (forzata) nel dominio delle trasformate si ottiene:

$$U(z) = \frac{V(z)}{H(z)} = \frac{z+b}{z+a}$$

da cui, antitrasformando:

$$u(k) = (-a)^k \delta_{-1}(k) + b(-a)^{k-1}\delta_{-1}(k-1)$$

Nel caso $a = b$ si ottiene

$$u(k) = (-a)^k \delta_{-1}(k) + b(-a)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k = 0 \\ (-a)^k + a(-1)^{k-1}a^{k-1} = 0 & k > 0 \end{cases}$$

Il risultato era ovviamente prevedibile perchè l'uscita desiderata $v(k)$ è proprio la risposta impulsiva nel caso $a = b$.