

Capitolo 3

Mappe i/u lineari, continue, invarianti e integrale di convoluzione

3.1 Rappresentazione mediante convoluzione

Una classe molto vasta di mappe ingresso/uscita lineari, continue e invarianti può essere rappresentata mediante un'operazione di convoluzione (eventualmente, come vedremo nel capitolo 5, in ambito distribuzionale).

Denoteremo con L_R^{loc} e L_+^{loc} gli insiemi delle funzioni reali di variabile reale, localmente integrabili¹, il cui supporto è rispettivamente compatto a sinistra oppure contenuto in $[0, +\infty)$. Se $h \in L_+^{\text{loc}}$ e se l'insieme delle funzioni di ingresso \mathcal{U}_R è identificato con L_R^{loc} , si consideri la mappa

$$\mathcal{A} : \mathcal{U}_R \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \mathcal{A}u = h \star u$$

con

$$(h \star u)(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

È ovvio che

- i) se il supporto di $u(\cdot)$ è contenuto in $[U, +\infty)$, il valore $(h \star u)(t)$ è nullo per $t < U$;
- ii) poiché la funzione $h(\cdot)$ è nulla per $t < 0$, la (3.1) può anche essere riscritta come

$$(h \star u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (3.2)$$

È facile verificare che la mappa \mathcal{A} definita da (3.1) (o da (3.2)) è

¹Una funzione è localmente integrabile se è sommabile (secondo Lebesgue) su ogni intervallo finito

causale, come conseguenza dell'ipotesi sul supporto di h . Infatti, per ogni $u \in \mathcal{U}_R$ e per $t < T \in \mathbb{R}$ si ha

$$\mathcal{A}(P_T u)(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)(P_T u)(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = (\mathcal{A}u)(t),$$

perciò le funzioni $P_T(\mathcal{A}u)$ e $P_T(\mathcal{A}(P_T u))$ coincidono per ogni valore di t .

lineare, come conseguenza della linearità dell'operatore di integrazione;

invariante, poiché per ogni t si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\sigma_\Delta u)(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-\tau)(\sigma_\Delta u)(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)u(\tau+\Delta)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t+\Delta} h(t+\Delta-\xi)u(\xi)d\xi = (\mathcal{A}u)(t+\Delta) = (\sigma_\Delta(\mathcal{A}u))(t) \end{aligned}$$

È utile ricordare che, a livello intuitivo, l'uscita $y(t)$ appare come somma di infiniti contributi $u(\tau)d\tau$, ciascuno pesato dal coefficiente di ponderazione $h(t-\tau)$, come riportato in figura 3.1.1.

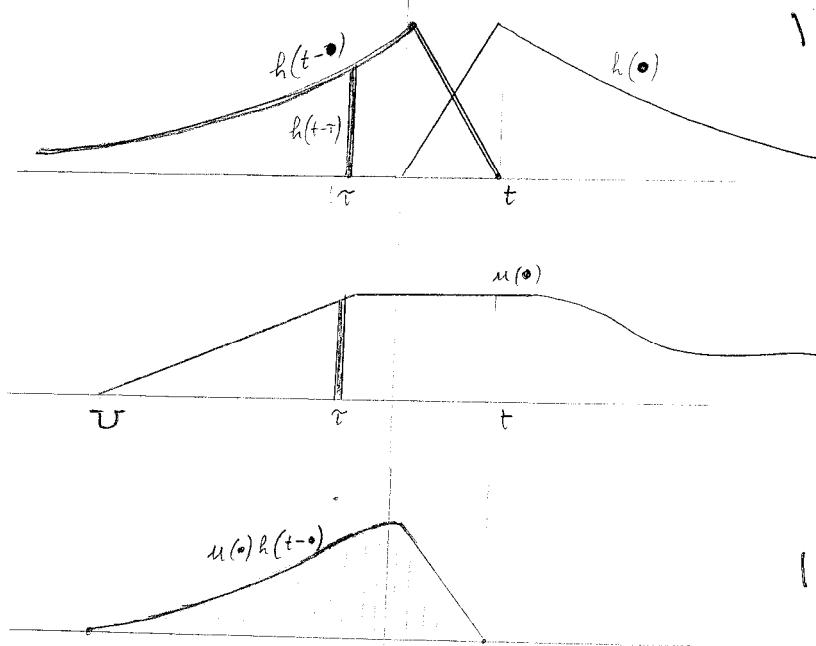


Figura 3.1.1

- **ESERCIZIO 3.1.1** Si verifichi che, se u e h sono elementi di L_R^{loc} e se $\text{supp}(h) \subseteq [H, +\infty)$, $\text{supp}(u) \subseteq [U, +\infty)$, allora
 - $h * u$ esiste ed ha supporto contenuto in $[H+U, +\infty)$;
 - per ogni $t \leq T$, $(h * u)(t) = ((P_{T-U}h) * (P_{T-H}u))(t)$;
 - per ogni scelta di Δ_1 e Δ_2 in \mathbb{R} , si ha

$$\sigma_{\Delta_1}h * \sigma_{\Delta_2}u = \sigma_{\Delta_1+\Delta_2}(h * u).$$

Ciò consente di ridurre lo studio della convoluzione fra due funzioni di L_R^{loc} a quello di due funzioni di L_+^{loc} .

- ESERCIZIO 3.1.2 [MAPPE I/U A MEMORIA FINITA] se il supporto del nucleo h è contenuto in un intervallo $[0, M]$, il valore dell'uscita al generico istante t dipende soltanto dai valori della funzione di ingresso sull'intervallo $[t - M, t)$.

Soluzione: $(h \star u)(t) = \int_{t-M}^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau$
Ad esempio, in corrispondenza al nucleo

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [0, M) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si ha $(h \star u)(t) = \int_{t-M}^t u(\tau)d\tau$.

- ESERCIZIO 3.1.3 Se il supporto di h è contenuto in un intervallo di ampiezza λ e quello dell'ingresso in un intervallo di ampiezza μ , allora l'uscita ha supporto contenuto in un intervallo di ampiezza $\lambda + \mu$.
- ESERCIZIO 3.1.4 [MAPPE I/U CON RITARDO R] Se $\text{supp}(h) \subseteq [R, +\infty)$, con $R > 0$, allora l'uscita $y = h \star u$ è ritardata di un intervallo di tempo pari a R (i.e. “inizia” con un ritardo R) rispetto all'ingresso u che la determina.

3.2 Alcune proprietà delle mappe di convoluzione i/u

Vogliamo analizzare in dettaglio alcuni risultati connessi con la struttura delle mappe (causali) di convoluzione, eventualmente restringendo i nuclei h a particolari sottoclassi di L_+^{loc} e le funzioni di ingresso a particolari sottoclassi di L_R^{loc} . In particolare, vogliamo verificare che, in molte situazioni, la mappa di convoluzione fornisca funzioni di uscita dotate di “maggiore regolarità” delle funzioni di ingresso che le hanno determinate.

Sebbene nelle ipotesi assunte all'inizio del capitolo nuclei e funzioni di ingresso debbano soddisfare specifiche condizioni sul supporto (il nucleo è nullo per $t < 0$ e gli ingressi hanno supporto compatto a sinistra), le proposizioni 3.2.1-4 saranno enunciate in termini generali, consentendo cioè ai supporti delle funzioni di estendersi da $-\infty$ a $+\infty$. Vale comunque la pena di notare che la convoluzione fra due funzioni che siano soltanto localmente integrabili, ma prive di restrizioni sul supporto, può non essere possibile (si pensi, ad esempio, al caso in cui si abbia $h(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $u(t) = \sin(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$).

Proposizione 3.2.1 Siano $u(\cdot)$ e $h(\cdot)$ funzioni² L^1 . Allora

$$y := h \star u \in L^1, \quad \text{con} \quad \|y\|_1 \leq \|h\|_1 \|u\|_1 \quad (3.3)$$

PROVA Per ogni t risulta

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)||u(\tau)|d\tau$$

dove l'ultimo integrale può, per qualche $t \in \mathbb{R}$, assumere il valore $+\infty$.

Per valutare $\|y\|_1$, poniamo

$$\|y\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|d\tau \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \right] dt \quad (3.4)$$

² $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione L^1 se è misurabile e se $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|d\tau < \infty$. Allora si pone $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|d\tau$.

e notiamo che in (3.4) l'integrale doppio, eseguito in ordine inverso, vale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(\tau)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| dt \right] d\tau = \|u\|_1 \|h\|_1$$

Applicando il teorema di Fubini³ alla funzione $|h(t-\tau)u(\tau)|$, concludiamo che il membro di destra in (3.4) vale $\|u\|_1 \|h\|_1$ e la proposizione è provata. ■

Dalla proposizione 3.2.1 e dal punto (ii) dell'esercizio 3.2.1 segue che la mappa ingresso/uscita \mathcal{A} definita all'inizio del capitolo produce una funzione di uscita $y = h \star u$ che è integrabile su ogni intervallo finito (ossia è “localmente integrabile”). Quindi, per ogni scelta di $h \in L_R^{\text{loc}}$ la mappa associata $\mathcal{A} : u \mapsto h \star u$ fa corrispondere ad ogni ingresso in L_R^{loc} una uscita in L_R^{loc} .

La struttura della funzione $y(\cdot)$ risultante dalla convoluzione $h \star u$, con h e u funzioni L^1 , può risultare “poco regolare”: può essere non continua, non limitata, non convergere a zero per $t \rightarrow +\infty \dots$

Esempio 3.2.1 (i) La funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

è una funzione L^1 . Infatti, poiché $2 \operatorname{arctg}\sqrt{t}$ è una primitiva di $\frac{1}{(1+t)\sqrt{t}}$, per $0 < \epsilon \leq M < \infty$ si ha

$$\int_{\epsilon}^M \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} dt = 2 \operatorname{arctg}\sqrt{t} \Big|_{\epsilon}^M \quad (3.5)$$

e, quando gli estremi di integrazione vanno a 0 e a $+\infty$, si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt{t}} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, M \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg}\sqrt{t} \Big|_{\epsilon}^M = \pi.$$

(ii) Poniamo ora

$$h(t) = \begin{cases} f(1-t) & \text{per } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.6)$$

e $u(t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

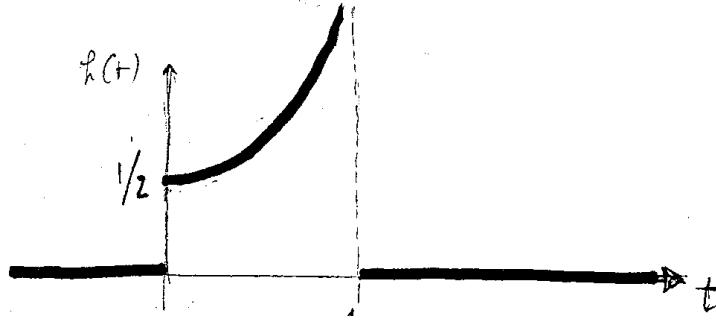


Figura 3.2.1

³ $\int \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int dx_1 \int f(x_1, x_2) dx_2 = \int dx_2 \int f(x_1, x_2) dx_1$ purché f sia sommabile in uno qualsiasi dei tre sensi

Allora u e h sono entrambe funzioni L^1 e, per la proposizione 3.2.1, anche $y(\cdot) \in L_+^1$. Tuttavia y non è limitata, essendo

$$y(1) = \int_0^1 h(1-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^1 f^2(\tau)d\tau = \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau)^2\tau}d\tau \geq \int_0^1 \frac{1}{4\tau}d\tau = \frac{1}{4} \ln \tau \Big|_0^1 = \infty$$

(iii) Se h è come al punto (ii), ma si sceglie l'ingresso dato da

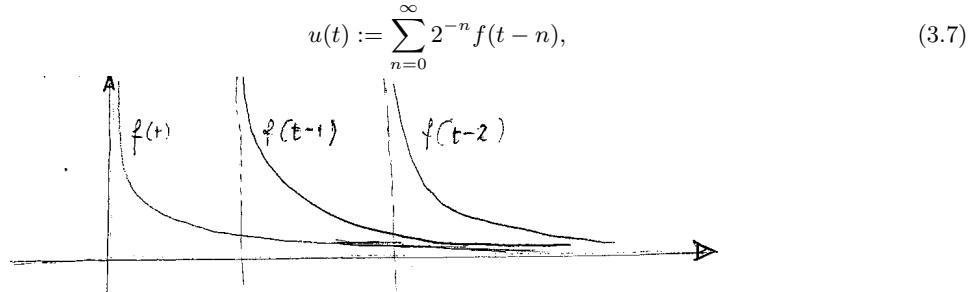


Figura 3.2.2

allora u appartiene a L_+^1 e $y = h \star u$ diverge per $t = 1, 2, 3, \dots$. Infatti, ciascuno degli addendi di (3.7) è non negativo ed è non negativo il nucleo h , quindi nel calcolo di y i contributi dei vari addendi si sommano in valore assoluto.

In conclusione, $y(\cdot)$ non è limitata, né continua, né convergente a zero per $t \rightarrow +\infty$.

Il risultato della proposizione 3.2.1 si estende a situazioni più generali, ovvero a spazi L^p , con $1 \leq p \leq \infty$. L'enunciato della proposizione che segue ha interesse nel caso di mappe ingresso/uscita causali per le quali il nucleo h appartenga a L_+^1 e l'ingresso appartenga a L_R^p , $p > 1$: la conclusione è che l'uscita è ancora una funzione di L_R^p , ed è ancora disponibile un confine sulla sua norma.

Proposizione 3.2.2* Se $h \in L^1$ e $u \in L^p$, con $1 < p < \infty$. Allora

$$y := h \star u \in L^p, \quad \text{con} \quad \|y\|_p \leq \|h\|_1 \|u\|_p \quad (3.8)$$

PROVA Per ogni valore di t risulta

$$\begin{aligned} |y(t)| &= |(h \star u)(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|^{1/p}|u(\tau)| |h(t-\tau)|^{1/q} d\tau, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nell'ultimo integrale, la funzione $f(\cdot) := |h(t-\cdot)|^{1/p}|u(\cdot)|$ è in L^p . Infatti $v := |u|^p \in L^1$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^p = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |v(\tau)| d\tau dt$$

è finito, per la proposizione 3.2.1.

D'altra parte, la funzione $g(\cdot) = |h(t-\cdot)|^{1/q}$ è in L^q , perché la sua potenza q -esima è in

L^1 . Si può allora applicare alla (3.9) la diseguaglianza di Hölder⁴ e concludere che

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |u(\tau)|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |u(\tau)|^p d\tau \right]^{\frac{1}{p}} \|h\|_1^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Calcolando la norma L^q di entrambi i membri di (3.10), otteniamo

$$\begin{aligned} \|y\|_p &\leq \|h\|_1^{\frac{1}{q}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |u(\tau)|^p d\tau \right] \right]^{\frac{1}{p}} = \|h\|_1^{\frac{1}{q}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (|h| \star |u|^p)(t) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|h\|_1^{\frac{1}{q}} \left[\|(|h| \star |u|^p)\|_1 \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|h\|_1^{\frac{1}{q}} \left[\|h\|_1 \cdot \||u|^p\|_1 \right]^{\frac{1}{p}} = \|h\|_1^{\frac{1}{q} + \frac{1}{q}} \||u|^p\|_1^{\frac{1}{p}} \\ &= \|h\|_1 \cdot \|u\|_p < \infty. \end{aligned}$$

Perciò y appartiene a L^p , essendo $\|y\|$ una quantità finita, e vale la diseguaglianza fra le norme (3.8) \blacksquare

Nella proposizione che segue esamineremo una situazione di grande interesse: quando h appartiene a L_+^1 e la funzione di ingresso è limitata, anche la funzione di uscita è limitata. L'importanza di questo risultato è ulteriormente rafforzata da un altro fatto, che sarà dimostrato in un capitolo successivo, e cioè che una mappa ingresso uscita fa corrispondere a ogni ingresso limitato una uscita limitata solo se il suo nucleo è una funzione di L^1 .

Si osservi, infine, che dal punto (iii) dell'enunciato risulta che il “passaggio attraverso” un sistema con nucleo $h \in L^1$ abbia l'effetto di regolarizzare ogni funzione limitata u , dato che $h \star u$ risulta ovunque continua.

Proposizione 3.2.3 *Indichiamo con L^∞ lo spazio delle funzioni misurabili essenzialmente limitate⁵.*

Se $h \in L^1$ e $u \in L^\infty$, allora

- i) $y := h \star u \in L^\infty$;
- ii) $\|y\|_\leq := \|h\|_1 \|u\|_\infty$;
- iii) $y(t)$ è continua per ogni t .

PROVA Si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$|h \star u|(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau$$

⁴Se $1 < p < \infty$, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e se $f \in L^p$, $g \in L^q$ allora $fg \in L^1$ e

$$|\int f g d\tau| \leq \int |f| |g| d\tau \leq [\int |f|^p d\tau]^{1/p} [\int |g|^q d\tau]^{1/q}$$

⁵una funzione misurabile f è essenzialmente limitata se esiste $M < \infty$ tale che $|f(t)| < M$ ovunque, eccetto su un insieme di misura nulla. Porremo allora $\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(t)| \leq M \text{ quasi}\}$. Se f è continua, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

$$\leq \|u\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau = \|u\|_\infty \|h\|_1$$

Quindi y appartiene a L^∞ ed è ovunque limitata (e non solo quasi ovunque). Inoltre è verificata la (ii).

Per dimostrare il punto (iii) si può ricorrere al seguente risultato (cfr. McShane, pg 227)

“Se $f(\cdot) \in L^1$, allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+h) - f(t)| dt = 0 \quad (3.11)$$

ossia $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_1 \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ ”

Si consideri ora la differenza

$$\begin{aligned} |y(t+h) - y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t+h-\tau) - h(t-\tau)] u(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t+h-\tau) - h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \|u\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t+h-\tau) - h(t-\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Poiché $h(t-\cdot)$ è in L^1 , quando $h \rightarrow 0$ si può applicare (3.11) e concludere che $y(t+h)$ tende a $y(t)$. ■

- **ESERCIZIO 3.2.1** Se $\mathcal{A} : u \mapsto h * u$ è una mappa ingresso/uscita con $h \in L_+^1$, la condizione $u \in L_R^\infty$ non implica $(h * u)(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

#Soluzione. Si scelga $h(t) = e^{-t}\delta^{(-1)}(t)$, $u(t) = \delta^{(-1)}(t)$. Allora

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{\tau-t} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = 1 - e^{-t}$$

tende a 1 per $t \rightarrow \infty$. Quindi l'uscita corrispondente a un ingresso limitato può non essere infinitesima.

- **ESERCIZIO 3.2.2** Se, come nel precedente esercizio, $\mathcal{A} : u \mapsto h * u$ è una mappa ingresso/uscita con $h \in L_+^1$ e $u \in L_R^\infty$, la condizione $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ è sufficiente a garantire che $y(t) = (h * u)(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Possiamo allora concludere che, quando il nucleo di convoluzione appartiene a L_+^1 , ogni ingresso limitato e infinitesimo per $t \rightarrow +\infty$ produce un'uscita limitata e infinitesima per $t \rightarrow +\infty$.

#Soluzione. Per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tali che

$$\int_t^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \epsilon, \quad \forall t \geq \alpha, \quad |u(\tau)| < \epsilon, \quad \forall \tau \geq \beta$$

Se $\text{supp}(u) \subseteq [b, +\infty)$, si consideri un istante arbitrario $t > \alpha + \beta + |b|$ e si noti che

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_b^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \right| \leq \int_b^t |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \int_b^{t-\alpha} |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau + \int_{t-\alpha}^t |h(t-\tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \|u\|_\infty \int_b^{t-\alpha} |h(t-\tau)| d\tau + \epsilon \int_{t-\alpha}^t |h(t-\tau)| d\tau \\ &\leq \|u\|_\infty \int_\alpha^{t-b} |h(\sigma)| d\sigma + \epsilon \|h\|_1 \leq \epsilon (\|u\|_\infty + \|h\|_1) \end{aligned}$$

Infine, per nuclei L^2 , abbiamo il seguente notevole risultato;

Proposizione 3.2.4 Se $h \in L^2$ e $u \in L^2$ allora

- i) $y := h \star u \in L^\infty$
- ii) $y(t)$ è continua per ogni $t \in \mathbb{R}$
- iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$

PROVA (i) Si applica la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \|h\|_2\|u\|_2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $|y(t)|$ è ovunque confinato superiormente da $\|h\|_2\|u\|_2$.

(iii) Fissato $\epsilon > 0$, si possono scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ sufficientemente grande, in modo che il “futuro” di u soddisfi la diseguaglianza

$$\|F_\alpha u\|_2 = \left[\int_\alpha^{+\infty} u^2(\tau)d\tau \right]^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

e $t > \alpha$ abbastanza grande in modo che risulti

$$\|P_\alpha h(t - \cdot)\|_2 = \left[\int_{-\infty}^\alpha h^2(t-\tau)d\tau \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{t-\alpha}^{+\infty} h^2(\sigma)d\sigma \right]^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Applicando ancora di diseguaglianza di Cauchy- Schwartz, si ottiene

$$|y(t)| \leq \left| \int_{-\infty}^\alpha h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| + \left| \int_\alpha^\infty h(t-\tau)u(\tau)d\tau \right| \leq \epsilon(\|u\|_2 + \|h\|_2)$$

(ii) Si puo ricorrere al seguente risultato (cfr McShane, pg. 230)

“Se $f \in L^p$, allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+h) - f(t)|^p dt = 0$$

ovvero $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$.

Si ha allora, applicando la diseguaglianza di Cauchy- Schwartz,

$$\begin{aligned} |y(t+h) - y(t)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau+h) - h(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \\ &\leq \|h(t+h-\cdot) - h(t-\cdot)\|_2 \cdot \|u\|_2, \end{aligned}$$

che tende a zero quando $h \rightarrow 0$. ■

- ESERCIZIO 3.2.3 (i) Se $h \in L_+^{\text{loc}}$ è ovunque continua, allora per ogni $u \in L^{R\text{loc}}$ l’uscita $y := h \star u$ è continua;
- (ii) se h è ovunque derivabile con derivata continua, allora per ogni $u \in L_R^{\text{loc}}$ l’uscita $y := h \star u$ è derivabile con derivata continua e si ha $Dy = (Dh) \star u$;
- (iii) se h ha ovunque derivate continue fino all’ordine m , allora per ogni $u \in L_R^{\text{loc}}$ l’uscita $y := h \star u$ è dotata di derivate continue fino all’ordine m , date dalla formula $D^{(m)}y = (D^{(m)}h) \star u$.

Suggerimento per (i). Si utilizzi la proposizione 3.2.3.

- **ESERCIZIO 3.2.4** Sia \mathcal{A} la mappa ingresso/uscita che associa ad ogni ingresso $u \in \mathcal{U}_R$ localmente integrabile la funzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

Si determini il nucleo di convoluzione h in modo che per ogni u si abbia $\mathcal{A}u = h \star u$.

¶ *Soluzione* : $h = \delta^{(1)}$.

3.3 Il teorema di Titchmarsh

Supponiamo che il nucleo di convoluzione di una mappa ingresso/uscita sia una funzione continua $h \in L_+^{\text{loc}}$, non identicamente nulla.

Il teorema di Titchmarsh fornisce una risposta negativa alla domanda seguente: “Esistono allora funzioni di ingresso continue cui corrisponde un’uscita identicamente nulla?” o, equivalentemente: “Esistono due funzioni di ingresso continue e distinte che danno luogo alla medesima funzione di uscita?”

Teorema 3.3.1 [TITCHMARSH] *Se h e u sono funzioni continue, con supporto in $[0, \infty)$ e nessuna delle due è identicamente nulla, allora $h \star u$ non è la funzione nulla* ■

Per la prova, non facile, si rinvia alla monografia di J.Mikusinski, pp.15 e segg. È chiaro, inoltre, che nulla cambia se il supporto della funzione continua u appartiene alla semiretta $[-a, +\infty)$, dato che $h \star (\sigma_{-a}u) = \sigma_{-a}(h \star u)$.

Il teorema può essere esteso a un contesto più vasto ed ha alcune interessanti conseguenze. Per quanto riguarda una sua estensione, verifichiamo che, se risulta $h \star u = 0$ con h e u in L_+^{loc} , allora una almeno delle due funzioni è nulla q.o.

A tale scopo, ricorriamo a due funzioni di test⁶ non nulle ϕ e ψ . Poiché entrambe le funzioni $h \star \phi$ e $u \star \psi$ sono continue (la convoluzione con le funzioni di test “regolarizza” h ed u), una almeno di esse deve essere nulla, come si evince applicando il teorema di Titchmarsh a

$$(h \star \phi) \star (u \star \psi) = (h \star u) \star (\phi \star \psi) = 0.$$

Se, ad esempio, è nulla $u \star \phi$, allora per ogni altra funzione di test θ risulta $u \star \theta = 0$, altrimenti $(u \star \theta) \star \phi$ non sarebbe nulla (ancora per il teorema di Titchmarsh) e quindi non sarebbe nulla $(u \star \phi) \star \theta = 0 \star \theta = 0$.

Poiché $u \star \theta = 0$ per ogni funzione di test, possiamo scegliere, in particolare, funzioni di test con valori

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{per } t \notin [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon], \quad \epsilon > 0 \end{cases}$$

e altrove con valori compresi fra 0 e 1.

⁶ovvero due funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto: l’insieme \mathcal{D} delle funzioni di test sarà discusso con qualche dettaglio nel capitolo 5.

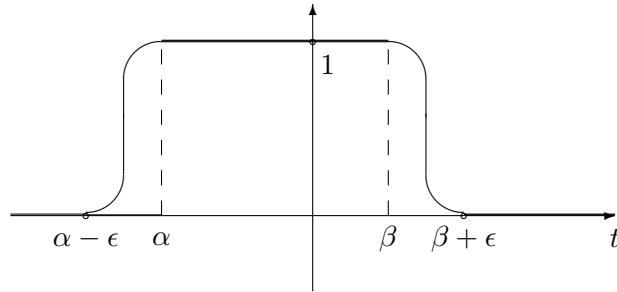


figura 3.3.1

È facile constatare, facendo tendere ϵ a zero, che per ogni scelta di $\alpha < \beta$ risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(\tau) d\tau = 0.$$

Applicando infine il teorema di differenziazione di Lebesgue:

“Se $u(\cdot)$ è localmente integrabile, per quasi ogni t si ha $\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^t u(\tau) d\tau = u(t)$ ”
si conclude che $u(t)$ è nulla per quasi ogni t e quindi ha norma L^1 nulla.

La discussione precedente prova così la

Proposizione 3.3.2 Se $h \in L_+^{\text{loc}}$ ed esiste T tale che $\|P_T h\|_1 > 0$, allora per ogni $u \in L_R^{\text{loc}}$ la condizione $h * u = 0$ implica che u sia una funzione nulla q.o. ■

Come ulteriore applicazione del teorema di Titchmarsh, cerchiamo di rispondere al seguente quesito.

Data una mappa causale ingresso/uscita \mathcal{A} , che sia rappresentabile mediante un integrale di convoluzione con nucleo h , esiste un ingresso u che, applicato al sistema, fornisce in uscita il nucleo di convoluzione h ? In altre parole, esiste un “esperimento ingresso/uscita” che consenta di identificare il nucleo, e quindi di caratterizzarne completamente la struttura di \mathcal{A} come risposta ad un particolare ingresso applicato?

È chiaro che dovrà essere risolubile per qualche $u \in L_R^{\text{loc}}$ l’equazione

$$h * u = h.$$

Escluso il caso banale in cui h è una funzione quasi ovunque nulla, dall’egualianza

$$h = h * u = h * (u * u) = h * (u * u * u) = \dots$$

e dalla proposizione 3.3.2 segue che u soddisfa le uguaglianze

$$u = u * u = u * u * u \dots \quad (3.12)$$

Si può dimostrare che, salvo la funzione nulla q.o., non esistono funzioni in L_R^{loc} che soddisfino (3.12) e pertanto, rimanendo in L_R^{loc} , nessun ingresso consente di identificare il nucleo di convoluzione di \mathcal{A} . Come vedremo, la soluzione sarà trovata ricorrendo a un ingresso impulsivo, e quindi ampliando gli ingressi ammissibili alle distribuzioni.

Un’ulteriore questione che sorge naturalmente può enunciarsi in questi termini:

“La classe di mappe ingresso/uscita lineari, invarianti, causali rappresentate dall’integrale

di convoluzione è sufficientemente ampia da coprire tutti i casi di interesse? Detto altrettanto, esiste qualche mappa ingresso/uscita \mathcal{A} che possiamo ritenere “naturale” e che tuttavia non sia esprimibile nella forma

$$\mathcal{A}u = h \star u, \quad \forall u \in \mathcal{U}_R$$

qualunque sia la scelta della funzione localmente integrabile $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$? ”

A questo proposito, notiamo subito che la mappa identità, i.e. la mappa che associa ad ogni ingresso un’uscita uguale all’ingresso, non può ottersi mediante convoluzione con un nucleo in L_+^{loc} . Non esiste infatti nessuna funzione $h \in L_R^{\text{loc}}$ che soddisfi per ogni $u \in L_R^{\text{loc}}$ la condizione

$$u = h \star u \tag{3.13}$$

Per verificarlo, basta porre $u = h$ in (3.13) e ricordare che, come detto in precedenza, $h = h \star h$ non ammette soluzioni non nulle in L_+^{loc} . In alternativa, si può notare che in (3.13) $h \star u$ è in generale più “regolare” di u . Ad esempio, se $u \in L_+^\infty$ possiede discontinuità isolate e non eliminabili, allora, per la proposizione 3.2.3, $h \star u$ è una funzione continua, quindi diversa da u su un insieme di misura positiva.

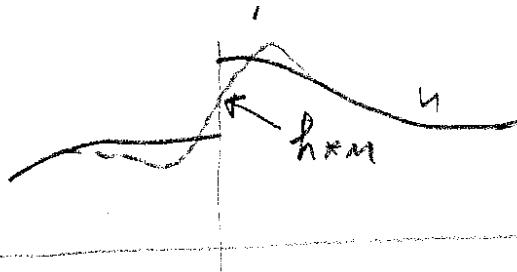


Figura 3.3.2

Come vedremo più avanti, la situazione cambia radicalmente quando si lavori in ambito distribuzionale. Infatti, un teorema generale, dovuto a L.Schwartz, assicura che, sotto condizioni molto blande, ogni mappa lineare, causale e invariante \mathcal{A} possa essere rappresentata dalla convoluzione fra un nucleo distribuzionale h , caratteristico della mappa, e la distribuzione u che rappresenta l’ingresso. Ad esempio, l’impulso di Dirac δ soddisfa la condizione $\delta \star u = u$ per ogni distribuzione u . Quindi la convoluzione con nucleo δ rappresenta l’operatore identità.

Anche le questione dell’identificazione del nucleo h trova soluzione nell’ambiente delle distribuzioni, in cui risulta $h \star \delta = h$ qualunque sia h : un ingresso corrispondente alla distribuzione di Dirac (vedremo più avanti quale significato operativo si debba attribuire a ciò) produce un’uscita eguale al nucleo di convoluzione della mappa i/u .

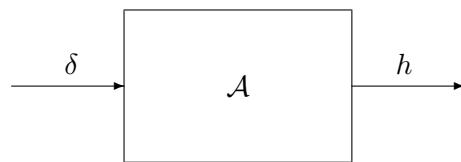


figura 3.3.3

3.4 Riferimenti bibliografici

- Jan Mikusinski, “Operational Calculus” (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, volume 8), Pergamon Press, 1967
- Edward J. McShane and Truman A. Botts, “Real Analysis”, van Nostrand, 1958 e Dover, 2005