COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
28 gennaio 2010

Teoria 1. Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e, con riferimento alla BIBO stabilità, se ne fornisca una caratterizzazione in termini di risposta impulsiva.

Teoria 2. Si enunci e dimostri il Teorema del Campionamento ideale. Si discuta il problema della ricostruzione del segnale a tempo continuo a partire dal segnale campionato "sample-and-hold".

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
28 gennaio 2010

Esercizio 1. Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = 100\frac{(s^2 - 10^6)}{(s^2 + 0.2s + 101)} \tag{1}$$

Esercizio 2. Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - 8k}{2}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t - 8k - 4}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T.

ii) Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $u(t)$.

iii) Sia $y(t)$ il segnale di uscita dal sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento $H(s)$ in (1) (Esercizio 1) con ingresso $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Il segnale $y(t)$ è periodico? Se si, si dica come si possono calcolare i sui coefficienti di Fourier.

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) - \left(2a - \frac{1}{2}\right) y(k-1) + \left(a^2 - \frac{a}{2}\right) y(k-2) = u(k-2) - u(k-4), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a.

ii) Si calcoli la risposta impulsiva del sistema (in funzione di $a \in \mathbb{R}$).

iii) Si determini, per $a = 1$, l'uscita del sistema con condizione iniziale $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$ e ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10^2 \frac{10^6}{101} \cdot \frac{\left(1 - j\frac{\omega}{1000}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{1000}\right)}{\left(1 + 2\frac{0.1}{\sqrt{101}}\frac{1}{\sqrt{101}}\omega - \frac{\omega^2}{101}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

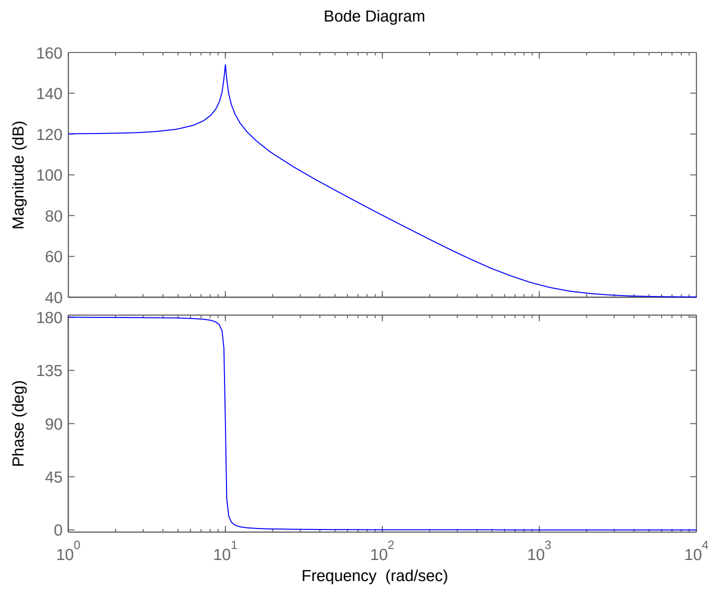

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [1 punto] Il più piccolo valore di T per il quale segnale $u(t)$ soddisfa $u(t) = u(t + Tk)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ è $T = 4$, e quindi $u(t)$ è periodico di periodo 4.

ii) [3 punti] Il segnale $u(t)$ si ottiene per ripetizione periodica, con periodo $T = 4$, del segnale

$$u_g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$$

La trasformata di Fourier del segnale dgeneratore $u_g(t)$ si calcola semplicemente osservando che

$$u_g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}[v * v](t)$$

dove

$$v(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

e usando la trasformata notevole dell'impulso rettangolare e la regola della trasformata della convoluzione:

$$U_g(f) = \frac{1}{2}\left[2\mathrm{sinc}\left(2f\right)\right]^2 = 2\mathrm{sinc}^2\left(2f\right)$$

e di conseguenza la trasformata di Fourier di $u(t)$ risulta

$$\begin{aligned} U(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{T} U_g\left(\tfrac{k}{T}\right) \delta\left(f - \tfrac{k}{T}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{4} 2\mathrm{sinc}^2\left(2\tfrac{k}{4}\right) \delta\left(f - \tfrac{k}{4}\right) \end{aligned}$$

iii) [3 punti] Il sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ in (1) è BIBO stabile, e quindi la risposta del sistema ad un segnale periodico, è un segnale periodico con lo stesso periodo. I coefficienti di Fourier y_k del segnale di uscita si possono calcolare usando la relazione

$$y_k = H(s)_{|s=j\omega_k} u_k$$

dove $u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)$ sono i coefficienti di Fourier del segnale di ingresso e $\omega_k := 2\pi\frac{k}{T} = \frac{pi}{2}k$.

Esercizio 3.

i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è $z^2 - \left(2a - \frac{1}{2}\right)z + \left(a^2 - \frac{a}{2}\right) = (z-a)\left(z - a + \frac{1}{2}\right) = 0$. Le radici sono $z_1 = a$ e $z_2 = a - \frac{1}{2}$. Quindi il sistema è asintoticamente stabile per $-1/2 < a < 1$.

Il sistema è BIBO stabile per i valori di a che lo rendono asintoticamente stabile e, in aggiunta, si deve verificare se ci possono essere cancellazioni che lo rendano BIBO stabile anche per valori di a per i quali non è asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento è:

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2(z-a)\left(z - a + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2(z-a)\left(z - a + \frac{1}{2}\right)}$$

Le cancellazioni si verificano per: $a = 1$, $a = -1$, $a - \frac{1}{2} = 1$ e $a - \frac{1}{2} = -1$.

Se $a = -1$ la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{(z-1)}{z^2\left(z + \frac{3}{2}\right)}$$

ha un polo in $-\frac{3}{2}$ e quindi il sistema non è BIBO stabile.

Se $a = 1$ la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{(z+1)}{z^2\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

ha tutti i poli di modulo minore di uno e quindi il sistema è BIBO stabile.

Se $a = \frac{3}{2}$ la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{(z+1)}{z^2\left(z - \frac{3}{2}\right)}$$

ha un polo in $\frac{3}{2}$ e quindi il sistema non è BIBO stabile.

Se $a = -\frac{1}{2}$ la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{(z-1)}{z^2\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

ha tutti i poli di modulo minore di uno e quindi il sistema è BIBO stabile.

In conclusione il sistema è BIBO stabile per $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

ii) [3 punti] Si tratta di calcolare la risposta impulsiva associata ad una equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

Se $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2}$ si ha $n = 2$ e $m = 4$, e le in cui le radici dell'equazione caratteristica sono a e $a - \frac{1}{2}$.

Poichè $m = 4 > n = 2$, la forma generale della risposta impulsiva è:

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + d_2\delta(k-2) + d_3 a^k \delta_{-1}(k-3) + d_4\left(a-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k-3)$$

Poichè le costanti d_3 e d_4 sono da determinare, l'espressione della risposta impulsiva si può riscrivere nella forma

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + d_2\delta(k-2) + \bar{d}_3 a^{k-3}\delta_{-1}(k-3) + \bar{d}_4\left(a-\frac{1}{2}\right)^{k-3}\delta_{-1}(k-3)$$

con $\bar{d}_3 := d_3 a^3$ e $\bar{d}_4 := d_4\left(a-\frac{1}{2}\right)^3$

I coefficienti $d_0, d_1, d_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4$ si possono determinare imponendo i valori della risposta impulsiva $h(0), h(1), h(2), h(3), h(4)$ che si ottengono risolvendo

$$h(k) - \left(2a-\frac{1}{2}\right)h(k-1) + \left(a^2-\frac{a}{2}\right)h(k-2) = \delta(k-2) - \delta(k-4), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

con condizione iniziale $h(k) = 0$ per $k < 0$. In particolare si ottiene: $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, $h(2) = 1$, $h(3) = \left(2a-\frac{1}{2}\right)$ e $h(4) = \left(2a-\frac{1}{2}\right)^2 - (a^2-\frac{a}{2}) - 1$.

Di conseguenza si ha: $d_0 = h(0) = 0$, $d_1 = h(1) = 0$, $d_2 = h(2) = 1$ e

$$\begin{cases} h(3) &= \bar{d}_3 + \bar{d}_4 &= \left(2a-\frac{1}{2}\right) \\ h(4) &= \bar{d}_3 a + \bar{d}_4\left(a-\frac{1}{2}\right) &= \left(2a-\frac{1}{2}\right)^2 - (a^2-\frac{a}{2}) - 1 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\begin{cases} \bar{d}_3 &= 2a^2 - 2 \\ \bar{d}_4 &= 2a - 2a^2 + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Invece, per $a = 0$ o $a = \frac{1}{2}$ si ha $n = 1$ ed $m = 4$; l'unica radice dell'equazione caratteristica diventa $\lambda = 2a - \frac{1}{2}$ e di conseguenza la risposta impulsiva ha la forma:

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + d_2\delta(k-2) + d_3\delta(k-3) + d_4\lambda^{k-4}\delta_{-1}(k-4)$$

I valori di $h(k)$, $k = 0, .., 4$ sono gli stessi calcolati precedentemente e quindi risulta: $d_0 = h(0) = 0$, $d_1 = h(1) = 0$, $d_2 = h(2) = 1$, $d_3 = h(3) = 2a - \frac{1}{2}$ $d_4 = h(4) = \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$

iii) [3 punti] Per $a = 1$ le radici dell'equazione caratteristica sono $z_1 = 1$ e $z_2 = \frac{1}{2}$. Di conseguenza l'evoluzione libera ha la forma

$$y_\ell(k) = c_1 + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

imponendo le condizioni $y_\ell(-1) = 0$ e $y_\ell(-2) = 1$ si ottiene $c_1 = -1$ e $c_2 = \frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda la risposta forzata si può operare nel dominio delle trasformate Zeta come segue. Per $a = 1$ la funzione di trasferimento è:

$$H(z) = \frac{z+1}{z^2\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

mentre la trasformata Zeta dell'ingresso $u(t) = \delta_{-1}(k)$ è $U(z) = \frac{z}{z-1}$. Di conseguenza la trasformata zeta della risposta forzata è

$$Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{z+1}{z^2\left(z - \frac{1}{2}\right)} \frac{z}{z-1} = \frac{z+1}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

Utilizzando l'espansione in fratti semplici

$$Y_f(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}} + \frac{C}{z-1}$$

si ricava $A = 2$ e $B = -6$ e $C = 4$ da cui:

$$\begin{aligned} y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y_f\right](k) &= 2\delta(k-1) - 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\delta_{-1}(k-1) + 4\delta_{-1}(k-1) \\ &= -3\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) + 4\delta_{-1}(k-2) \end{aligned}$$

Di conseguenza la risposta complessiva del sistema risulta:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\delta_{-1}(k-2) + 4\delta_{-1}(k-2)$$