

STRUTTURE RICORSIVE PER L'ELABORAZIONE DI DATI BIDIMENSIONALI

E. Fornasini, G. Marchesini
Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica
Università di Padova

1. INTRODUZIONE

L'elaborazione lineare di dati unidimensionali (1D) è basata su algoritmi riconducibili fondamentalmente alla convoluzione, alle equazioni alle differenze e alle funzioni di trasferimento.

Non tutti i legami fra i dati di ingresso e di uscita descritti dagli algoritmi di tipo convolutorio possono essere descritti anche da algoritmi ricorsivi quali le equazioni alle differenze e le funzioni di trasferimento (razionali): tale possibilità si ha soltanto se è razionale la serie che costituisce il nucleo di convoluzione. Nella struttura degli algoritmi ricorsivi 1D gioca un ruolo importante l'ordine totale di cui è dotato l'insieme dei tempi, nel senso che presi due istanti qualsiasi è sempre possibile stabilire quale dei due precede l'altro e quindi introdurre una relazione di causalità fra coppie arbitrarie di eventi.

Nell'elaborazione lineare di dati bidimensionali (2D) gli algoritmi che si usano sono dello stesso tipo, e la possibilità di sostituire ad una convoluzione una equazione alle differenze è ancora legata alla razionalità del nucleo di convoluzione. Come si vedrà, esistono peraltro due fondamentali differenze rispetto al caso 1D. La prima riguarda la struttura d'ordine che si introduce nel piano discreto, che è il prodotto degli ordini sugli assi. Trattandosi di un ordine parziale, non è sempre definita una relazione di precedenza fra due punti e la relazione di causalità non vale fra coppie di eventi qualsiasi. La seconda differenza riguarda le strutture algebriche che rappresentano l'evoluzione dinamica degli algoritmi nei due casi: l'anello dei polinomi in una indeterminata nel caso 1D e quello dei polinomi in due indeterminate nel caso 2D. Com'è noto, molte proprietà strutturali comunemente usate nell'analisi di algoritmi 1D sono strettamente legate alla fattorizzabilità di ogni polinomio sul corpo complesso in prodotto di polinomi del primo grado, alla sviluppabilità in frazioni parziali di ogni rapporto di polinomi e al fatto che l'anello dei polinomi in una variabile è un dominio a ideali principali. Poichè per i polinomi in due indeterminate le proprietà precedenti non sono valide, nell'analisi e sintesi degli algoritmi 2D non sono in generale estendibili i risultati del caso 1D e si deve

far ricorso a tecniche più complesse.

Scopo di queste note è di confrontare le principali proprietà strutturali degli algoritmi 1D e 2D soprattutto con riferimento alla loro rappresentazione mediante equazioni di stato. Si è ritenuto utile per ogni argomento far precedere un sintetico richiamo sul caso 1D ad una presentazione più dettagliata del caso 2D.

2. RAPPRESENTAZIONI INGRESSO-USCITA

Nell'elaborazione lineare 1D e 2D il legame fra i dati in ingresso e in uscita è fornito dalla convoluzione, dall'equazione alle differenze e dalla funzione di trasferimento.

1D

Un operatore di convoluzione viene assegnato mediante una successione $s(i)$, associando ad ogni successione di dati d'ingresso $u(i)$ quella dei dati di uscita espressa da

$$y(h) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} s(h-i)u(i) \quad (1)$$

La convergenza di (1) è assicurata quando si vincolino s ed u ad appartenere a spazi opportuni (p.es. s ed u in l^2 oppure s ed u entrambe con supporto compatto a sinistra). In particolare, se il supporto di s è contenuto nel semiasse positivo \mathbb{Z}_+ , il legame (1) è di tipo causale.

La struttura generale di un'equazione alle differenze è del tipo

$$\sum_{i \in I} a_i y(h+i) = \sum_{j \in J} b_j u(h+j) \quad (2)$$

con I e J sottoinsiemi finiti di \mathbb{Z} . Il legame fra i dati di ingresso e di uscita è causale quando si ponga $I = \{0, 1, \dots, n\}$, $J = \{0, 1, \dots, n-1\}$ e si assuma $a_n = 1$. D'ora in poi ci riferiremo ad equazioni (2) causali.

Si noti che, nell'aggiornamento di un passo

- i) l'istante nel quale - sulla base delle precedenti elaborazioni - si calcola il valore dell'uscita, è individuato dall'ordine totale dell'insieme dei tempi, ovvero - quando si siano calcolati $\dots, y(t-1)$, $y(t)$ - il successivo valore da ottenere è necessariamente $y(t+1)$.

ii) I dati di cui bisogna disporre per l'aggiornamento di un passo sono gli n campioni dell'ingresso e gli n campioni dell'uscita precedenti l'istante in cui si calcola y .

iii) I dati di cui si deve disporre per inizializzare l'intero processo di elaborazione sono soltanto gli n campioni dell'ingresso e gli n dell'uscita che vengono utilizzati per compiere il primo passo dell'elaborazione.

Infatti ad ogni nuovo passo si utilizzano un nuovo valore dell'ingresso, il valore dell'uscita calcolato al passo precedente e parte dei dati di ingresso e di uscita utilizzati al passo precedente.

Rappresentando la successione dei dati in ingresso e in uscita con serie formali

$$U(z) = \sum_i u(i)z^i, \quad Y(z) = \sum_i y(i)z^i$$

il legame ingresso uscita è esprimibile mediante una funzione di trasferimento

$$W(z) = p/d$$

$$Y(z) = W(z)U(z)$$

con p e d polinomi in z^{-1} . La ipotesi di causalità si traduce nella condizione $\deg d > \deg p$.

2D

Gli ingressi e le uscite sono in questo caso successioni con due indici $u(i,j)$ e $y(i,j)$. Il nucleo di convoluzione è una successione $s(i,j)$ e l'operatore è espresso dalla relazione

$$y(h,k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s(h-i,k-j)u(i,j) \quad (3)$$

I tipi più comuni di causalità cui si fa riferimento sono

- causalità a semipiano, in cui $y(h,k)$ dipende dai valori $u(i,j)$ con $i < h$. Ciò corrisponde ad assumere che $s(i,j)$ sia 0 per $i \leq 0$ (ovviamente, si ha una causalità a semipiano anche assumendo $s(i,j)=0$ per $j \leq 0$);

- causalità a quarto di piano, in cui $y(h,k)$ dipende dai valori $u(i,j)$ con $(i,j) < (h,k)$, i.e. $i \leq h$, $j \leq k$ e $(i,j) \neq (h,k)$. Ciò corrisponde ad assumere che $s(i,j)$ possa essere diversa da zero soltanto per $(0,0) < (i,j)$.

Nel seguito si farà riferimento a quest'ultimo tipo di causalità.

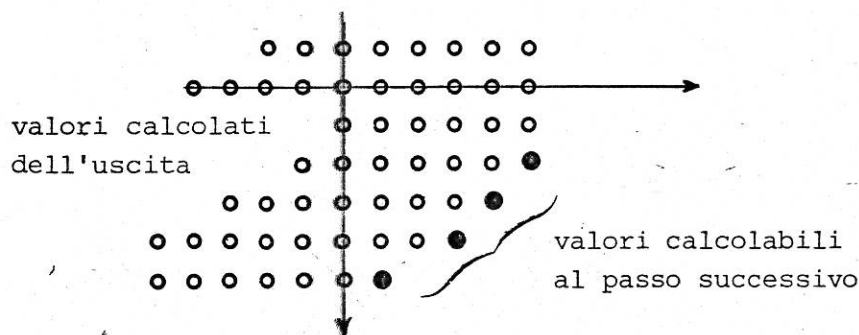
La struttura generale di un'equazione causale alle differenze è

$$\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} a_{ij} y(h+i, k+j) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} b_{ij} u(h+i, k+j) \quad (4)$$

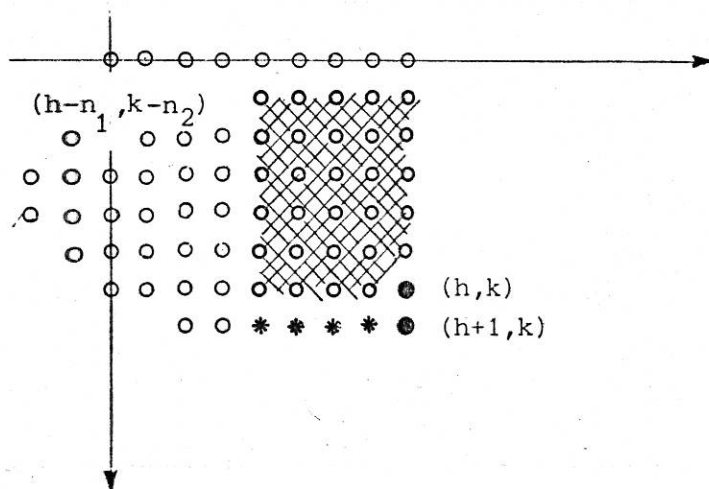
con $a_{n_1 n_2} = 1$, $b_{n_1 n_2} = 0$.

Si noti che:

- i) una volta che si è proceduto al calcolo dei valori dell'uscita fino ad un certo passo, non è univocamente individuato - in generale - in quale punto di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ debba essere calcolato il successivo valore dell'uscita



- ii) si supponga di aver calcolato $y(h,k)$ sulla base dei valori d'ingresso e di uscita $y(h-i, k-j)$, $u(h-i, k-j)$ relativi all'area tratteggiata, e di voler calcolare l'uscita in uno dei due istanti $(h+1, k)$ o $(h, k+1)$. Dalla struttura dell'equazione è immediato constatare che il calcolo di $y(h+1, k)$ richiede la conoscenza



dei valori di ingresso e di uscita nei punti $(h+1, k-i)$ $i=1, 2, \dots, n_2$, indicati con asterisco in figura, valori che non appartengono all'insieme dei dati utilizzati per il calcolo di $y(h, k)$.

iii) I dati di cui si deve disporre per inizializzare l'intero processo di elaborazione sono in numero infinito: infatti col procedere dell'elaborazione esistono sempre passi in corrispondenza ai quali si devono introdurre dati iniziali non compresi fra quelli precedentemente utilizzati o elaborati.

Rappresentando gli ingressi e le uscite con serie formali in z_1 e z_2 :

$$U(z_1, z_2) = \sum_{ij} u(i, j) z_1^i z_2^j, \quad Y(z_1, z_2) = \sum_{ij} y(i, j) z_1^i z_2^j$$

il legame ingresso-uscita causale è espresso da una funzione di trasferimento

$$W(z_1, z_2) = p/d \text{ con } p = \sum_{i,j=0}^{n_1, n_2} b_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}, \quad q = \sum_{i,j=0}^{n_1, n_2} a_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}, \quad a_{n_1, n_2} = 1, \quad b_{n_1, n_2} = 0.$$

Si ha così

$$Y(z_1, z_2) = W(z_1, z_2) U(z_1, z_2)$$

3. RAPPRESENTAZIONE INTERNA

Le equazioni alle differenze sia nel caso 1D che 2D conducono direttamente alla introduzione di modelli di stato, pur di considerare come componenti del vettore di stato opportuni valori dell'ingresso e dell'uscita che figurano nelle equazioni stesse.

1D

La equazione alle differenze

$$y(h+n) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i u(h+i) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(h+i)$$

può essere riscritta nella forma

$$y(h+n) = C x(h+n)$$

ponendo

$$x(h+n)^T = [u(h)u(h+1) \dots u(h+n-1) | y(h) \dots y(h+n-1)]$$

$$c = [b_0 b_1 \dots b_{n-1} | -a_0 -a_1 \dots -a_{n-1}]$$

Per il calcolo di $y(h+n+1)$ occorre ovviamente disporre del "vettore di stato"

$x(h+n+1)$. Esso può essere calcolato ricorsivamente a partire da $x(h+n)$ e da $u(h+n)$.

Dalla struttura stessa del vettore di stato si ha

$$x(h+n+1) = Ax(h+n) + Bu(h+n)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots \\ b_0 & \dots & b_{n-1} & -a_0 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2n}$

In tal modo le equazioni del modello di stato assumono la forma usuale

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5b)$$

La (5a) è un'equazione vettoriale alle differenze del primo ordine di tipo 1D, e come tale è inizializzata assegnando il vettore x in un istante generico.

Dalle matrici (A,B,C) si può risalire alla funzione di trasferimento

$$W(z) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{-i} / \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} = C(I-Az)^{-1}B$$

e viceversa, data una funzione di trasferimento razionale propria, il metodo precedente consente di costruire un modello di stato.

2D

L'equazione alle differenze (4) può essere riscritta nella forma

$$y(h,k) = \sum_{\substack{(i,j) \neq (n_1, n_2) \\ (0,0)}}^{(n_1, n_2)} b_{ij} u(h+i-n_1, k+j-n_2) - \sum_{\substack{(i,j) \neq (n_1, n_2) \\ (0,0)}}^{(n_1, n_2)} a_{ij} y(h+i-n_1, k+j-n_2) \quad (6)$$

$$= Cx(h,k)$$

con

$$C = \left[b_{00} \dots b_{n_1, n_2-1} \mid b_{n_1-1, n_2} \mid -a_{00} \dots -a_{n_1, n_2-1} \mid -a_{n_1-1, n_2} \right]$$

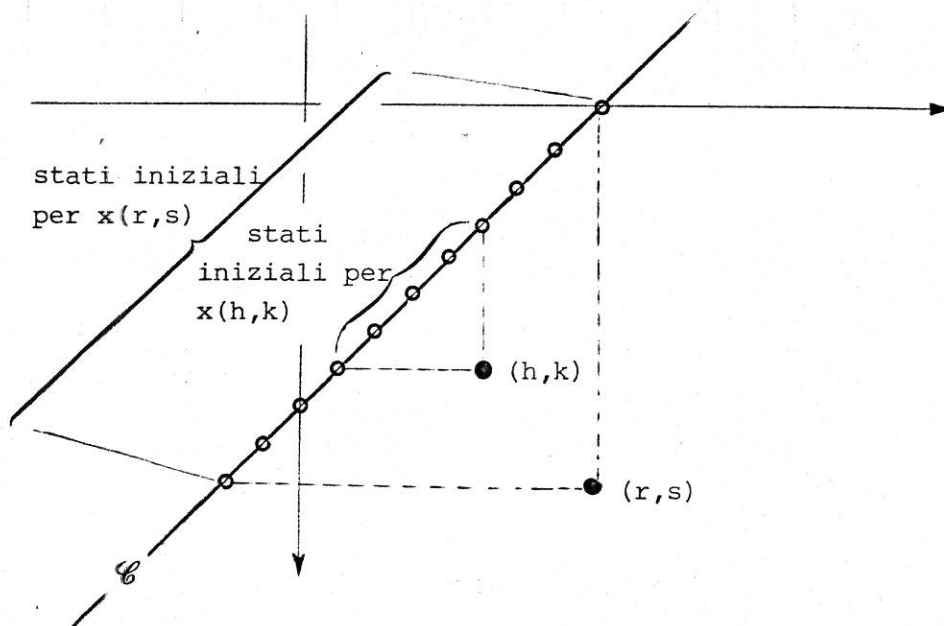
e

$$x^T(h,k) = \left[u(h-n_1, k-n_2) \dots u(h, k-1) u(h-1, k) \mid y(h-n_1, k-n_2) \dots y(h-1, k) \right]$$

Per procedere a calcolare il valore dell'uscita in istanti successivi ad (h,k) è necessario determinare in quale modo evolve il "vettore di stato" $x(h,k)$. Dalla sua definizione e dalla struttura dell'equazione alle differenze (6) si possono determinare delle matrici A_1, A_2, B_1 e B_2 in modo tale che sia

$$x(h+1, k+1) = A_1 x(h+1, k) + A_2 x(h, k+1) + B_1 u(h+1, k) + B_2 u(h, k+1) \quad (7)$$

L'equazione (7) è un'equazione vettoriale alle differenze del primo ordine di tipo 2D, per la cui inizializzazione non è sufficiente la conoscenza dello stato in un solo punto. Col procedere dell'elaborazione è anzi necessario disporre di stati iniziali in un numero via via crescente di punti e per compiere un numero non limitato di passi di elaborazione e si devono assegnare infiniti stati iniziali su un "insieme di separazione" $\mathcal{C} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



4. MINIMALITA' DELLE RAPPRESENTAZIONI DI STATO

Il modo in cui si è definito lo stato nel paragrafo precedente è insoddisfacente quanto meno per la dimensione eccessiva del vettore di stato cui si perviene.

Nel caso 1D, data una rappresentazione ingresso-uscita, si può arrivare ad una rappresentazione di stato del tipo (5) anche in modo assiomatico. Più precisamente, per definire lo stato in $t=0$, si considerano gli ingressi per $t \leq 0$, si assume che due ingressi u_1 ed u_2 siano equivalenti secondo Nerode ($u_1 \sim_N u_2$) se le uscite corrispondenti y_1 ed y_2 sono uguali per $t > 0$, e si identificano gli stati in $t=0$ come le classi di equivalenza sugli ingressi.

Lo spazio di stato risulta quindi definito come l'insieme delle classi di equivalenza di Nerode

$$X_N = U/\sim$$

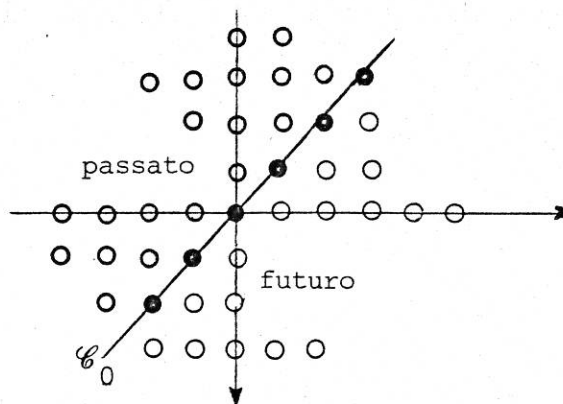
E' importante notare che X_N ha dimensione finita se e solo se il legame ingresso-uscita è rappresentabile con una funzione razionale e che in questo caso l'aggiornamento è del tipo (5).

Le principali proprietà del modello di stato ottenuto con le classi di Nerode sono

- (i) la dimensione dello stato è minima entro la classe dei modelli (5).
- (ii) il modello è unico a meno di cambiamenti di base in X_N .
- (iii) il modello è raggiungibile e osservabile.

Per le rappresentazioni ingresso-uscita 2D si possono ancora utilizzare le classi di equivalenza sugli ingressi, facendo però riferimento al passato e al futuro di un

insieme di separazione \mathcal{C}_0 .



Gli ingressi u_1 e u_2 con supporto nel passato di \mathcal{C}_0 sono equivalenti secondo Nerode ($u_1 \sim u_2$) se le uscite corrispondenti y_1 e y_2 coincidono nel futuro di \mathcal{C}_0 . Come spazio di stato si assume l'insieme delle classi di equivalenza

$$X_N = U/\sim$$

A differenza di quanto si è detto nel caso 1D, X_N ha dimensione infinita anche se il legame ingresso-uscita è esprimibile con una funzione razionale.

Le principali proprietà del modello 2D di Nerode sono:

i) Dato un modello di stato 2D

$$\begin{aligned} x(h+1, k+1) &= A_1 x(h+1, k) + A_2 x(h, k+1) + B_1 u(h+1, k) + B_2 u(h, k+1) y(h, k) = \\ &= Cx(h, k) \end{aligned} \quad (8)$$

che realizzi il legame ingresso-uscita in considerazione, si indichi con \mathcal{X} lo spazio prodotto dagli spazi di stati nei punti di \mathcal{C}_0 , i.e. lo spazio i cui elementi sono le successioni $\{x(i, -i)\}$, $i \in \mathbb{Z}$ (spazio di stato "globale"). Allora X_N è un sottospazio di \mathcal{X} .

ii) Il modello di Nerode è raggiungibile e osservabile per costruzione, mentre taluni legami ingresso-uscita possono non ammettere realizzazioni (8) nelle quali lo spazio di stato globale sia raggiungibile e osservabile.

Ciò pone in evidenza una sostanziale differenza fra i modelli 1D e 2D: in questi ultimi non c'è legame diretto fra lo "spazio di stato" sul quale viene operato il passo elementare di aggiornamento e lo spazio minimo dei dati iniziali (spazio delle classi di Nerode). Più precisamente il modello dinamico degli stati di Nerode non è rappresentabile con equazioni del tipo (8), e non dà informazioni sulla dimensione minima del vettore $x(\cdot, \cdot)$ che compare in tali equazioni.

Per i legami ingresso-uscita 1D esistono procedimenti lineari alternativi alla costruzione delle classi di equivalenza di Nerode per ottenere modelli di stato di di mensione minima. Essi sono basati sulla equivalenza fra minimalità e raggiungibilità e osservabilità. Anche per i modelli 2D esistono tecniche lineari per ridurre la di mensione dello spazio di stato. In questo caso però non si perviene - in generale - a modelli minimi.

Si noti anche che, a differenza di quanto avviene nel caso 1D, la dimensione del mo dello di stato minimo 2D dipende dal corpo su cui sono dati i coefficienti (e ciò fa pensare che l'eventuale procedimento di minimizzazione si basi su tecniche nonlineari) e dalla struttura del numeratore della funzione di trasferimento.

5. MODELLI DI STATO CON MATRICI COMMUTATIVE

Per particolari legami ingresso-uscita ci si può riferire a modelli di stato più semplici del modello (8). Se $W(z_1, z_2)$ è separabile, i.e. se il denominatore fattorizz a come prodotto di un polinomio in z_1 e di un polinomio in z_2

$$d(z_1, z_2) = d_1(z_1) d_2(z_2)$$

è sempre possibile realizzare $W(z_1, z_2)$ con un modello del tipo

$$x(h+1, k+1) = A_1 x(h+1, k) + A_2 x(h, k+1) - A_1 A_2 x(h, k) + B u(h, k)$$

$$y(h, k) = C x(h, k)$$

con A_1 e A_2 matrici commutative (i.e. $A_1 A_2 = A_2 A_1$).

Si tratta di un modello del secondo ordine, nel senso che per calcolare $x(h+1, k+1)$ necessitano i valori di x e di u in punti che distano più di un passo da $(h+1, k+1)$. All'interno della classe di questi modelli 2D il parallelo con la teoria 1D è molto più stretto. Infatti l'evoluzione dello stato è esprimibile nella forma

$$z_1 z_2 (I - A_1 z_1 - A_2 z_2 + A_1 A_2 z_1 z_2)^{-1} B u = \underbrace{z_1 (I - A_1 z_1)^{-1}}_{2^a \text{ operazione, in } z_1} \underbrace{[z_2 (I - A_2 z_2)^{-1} B u]}_{1^a \text{ operazione, in } z_2}$$

Per i modelli di stato (5) la stabilità interna corrisponde ad assumere che $x(t) = A^t x(0)$ converga a 0 per $t \rightarrow \infty$ qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$.

Una condizione equivalente è che il polinomio $\det(I-Az)$ sia diverso da zero nel disco $|z| \leq 1$, e cioè che gli autovalori di A abbiano tutti modulo minore di 1. Come conseguenza, se un modello di stato è internamente stabile, allora è BIBO stabile il suo legame ingresso-uscita. In generale, il viceversa non è vero, salvo nel caso in cui il modello di stato sia una realizzazione minima. Questo implica che ogni legame ingresso-uscita BIBO stabile ammette modelli di stato internamente stabili che lo realizzano.

2D

Anche per una funzione di trasferimento 2D

$$W(z_1, z_2) = \frac{p(z_1, z_2)}{d(z_1, z_2)} = \sum_{i,j=0}^{\infty} s_{ij} z_1^i z_2^j, \quad (p, d) = 1$$

le proprietà

(i) il legame ingresso-uscita è BIBO stabile

(ii) $\sum_{i,j=0}^{\infty} |s_{ij}| < \infty$

si equivalgono. La proprietà corrispondente alla (iii) del caso 1D, i.e. $d(z_1, z_2)$ è privo di zeri in $|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1$, è condizione sufficiente per la stabilità BIBO ma non necessaria. Infatti la stabilità BIBO è garantita anche se il polinomio $d(z_1, z_2)$ si annulla in alcuni punti del toro $|z_1| = |z_2| = 1$, purchè in questi punti si annulli anche il numeratore $p(z_1, z_2)$. Tali punti si chiamano singolarità (non essenziali) di seconda specie. Ne consegue che il numeratore ha rilevanza nella determinazione della stabilità BIBO di una funzione di trasferimento 2D.

Dato un modello di stato (8) la stabilità interna corrisponde ad assumere che, per ogni insieme di stati $x(i, -i)$, $i = 0, \pm 1, \dots$ aventi tutti norma inferiore a un numero positivo M , $x(h, k)$ tenda a zero quando $h+k \rightarrow \infty$. Si dimostra che il modello è internamente stabile se e solo se

$$\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2) \neq 0 \quad \text{per} \quad |z_1| \leq 1, \quad |z_2| \leq 1 \quad (9)$$

La condizione precedente si traduce anche in un vincolo sullo spettro di una famiglia di matrici: il modello 2D è internamente stabile se e solo se lo spettro delle matrici $(A_1 + e^{j\omega} A_2)$ è contenuto nel disco unitario per ogni ω reale. In particolare la stabilità di $A_1 + A_2$ è condizione necessaria per la stabilità interna.

Osservazione. Se $A_1 A_2 = A_2 A_1$, esiste una trasformazione di base che riduce entrambe le matrici in forma triangolare superiore (o inferiore)

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & & * \\ & \beta_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \beta_n \end{bmatrix}$$

La condizione (9) si riduce in tal caso alle condizioni scalari $|\alpha_i| + |\beta_i| < 1$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Per ogni modello di stato 2D, la stabilità interna implica la stabilità BIBO, mentre la stabilità BIBO non implica quella interna anche se il modello di stato è di dimensione minima. Infatti le funzioni di trasferimento BIBO stabili in cui siano presenti singolarità di seconda specie sul toro unitario non ammettono realizzazioni internamente stabili.

E' peraltro possibile provare che se una funzione di trasferimento è BIBO stabile e non ha singolarità di seconda specie sul toro unitario, esiste sempre un modello di stato internamente stabile che la realizza.

BIBLIOGRAFIA

- Attasi, S. (1973). "Systèmes linéaires homogènes à deux indices". Rapport LABORIA, 31.
- Roesser, R.P. (1975). "A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing". IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-20, n. 1, pp. 1-10.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1976). "State-Space Realization Theory of Two-Dimensional Filters". IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-21, pp. 484-492.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1978). "Doubly Indexed Dynamical Systems: State Space Models and Structural Properties". Mathematical Systems Theory, vol. 12, n. 1.
- Eising, R. (1979). "2-D Systems, an Algebraic Approach". Thesis Technische Hogeschool Eindhoven.

- Fornasini, E., and G. Marchesini (1982). "Global Properties and Duality in 2D Systems". Systems & Control Letters, vol. 2, n. 1, pp. 30-38.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1980). "On the Problem of Constructing Minimal Realizations for Two-Dimensional Filters". IEEE Trans. PAMI, vol. 2, n. 2, pp. 172-176.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1981). "A Critical Review of Recent Results on 2D System Theory", in: IFAC VIII Congress, Kyoto, vol. II, pp. 147-153.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1979). "On the Internal Stability of Two-Dimensional Filters". IEEE Trans. Autom. Control, vol. AC-24, n. 1, pp. 129-130, and vol. AC-24, n. 4.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1980). "Stability Analysis of 2D Systems". IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-27, n. 12, pp. 1210-17.
- Jury, E.I. (1978). "Stability of Multidimensional Scalar and Matrix Polynomials". Proc. IEEE, vol. 66, pp. 1018-1047.
- Shanks, J.L., S. Treitel, and J.H. Justice (1972). "Stability and Synthesis of Two-Dimensional Recursive Filters". IEEE Trans. Audio Electroacoustic, vol. AU-20, pp. 115-128.
- Goodman, D. (1977). "Some Stability Properties of Two-Dimensional Linear Shift-Invariant Digital Filters". IEEE Trans. CAS, vol. CAS-24, n. 4, pp. 201-208.
- Fornasini, E., and G. Marchesini (1983). "Structure and Properties of 2D Systems" in "Multidimensional Systems: Techniques and Applications" S.G. Tzafestas ed., M. Dekker publ.