Capitolo 13

Sistemi elementari

13.1 Introduzione

In questo capitolo intendiamo esaminare il comportamento dei sistemi del primo e del secondo ordine. Lo studio ha un duplice scopo.
Anzitutto, esso consentirà di familiarizzare con alcuni concetti introdotti in precedenza e di comprendere l'effetto della retroazione in casi nei quali è abbastanza facile verificare l'influenza dei (pochi) parametri in gioco.
D'altra parte, poiché molti sistemi possono essere grossolanamente rappresentati da modelli del primo o del secondo ordine, alcuni risultati possono applicarsi a sistemi di maggiore complessità o, quanto meno, possono suggerire possibili direzioni di indagine e dare un'idea di quali risultati sia ragionevole attendersi applicando varie strategie di controllo.

13.2 Sistemi del primo ordine

i) Funzione di trasferimento La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{K}{1 + Ts} \tag{13.1}$$

dove T è la *costante di tempo* e K è il *guadagno di Bode*. Nel seguito supporremo $K = 1$.

ii) Risposta all'impulso unitario Ricordando che la Laplace trasformata dell'impulso unitario δ è $\mathcal{L}(\delta) = 1$, si ha

$$Y(s) = \frac{1}{1 + sT} = \frac{1/T}{s + 1/T} \longrightarrow_{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{T} e^{-t/T}\, \delta^{(-1)} = w(t) \tag{13.2}$$

Per tempi positivi la derivata della risposta impulsiva è

$$w^{(1)}(t) = -\frac{1}{T^2} e^{-t/T}$$

Quindi si ha[1]

$$w(0_+) = \frac{1}{T}, \quad w^{(1)}(0_+) = -\frac{1}{T^2} \tag{13.3}$$

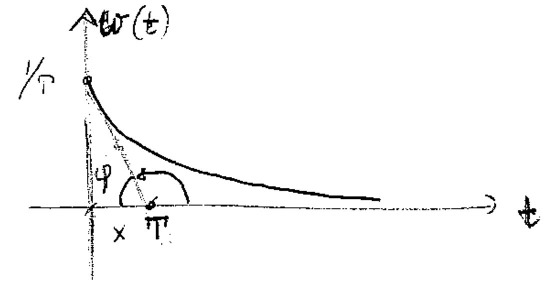

Figura 13.2.1

Dai valori riportati in (13.3) e dalla figura 13.2.1 segue $\operatorname{tg}\phi = 1/T^2$ e

$$1/T = x \operatorname{tg}\phi \ \Rightarrow \ x = T$$

Pertanto la costante di tempo T può essere interpretata come il tempo necessario per raggiungere il valore di regime (lo zero!) se la derivata conservasse il valore che ha in 0_+.

Osservazione Se la costante di Bode è diversa da 1, le formule precedentemente ottenute si modificano in

$$w(0_+0) = \frac{K}{T}, \quad w^{(1)}(0_+) = -\frac{K}{T^2}$$

e la costante di tempo T mantiene l'interpretazione precedente.

iii) Risposta al gradino unitario $\delta^{(-1)}$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s(1+sT)} = \frac{1/T}{s\,(s+1/T)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \\
y(t) &= \delta^{(-1)}[1 - e^{-t/T}] \\
y(0_+) &= \lim_{\sigma\to\infty} \sigma \frac{W(\sigma)}{\sigma} = 0; \qquad y(+\infty) = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{W(\sigma)}{\sigma}\sigma = 1 \\
y^{(1)}(0_+) &= \lim_{\sigma\to\infty} \left[\sigma^2 \frac{W(\sigma)}{\sigma} - (0_+)\right] = \frac{1}{T}
\end{aligned}$$

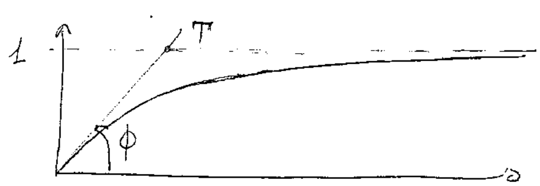

Figura 13.2.2

La pendenza dell curva nell'origine è $1/T$, ovvero $\operatorname{tg}\phi = 1/T$. Quindi T è il tempo necessario per raggiungere il valore di regime se la derivata conservasse il valore che ha in 0_+. In realtà

[1] Il valore di $w^{(1)}(0_+)$ si può anche ottenere da

$$w^{(1)}(0_+) = \lim_{\sigma\to\infty}[\sigma^2 W(\sigma) - \sigma w(0_+)] = \lim_{\sigma\to\infty}\left[\frac{\sigma^2}{1+\sigma T} - \frac{\sigma}{T}\right] = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{-\sigma}{(1+\sigma T)T} = -\frac{1}{T^2}$$

- per $t = T$ si raggiunge il valore $1 - e^{-1} = 0.69$
- per $T = 2T$ il valore raggiunto è $1 - e^{-2} = 0.86$
- per $t = 3T$ il valore raggiunto è $1 - e^{-3} = 0.9$
- per $t = 5T$ il valore è 0.993

13.3 La retroazione nei sistemi del primo ordine

i) Funzione di trasferimento

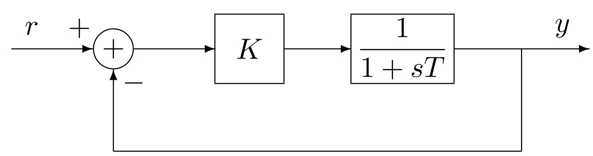

Figura 13.3.1

$$W(s) = \frac{K}{1+sT}$$

dove K è il guadagno di Bode del sistema in catena diretta, T la costante di tempo di $W(s)$. La funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è

$$T(s) = \frac{\frac{K}{1+sT}}{1+\frac{K}{1+sT}} = \frac{K}{1+K+sT} = \frac{\frac{K}{1+K}}{1+\frac{T}{1+K}s}$$

L'effetto della retroazione per grandi valori di K ($K \gg 1$) è di

- portare il guadagno di Bode di $T(s)$ a un valore

$$\frac{K}{1+K} \sim 1$$

- portare il valore della costante di tempo a un valore prossimo a zero

$$\frac{T}{1+K} \to 0$$

ii) Risposta all'impulso unitario La risposta impulsiva del sistema reazionato è

$$w_{\text{reaz}}(t) = \frac{K}{1+K}\left[\frac{K+1}{T}e^{-t\frac{K+1}{T}}\right] = \frac{K}{T}e^{-t\frac{K+1}{T}}$$

e perciò si ottiene

$$\begin{aligned}
w_{\text{reaz}}(0_+) &= \frac{K}{T} \qquad \left(= \lim_{\sigma\to\infty}(\sigma)\right)\\
w^{(1)}_{\text{reaz}}(t) &= -\frac{(K+1)K}{T^2}e^{-t\frac{K+1}{T}} \qquad \text{per } t > 0\\
w^{(1)}_{\text{reaz}}(0_+) &= -\frac{(K+1)K}{T^2} \qquad \left(= \lim_{\sigma\to\infty}[\sigma^2 T(\sigma) - \sigma w_{\text{reaz}}(0_+)]\right)
\end{aligned}$$

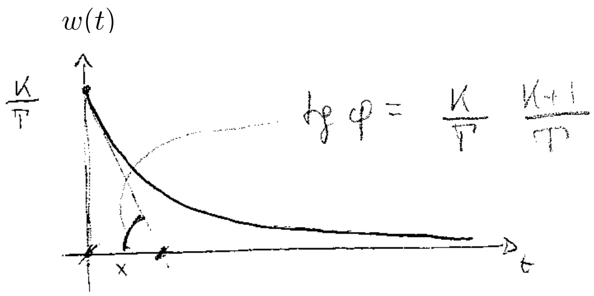

Figura 13.3.2

Il tempo x necessario per raggiungere il valore (nullo) di regime se la curva mantenesse la pendenza nell'origine è

$$x = \frac{K}{T} \Big/ \frac{K}{T}\frac{K+1}{T} = \frac{T}{K+1}$$

in accordo con l'usuale interpretazione della costante di tempo.

iii) Risposta al gradino unitario $\delta^{(-1)}$

- l'errore a regime vale

$$\lim_{t\to+\infty} e(t) = \frac{1}{1+K} \qquad \left(= \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma}{1+W(\sigma)} \right)$$

- il valore i regime dell'uscita è

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{K}{1+K}$$

Quando $K \gg 1$ la costante di tempo $T/(1+K)$ diventa molto piccola, il valore di regime dell'uscita tende a 1 e l'errore di regime diventa prossimo a zero.

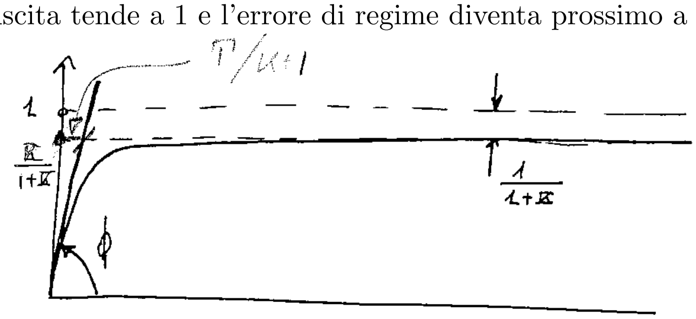

Figura 13.3.3

Nella pratica, K non può essere reso grande a piacere, perché gli amplificatori generano rumore, crescente al crescere del guadagno. Inoltre, il modello lineare in generale è valido solo per un conveniente intervallo dei valori dei parametri intorno al punto di lavoro.

Osservazione Si noti che la costante di tempo del sistema $T/(1+K)$ non coincide esattamente con l'inverso della pendenza della risposta nell'origine, dal momento che il guadagno di Bode di $T(s)$ non è unitario:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{1+K}\left(1 - e^{-t/\frac{T}{1+K}}\right) \\ y^{(1)}(0) &= \frac{K}{1+K}\frac{1+K}{T} = \frac{K}{T} \sim \frac{1}{\dfrac{T}{K+1}} \text{ se } K \gg 1 \end{aligned}$$

Quindi la tangente alla curva (i.e. la derivata) nell'origine soddisfa

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{K}{T} \sim \frac{K+1}{T}$$

mentre il tempo t richiesto per raggiungere il valore di regime $K/(1+K)$ con la pendenza nell'origine coincide con la costante di tempo:

$$t = \frac{K}{1+K}\frac{T}{K} = \frac{T}{1+K}$$

Quindi la costante di tempo può essere definita come il tempo necessario per raggiungere il valore di regime, quando la curva conserva la pendenza iniziale in 0_+.

iv) Risposta alla rampa unitaria Nella risposta alla rampa unitaria abbiamo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e(t)}{t} = \lim_{\sigma\to 0_+} \frac{1}{1+W(\sigma)} = \frac{1}{1+K}$$

ovvero

$$e(t) \sim \frac{1}{1+K}t \tag{13.3}$$

- Esercizio 13.3.1 Sviluppando in frazioni parziali la risposta $Y(s)$ quando si assuma $R(s) = 1/s^2$, si verifichi l'espressione

$$y(t) = \left[\frac{K}{1+K}t - \frac{KT}{(1+K)^2} + \frac{KT}{(1+K)^2}e^{-(1+K)t/T}\right]\delta^{(-1)}(t)$$

Si ricavi quindi l'espressione asintotica

$$e(t) = (t - y(t))\delta^{(-1)}(t) \sim \frac{1}{1+K}t + \frac{KT}{(1+K)^2}$$

che rappresenta un raffinamento di (13.3).

v) Criterio di Nyquist e luogo delle radici Il diagramma di Nyquist per

$$W(s) = \frac{1}{1+sT} = \frac{1/T}{s+(1/T)}$$

è riportato in figura 13.3.4

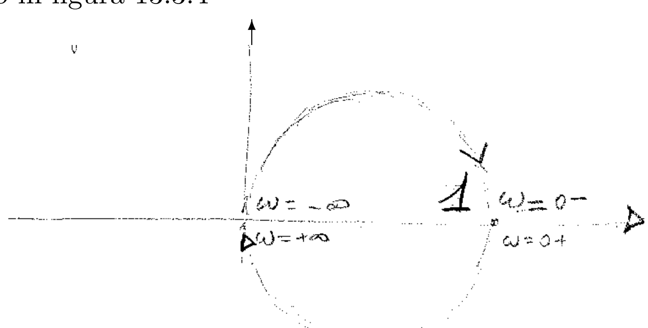

Figura 13.3.4

Per $T > 0$ si ha $P_u = 0$ e la stabilità del sistema reazionato richiede sia verificata la condizione

$$V_f(-\frac{1}{K}) = 0$$

ovvero che il punto $-1/K$ non cada entro la circonferenza.

Quanto al luogo delle radici, abbiamo

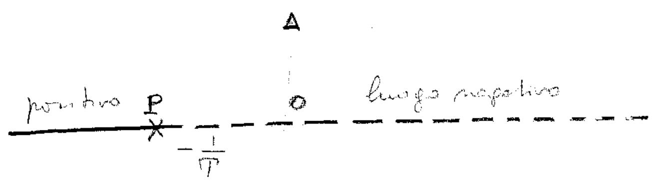

Figura 13.3.5

La transizione all'instabilità si ha quando il luogo negativo attraversa l'asse immaginario, ovvero quando $1 + KW(s)$ ha uno zero nell'origine. Ciò richiede che si abbia

$$|K| = \frac{1}{|K'|}|PO| = T\left|\frac{1}{T}\right| = 1$$

e quindi $K = -1$.

13.4 Sistemi del secondo ordine di tipo 1

La struttura più generale di un sistema del secondo ordine strattamente proprio in catena diretta è

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{a_0 + a_1 s + s^2}$$

e dipende quindi da quattro parametri.

i) Funzione di trasferimento In questo paragrafo supporremo che il numeratore di $W(s)$ sia privo di zeri, che il sistema sia di tipo 1 e che la sua costante di Bode sia unitaria, ovvero supporremo che la funzione di trasferimento $W(s)$ abbia la forma

$$W(s) = \frac{1}{s(1 + sT)}$$

Assumeremo inoltre che la costante di tempo T sia positiva.

ii) Risposta all'impulso e al gradino unitari

$$\begin{aligned} Y_{\text{imp}}(s) &= \frac{1}{s(1+sT)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \\ y_{\text{imp}}(t) &= \delta^{(-1)}(t)[1 + e^{-t/T}] \end{aligned}$$

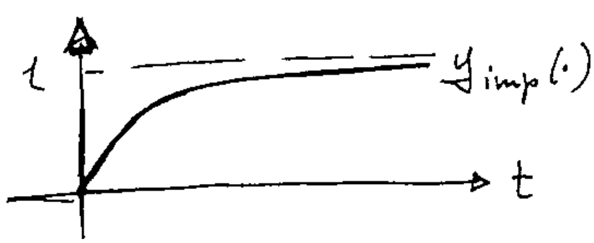

Figura 13.4.1

$$
\begin{aligned}
Y_{\text{grad}}(s) &= \frac{1}{s^2(1+sT)} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\dfrac{1}{T}} \\
y_{\text{grad}}(t) &= \delta^{(-1)}(t)[t - T + Te^{-t/T}]
\end{aligned}
$$

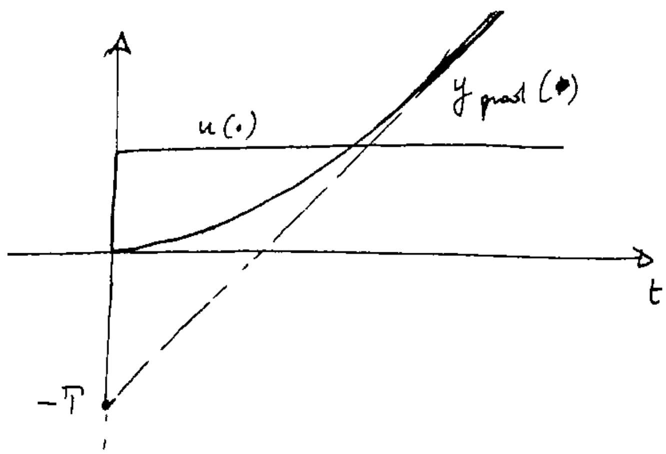

Figura 13.4.2

13.5 Retroazione in un sistema del secondo ordine di tipo 1

i) Funzione di trasferimento

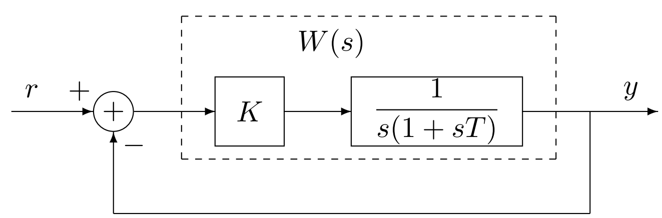

Figura 13.5.1

$$
\begin{aligned}
W(s) &= \frac{K}{s(1+sT)} \\
T(s) &= \frac{\dfrac{K}{s(1+sT}}{1+\dfrac{K}{s(1+sT)}} = \frac{K}{s^2T+s+K} = \frac{1}{\underbrace{1+\dfrac{1}{K}s+\dfrac{T}{K}s^2}_{\text{forma di Bode}}} = \frac{\dfrac{K}{T}}{s^2+\dfrac{1}{T}s+\dfrac{K}{T}}
\end{aligned}
$$

Poiché $W(s)$ è di tipo 1, otteniamo $T(0) = 1$ e ciò garantisce un errore di regime nullo nella risposta al gradino.

ii) Criterio di Nyquist e luogo delle radici Il diagramma di Nyquist di $1/j\omega(1+j\omega T)$ è riportato in figura 13.5.2, per $T > 0$. La variazione di fase, riferita a $-\dfrac{1}{k}$ con $k > 0$ è pari a $+\pi$.

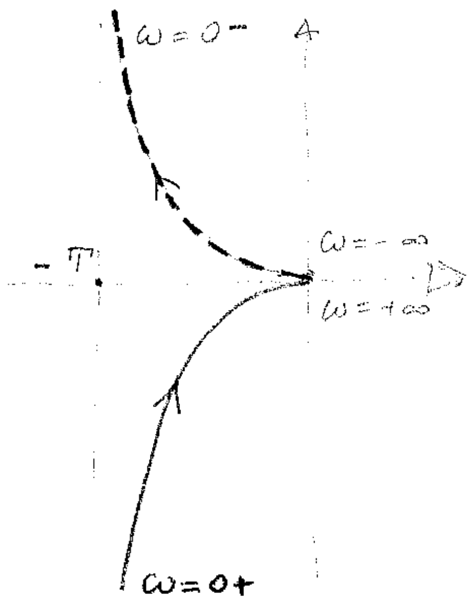

Figura 13.5.2

Poichè il sistema ha un polo nell'origine e nessuno a parte reale positiva, per $k > 0$ è soddisfatta la condizione di stabilità

$$V_f(-\frac{1}{k}) = \pi P_{\rm im} \tag{13.4}$$

Ovviamente la (13.4) non è verificata se $k < 0$, risultando allora $V_f(-\dfrac{1}{k}) = -\pi$.
Per il luogo delle radici, basta ricordare l'esempio 12.1.1. Si ottiene, per il luogo positivo, la configurazione a tratto continuo di figura 13.5.3, in cui

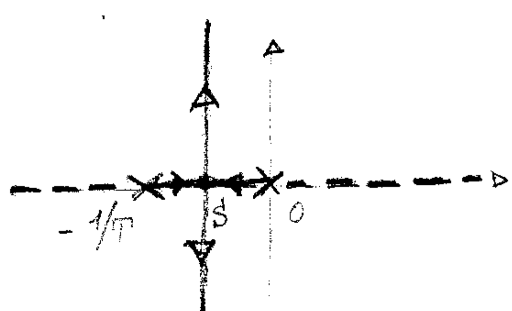

Figura 13.5.3

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-\frac{1}{T} + 0) = -\frac{1}{2T} \tag{13.5}$$

è il punto di diramazione (e anche l'origine della stella di asintoti). Con riferimento alla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\frac{1}{T}}{s(s+\frac{1}{T})}$$

e quindi assumendo $K' = 1/T$ nelle formule del paragrafo 12.3, il valore di k cui corrisponde il punto di diramazione S di figura 13.5.3 è

$$k = \frac{1}{K'}|OS|^2 = T\frac{1}{4T^2} = \frac{1}{4T} \tag{13.6}$$

Per $0 \leq k \leq \dfrac{1}{4T}$ i poli della funzione di trasferimento $T(s)$ del sistema reazionato sono reali, mentre per $k > \dfrac{1}{4T}$ sono complessi coniugati. Per $k < 0$ una radice è reale e positiva e quindi il sistema reazionato è instabile.
Limitando ci al caso $k > \dfrac{1}{4T}$, la funzione di trasferimento diventa

$$T(s) \;=\; \frac{1}{s^2T + s + k} \;=\; \frac{\frac{1}{T}}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{k}{T}} \;=\; \frac{2\omega_n\delta}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{13.7}$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{T}}, \quad \delta = \frac{1}{2\sqrt{kT}} \tag{13.8}$$

In figura 13.5.4 è illustrata la dipendenza delle radici dai parametri

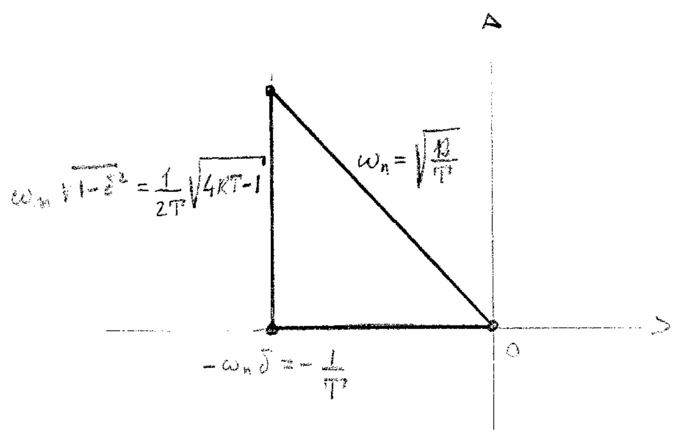

Figura 13.5.4

Poiché T è fissato, è costante anche il prodotto $\omega_n\delta$. Perciò al crescere di k cresce la pulsazione naturale ω_n e decresce lo smorzamento δ.

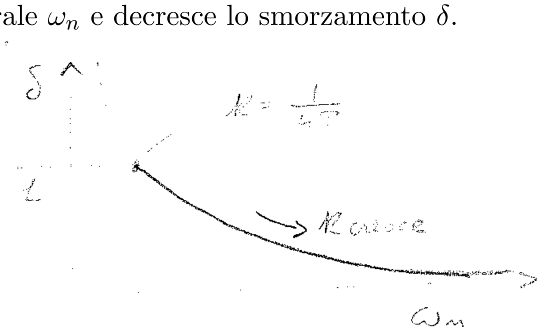

Figura 13.5.5

13.6 Sistema del secondo ordine con poli complessi

i) Funzione di trasferimento Consideriamo ora un sistema del secondo ordine con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}. \tag{13.9}$$

ii) Risposta al gradino unitario La risposta al gradino unitario è data da

$$Y(s) \;=\; \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \;=\; \frac{1}{s} - \frac{(s+\delta\omega_n) + \delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{13.10}$$

Ricordiamo che

$$\frac{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega}{(s+\delta\omega_n)^2 + \omega^2},$$

con $\omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$, è la Laplace trasformata di $e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t)$, mentre

$$\frac{s+\delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{s+\delta\omega_n}{(s+\delta\omega_n)^2 + \omega^2},$$

è la Laplace trasformata di $e^{-\delta\omega_n t}\cos(\omega t)$.
Perciò nel dominio del tempo la risposta al gradino unitario è data da

$$\begin{aligned}
y(t) &= \delta^{(-1)}(t)\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\delta\omega_n}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right] \\
&= \delta^{(-1)}(t)\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin(\omega t)\right)\right] \\
&= \delta^{(-1)}(t)\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\left(\sqrt{1-\delta^2}\cos(\omega t) + \delta\sin(\omega t)\right)\right] \\
&= \delta^{(-1)}(t)\left[1 - e^{-\delta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin(\omega t + \phi)\right] \qquad (13.11)
\end{aligned}$$

con

$$\sin\phi = \sqrt{1-\delta^2}, \quad \cos\phi = \delta, \quad \mathrm{tg}\,\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$

La risposta al gradino unitario è rappresentata in figura 13.6.1

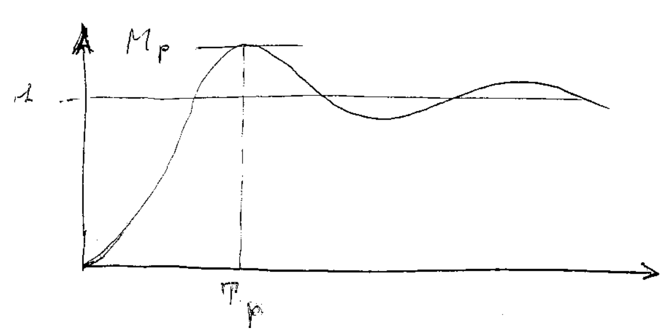

Figura 13.6.1

Per determinare il valore massimo M_p e l'istante T_p in cui si verifica, calcoliamo la derivata di $y(\cdot)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \mathcal{L}^{-1}[sY(s)-y(0)] = \mathcal{L}^{-1}\frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{\omega}e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t)\\ &= \frac{\omega^2}{(1-\delta^2)\omega}e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\delta^2}}e^{-\delta\omega_n t}\sin(\omega t)\end{aligned}$$

Essa si annulla negli istanti $t = k\pi/\omega$ e quindi, per $t > 0$, per la prima volta all'istante

$$T_p = \frac{\pi}{\omega}$$

In corrispondenza troviamo

$$y(T_p) = M_p = 1 + e^{-\delta\omega_n T_p} = 1 + e^{-\pi\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 1 + e^{-\pi/\mathrm{tg}\phi}$$

La *massima sovraelongazione* rispetto al valore di regime

$$S = \frac{M_p - 1}{1} = e^{-\pi\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \tag{13.12}$$

dipende soltanto dallo smorzamento δ e tende al valore 1 quando $\delta \to 0$. Si noti che c'è sovraelongazione per ogni $|\delta| < 1$.

iii) PARAMETRI EMPIRICI Su una risposta qual è quella di figura 13.6.1, o su risposte analoghe, non necessariamente generate da sistemi con la funzione di trasferimento (13.9), è utile, anche al fine di stabilire le specifiche di progetto, definire alcuni parametri empirici:

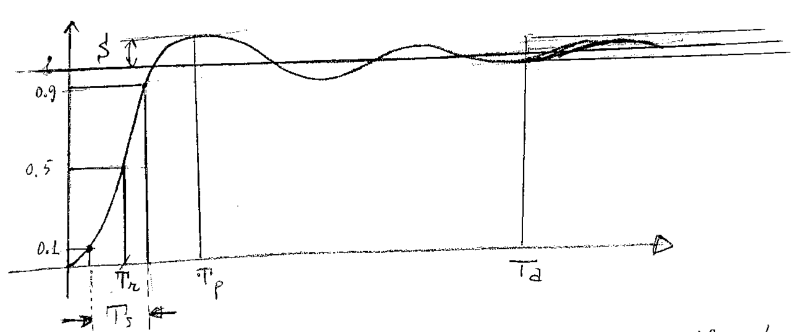

Figura 13.6.2

- il *tempo di ritardo* T_r, inteso come il tempo necessario per raggiungere il 50% del valore finale;
- il *tempo di salita* T_s, inteso come il tempo necessario per passare da 0.1 a 0.9 volte il valore finale;
- il *tempo di assestamento* T_a, ossia il tempo necessario perché l'uscita rimanga definitivamente entro il 5% del suo valore finale;
- l'istante di massima sovraelongazione (o di picco) T_p;

- la *massima sovraelongazione* S, definita da

$$S = \max_t y(t) - \lim_{t \to +\infty} y(t)$$

e usualmente definita in termini percentuali rispetto al valore finale.

iv) Risposta alla rampa unitaria La trasformata di Laplace della risposta alla rampa unitaria è

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \tag{13.13}$$

e può essere riespressa, ricorrendo allo sviluppo in frazioni parziali,nella forma

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2\delta/\omega_n}{s} + \frac{(2\delta/\omega_n)s - (1 - 4\delta^2)}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{13.14}$$

Nel dominio del tempo l'uscita è

$$y(t) = \delta^{(-1)}(t) \left[t - 2\delta\omega_n + \frac{2\delta}{\omega_n} e^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t) - \frac{1 - 2\delta^2}{\omega} e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t) \right] \tag{13.15}$$

come si vede riscrivendo l'ultimo addendo di (13.14) nella forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \left[\frac{2\delta}{\omega_n}(s + \delta\omega_n) - 2\delta^2 - 1 + 4\delta^2 \right] \\ = \; & \frac{2\delta}{\omega_n} \frac{s + \delta\omega_n}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} - \frac{1 - 2\delta^2}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}. \end{aligned}$$

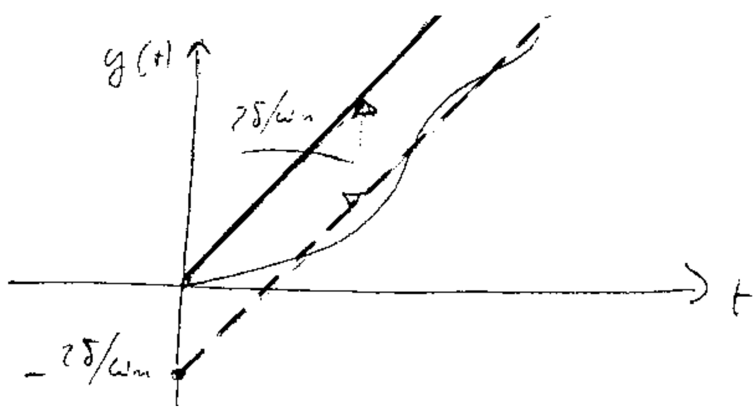

Figura 13.6.3

Si vede allora che l'errore tende asintoticamente a $2\delta/\omega_n$.
Alle medesime conclusioni si perviene applicando il teorema del valore finale

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + W(s)} \\ \lim_{t \to +\infty} e(t) &= \lim_{\sigma \to 0_+} \frac{1}{\sigma W(\sigma)} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{T\omega_n^2} = \frac{2\delta\omega_n}{\omega_n^2} = \frac{2\delta}{\omega_n} \end{aligned} \tag{13.16}$$

- Esercizio 13.6.1 Si consideri il sistema di figura 13.6.4

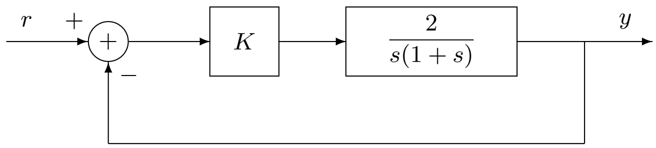

Figura 13.6.4

1. Per quali valori di $K > 0$ il sistema ha poli reali e negativi?
2. Per quali valori di $K > 0$ il sistema ha poli complessi coniugati a parte reale negativa?
3. Per quali valori di $K > 0$ il sistema diventa instabile?
4. per quale valore di $K > 0$ il sistema è stabile, con poli complessi coniugati e massima sovraelongazione nella risposta al gradino pari al 10% del valore di regime?

♯ *Soluzione. La funzione di trasferimento ad anello chiuso è*

$$T(s) = \frac{\frac{2K}{s(s+1)}}{1 + \frac{2K}{s(s+1)}} = \frac{2K}{s(s+1) + 2K} = \frac{2K}{s^2 + s + 2K} = \frac{1}{1 + \frac{s}{2K} + \frac{s^2}{2K}} \tag{13.17}$$

Per ogni valore positivo di K i coefficienti del polinomio a denominatore sono positivi, quindi il sistema è stabile (i.e. ha poli a parte reale negativa).
I poli sono reali se il discriminante del polinomio a denominatore $\Delta = 1 - 8K$ è maggiore o eguale a zero, ossia se

$$K \leq 1/8,$$

mentre sono complessi coniugati se $K > 1/8$.
Per $K > 1/8$ riscriviamo (13.17) nella forma

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $\omega_n = \sqrt{2K}$ e quindi con

$$2\delta\omega_n = 1 \Rightarrow \delta = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2K}} \tag{13.18}$$

Tenuto conto di (13.12), la condizione per avere una sovraelongazione pari a 0.1 è che risulti

$$\begin{aligned} 0.1 &= e^{-\pi \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \\ -\ln 0.1 = \ln 10 &= \frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \left(\frac{\pi}{\ln 10}\right)^2 = 1.86 &= \frac{1-\delta^2}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} - 1 = 8K - 1 \end{aligned}$$

da cui segue $K = 0.357$.