Cono 85

1

SINTESI DEL REGOLATORE PER SISTEMI 2D

M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini

Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica
Università di Padova, Via Gradenigo 6/A
35131 PADOVA

La struttura d'ordine abitualmente associata al piano discreto $Z \times Z$, che costituisce l'insieme dei tempi per un sistema 2D, è quella del prodotto degli ordini. Si tratta di un ordine parziale in base al quale si possono introdurre le nozioni di "passato" e di "futuro" rispetto ad ogni punto del piano. Le equazioni di aggiornamento del sistema

$$\begin{aligned} x(h+1,k+1) &= A_1x(h,k+1)+A_2x(h+1,k)+B_1u(h,k+1)+B_2u(h+1,k) \\ y(h,k) &= Cx(h,k) \end{aligned} \tag{1}$$

mettono in evidenza la struttura causale "a quarto di piano" che consegue in modo naturale dall'ordine prodotto.

L'ordine prodotto non è l'unico che è stato preso in considerazione nello studio dei sistemi 2D e, per descrivere situazioni nelle quali il comportamento del sistema in un punto dipende da dati contenuti in un settore più ampio di un quarto di piano, sono stati introdotti sistemi 2D "debolmente causali". Le equazioni di aggiornamento di stato di tali sistemi sono del tipo:

$$x(h+1,k+1) = \sum_{i=-m}^{m} A_i x(h-i,k+i+1) + \sum_{i=-m}^{m} B_i u(h-i,k+i+1) \tag{2}$$

La maggior ricchezza della struttura causale 2D rispetto al caso 1D fa sì che si possa prendere in considerazione un più ampio spettro di filosofie e tecniche di controllo. Come si accennerà, il confronto fra esse non è in generale possibile, poichè non esiste una gerarchia fra le classi di problemi che ciascuna di esse consente di risolvere.

Con riferimento ai sistemi descritti dalla (1), l'adozione di una legge di controllo statica del tipo

$$u(h,k) = Kx(h,k) \tag{3}$$

non porta a risultati analoghi a quelli del caso 1D nemmeno quando sono soddisfatte le usuale condizioni di raggiungibilità. Infatti il problema della stabilizzabilità, che per i sistemi 1D si riduce alla allocazione degli autovalori all'interno del cerchio di raggio unitario, per i 2D è complicato dal fatto che gli autovalori non sono isolati. La sostanziale differenza rispetto al caso 1D è che la reazione dinamica, implementata da un ulteriore siste ma 2D che elabora le componenti dello stato, consente di stabilizzare sistemi non stabilizzabili con un controllore statico. Per la reazione dinamica, si dispone di condizioni necessarie e sufficienti di stabilizzabilità, che giocano un ruolo analogo al PBH test.

L'adozione di uno schema di controllo dinamico di questo tipo porta a un sistema globale che conserva la causalità a "quarto di piano". Si perviene invece ad un sistema dotato di causalità debole se si adotta una legge di controllo del tipo

$$u(h,k) = \sum_{i=-m}^{m} x(h-i,k+i) \tag{4}$$

nella quale gli stati coinvolti nella determinazione di $u(h,k)$ sono relativi all'insieme di separazione contenente (h,k). Come si può intuire, le potenzialità di questa tecnica sono superiori a quelle della reazione statica (3). Per quanto riguarda il confronto con la reazione dinamica, esistono sistemi 2D stabilizzabili con reazione del tipo (4) ma non con reazione dinamica e viceversa.

In questa relazione riassumeremo alcuni risultati relativi alla reazione dinamica, limitandoci per semplicità alla regolazione "dead beat".

PROPRIETA' DEL REGOLATORE

Un sistema $\Sigma = (A_1,A_2,B_1,B_2,C)$, con equazioni di aggiornamento (1), è detto a memoria finita se $\det(I-A_1z_1-A_2z_2)=1$. Chiaramente, in un sistema a memoria finita l'evoluzione libera dello stato va a zero in un numero finito di passi, a partire da qualunque insieme di stati iniziali.

Si consideri un sistema dinamico $\bar{\Sigma}$, di equazioni

$$\bar{x}(h+1,k+1) = F_1\bar{x}(h,k+1)+F_2\bar{x}(h+1,k)+G_1x(h,k+1)+G_2x(h+1,k)$$

$$\bar{y}(h,k) = H\bar{x}(h,k)+Jx(h,k)$$

collegato in retroazione a Σ attraverso la $u(h,k) = \bar{y}(h,k)$. Si ha allora il seguente risultato

<u>Teorema 1</u> Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

i) esiste un sistema $\bar{\Sigma}$ tale che il sistema globale sia a memoria finita

ii) la matrice $[I-A_1z_1-A_2z_2 \mid B_1z_1+B_2z_2]$ ha rango pieno per ogni (z_1,z_2)

iii) l'equazione di Bèzout

$$(I-A_1z_1-A_2z_2)M(z_1,z_2)+(B_1z_1+B_2z_2)N(z_1,z_2) = I$$

nelle matrici incognite M ed N ammette soluzioni nell'insieme delle matrici polinomiali.

Tali soluzioni dell'equazione di Bézout forniscono la matrice di trasferimento del regolatore nella forma $-NM^{-1}$. Ogni realizzazione $\bar{\Sigma}$ di $-NM^{-1}$, tale che $M = \det(I-F_1z_1-F_2z_2)$, è un dead-beat controller per Σ. La condizione ii) corrisponde alla controllabilità a zero del sistema Σ, e cioè alla possibilità, per ogni stato iniziale $x(0,0)$, di determinare un ingresso u con supporto nel futuro di (0,0) che dia luogo a una stringa di stati locali nulli (vedi fig. 1).

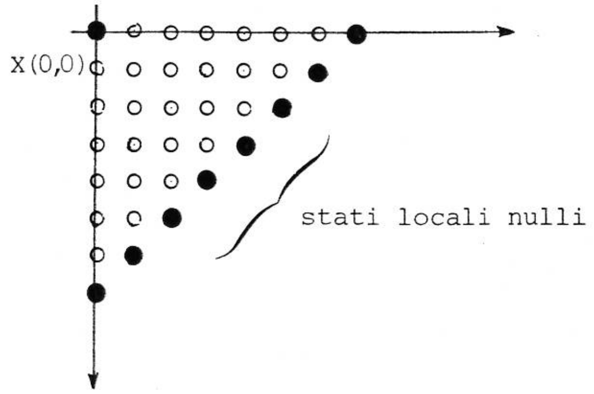

Fig. 1

Nel caso in cui lo stato non sia accessibile, si ricorre ad una stima dello stato mediante uno stimatore 2D, avente equazioni del tipo

$$
\begin{aligned}
\hat{x}(h+1,k+1) &= \hat{F}_1\hat{x}(h,k+1)+\hat{F}_2\hat{x}(h+1,k) \\
&\quad + \hat{G}_1\begin{bmatrix} u(h,k+1) \\ y(h,k+1) \end{bmatrix} + \hat{G}_2\begin{bmatrix} u(h+1,k) \\ y(h+1,k) \end{bmatrix} \\
\hat{y}(h,k) &= \hat{H}\hat{x}(h,k) + \hat{J}\begin{bmatrix} u(h,k) \\ y(h,k) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

L'errore di stima è dato da

$$e(h,k) = \hat{y}(h,k)-x(h,k)$$

Lo stimatore $\hat{\Sigma}$ è uno stimatore dead-beat se l'errore $e(\cdot,\cdot)$ si annulla in un numero finito di passi. Le condizioni per l'esistenza di uno stimatore dead beat sono precisate nel seguente Teorema.

Teorema 2 Le seguenti proposizioni sono equivalenti

i) esiste uno stimatore dead-beat $\hat{\Sigma}$

ii) la matrice

$$\begin{bmatrix} I-A_1z_1-A_2z_2 \\ C \end{bmatrix}$$

ha rango pieno per ogni (z_1,z_2)

iii) l'equazione di Bézout

$$Q(z_1,z_2)(I-A_1z_1-A_2z_2)+P(z_1,z_2)C = I$$

ammette come soluzioni matrici Q e P polinomiali.

La soluzione dell'equazione di Bézout fornisce la matrice di trasferimento dello stimatore:

$$\hat{W}(z_1,z_2) = \left[Q(z_1,z_2)(B_1z_1+B_2z_2) \,\vdots\, P(z_1,z_2)\right]$$

Ogni realizzazione a memoria finita di $\hat{W}(z_1,z_2)$ costituisce uno stimatore dead-beat dello stato di Σ. Si noti che è sempre possibile ottenere una realizzazione a memoria finita di una matrice polinomiale $\hat{W}(z_1,z_2)$.

La condizione ii) del Teorema 2 corrisponde alla ricostruibilità dello stato di Σ e cioè alla possibilità di determinare $x(0,0)$ a partire dai valori di u e di y in un insieme finito di punti situati nel passato di (0,0).

Se Σ ammette uno stimatore dead-beat $\hat{\Sigma}$, in generale non è vero che questo possa avere la struttura di stimatore di Luenberger

$$\begin{aligned} \hat{x}(h+1,k+1) = {} & A_1\hat{x}(h,k+1) + A_2\hat{x}(h+1,k) + B_1u(h,k+1) + B_2u(h+1,k) + \\ & + L_1\left[C\hat{x}(h,k+1)-y(h,k+1)\right] + L_2\left[C\hat{x}(h+1,k)-y(h+1,k)\right] \end{aligned} \qquad (6)$$

Ad esempio, il sistema

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ammette stimatori dead-beat aventi la struttura (5) ma non stimatori dead beat del tipo (6).

Se Σ è controllabile a zero e ricostruibile, si possono combinare uno stimatore dead-beat e un controllore dead-beat avente come ingresso lo stato stimato. Il sistema risultante ha polinomio caratteristico unitario ed è pertanto a memoria finita.

BIBLIOGRAFIA

1 M. Bisiacco, E. Fornasini: State feedback stabilizability of 2D filters: a dead-beat controller approach" Proc. of the IEEE Int. Conf. on Comp. Systems & Signal Processing, Bangalore, vol. III, pp. 1644-1648 (1984).

2 M. Bisiacco, G. Marchesini: "2D Systems: the structure of asymptotic observers" Proc. of the IEEE Int. Conf. on Comp. Systems & Signal Processing, Bangalore, vol. I, pp. 397-401 (1984).

3 M. Bisiacco: "On the state reconstruction of 2D systems" Systems & Control Letters, 5, pp. 347-353, (1985).

4 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Controller design for 2D systems" Proc. MTNS-85, Stoccolma (1985).