Como 1986

ALGORITMI PER LA SINTESI ED IL CONTROLLO DEI SISTEMI 2D

M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini

Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica
Università di Padova, Via Gradenigo 6/A
35131 PADOVA

SOMMARIO

Scopo di questa comunicazione è di presentare brevemente i principali risultati ottenuti nella stabilizzazione dei sistemi 2D mediante compensatori in retroazione dall'uscita.

1. INTRODUZIONE

Un sistema 2D è caratterizzato dalle seguenti equazioni ricorsive:

$$x(h+1,k+1) = A_1 x(h,k+1)+A_2 x(h+1,k)+B_1 u(h,k+1)+B_2 u(h+1,k)$$
$$y(h,k) = C\, x(h,k)+D\, u(h,k)$$

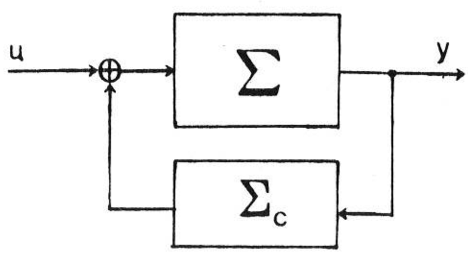
dove $u(h,k) \in \mathbb{R}^m$ è l'ingresso, $y(h,k) \in \mathbb{R}^p$ è l'uscita, $x(h,k) \in \mathbb{R}^n$ è lo stato locale, ed h e k sono interi [1].
Passando ad una rappresentazione con le serie formali, analogamente al caso 1D, si può esplicitare il legame ingresso-uscita, con condizioni iniziali nulle, come:

$$Y(z_1,z_2) = W(z_1,z_2)U(z_1,z_2)$$

dove la matrice di trasferimento ha la seguente espressione:

$$W(z_1,z_2) = C(I-A_1 z_1-A_2 z_2)^{-1}(B_1 z_1+B_2 z_2)+D$$

Analogamente al caso 1D, appare interessante analizzare le proprietà di una struttura in retroazione del tipo di figura, dove Σ e Σ_c sono sistemi 2D.
In particolare, nella ricerca svolta, si sono affrontati i seguenti problemi:



i) l'analisi delle condizioni che devono essere soddisfatte dalle matrici del sistema Σ affinchè esista un compensatore Σ_c che rende internamente stabile il sistema reazionato

ii) la ricerca di algoritmi per la verifica delle condizioni di cui al punto i)

iii) la sintesi delle matrici che caratterizzano il controllore Σ_c.

Un primo risultato relativo al punto i) è dato dal seguente Teorema [1,2].

TEOREMA: Σ è stabilizzabile mediante retroazione dall'uscita se e solo se le seguenti matrici

$$\left[I-A_1z_1-A_2z_2 \;\middle|\; B_1z_1+B_2z_2 \right] \tag{1}$$

$$\left[\begin{array}{c} C \\ \hline I-A_1z_1-A_2z_2 \end{array} \right] \tag{2}$$

hanno rango pieno nel polidisco unitario

$$\mathscr{P}_1 \overset{\Delta}{=} \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1| \leq 1; \ |z_2| \leq 1\}$$

Si noti l'analogia con il caso 1D, nel quale si hanno condizioni del tipo (1) e (2) ricavabili direttamente impiegando i criteri PBH di stabilizzabilità e di rivelabilità.

2. VARIETA' DI UNA MATRICE DI TRASFERIMENTO E RELAZIONI CON LA STABILIZZABILITA'

Una generica matrice di trasferimento 2D è sempre esprimibile in termini di "frazioni matriciali" (matrix fraction descriptions: MFD) nei seguenti modi:

$$W(z_1,z_2) = N_R(z_1,z_2)D_R^{-1}(z_1,z_2) \qquad \text{MFD destra} \tag{3}$$

$$W(z_1,z_2) = D_L^{-1}(z_1,z_2)N_L(z_1,z_2) \qquad \text{MFD sinistra} \tag{4}$$

dove N_R, D_R, N_L, D_L sono matrici polinomiali di dimensioni opportune. N_R e D_R sono dette coprime a destra se sono prive di fattori comuni non unimodulari destri. Si può provare che le matrici N_R e D_R sono coprime a destra se e solo se la matrice:

$$\begin{bmatrix} D_R(z_1,z_2) \\ N_R(z_1,z_2) \end{bmatrix} \tag{5}$$

ha rango pieno in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, eccetto al più un numero finito di punti, coincidenti con la varietà algebrica dell'ideale:

$$\mathscr{I}(N_R,D_R) \overset{\Delta}{=} (\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k) \tag{6}$$

generato dai minori di ordine massimo ν_i nella matrice (5) [2].

Quindi N_R e D_R forniscono una rappresentazione coprima di $W(z_1,z_2)$ se e solo se i polinomi $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k$ sono coprimi.

Sorge qui la principale differenza rispetto al caso 1D, che sarà ricca di importanti conseguenze nella trattazione della teoria del controllo 2D. Precisamente, mentre nel caso dei polinomi in una indeterminata l'essere coprimi e l'essere privi di zeri comuni sono proprietà equivalenti, ciò non accade per polinomi in due indeterminate. Così, nel caso 1D la varietà dell'ideale (6) associato ad una MFD coprima è vuota, mentre nel caso 2D ciò non è garantito. La varietà dell'ideale (6) è indipendente dal tipo di rappresentazione coprima (destra o sinistra) adottata per rappresentare $W(z_1,z_2)$ [3]. Pertanto ci riferiremo ad essa, senza pericolo di ambiguità, come alla <u>Varietà della Matrice di Trasferimento</u> $W(z_1,z_2)$, e la indicheremo con $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$. Il seguente Teorema [3] mette in evidenza alcune importanti relazioni per la struttura della varietà $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$ e la condizione di stabilizzabilità.

<u>TEOREMA</u>: Sia Σ un sistema 2D caratterizzato da matrici (A_1,A_2,B_1,B_2,C,D) e da matrice di trasferimento $W(z_1,z_2)$, e sia $N_R D_R^{-1}$ una MDF coprima di $W(z_1,z_2)$. Allora:

(i) det D_R divide $\det(I-A_1z_1-A_2z_2)$

(ii) nei punti di $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$, una almeno delle matrici (1) e (2) non ha rango pieno.

Inoltre, i seguenti fatti sono equivalenti

(i) $\det D_R = \det(I-A_1z_1-A_2z_2)$

(ii) $C(I-A_1z_1-A_2z_2)^{-1}$ e $(I-A_1z_1-A_2z_2)^{-1}(B_1z_1+B_2z_2)$ sono MFD coprime

(iii) $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$ coincide con l'insieme dei punti dove almeno una fra le matrici (1) e (2) non ha rango pieno.

Ricordando [3] che è sempre possibile costruire realizzazioni di una matrice di trasferimento per cui valga:

$$\det D_R = \det(I-A_1z_1-A_2z_2)$$

si ha che

(i) se $\mathcal{V}(W(z_1,z_2)) \cap \mathcal{P}_1 \neq \emptyset$, non c'è nessuna speranza di stabilizzare il sistema con una retroazione dall'uscita

(ii) se $\mathcal{V}(W(z_1,z_2)) \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset$, esiste (almeno) una realizzazione di $W(z_1,z_2)$ che è stabilizzabile con una opportuna retroazione dall'uscita.

3. <u>SINTESI DEL COMPENSATORE</u>

Assumiamo che il compensatore Σ_c sia caratterizzato da matrici (F_1,F_2,G_1,G_2,H,J) e abbia matrice di trasferimento $W_c(z_1,z_2)$.

Senza perdita di generalità, possiamo supporre

$$\det(I-F_1z_1-F_2z_2) = \det R_L$$

dove $W_c(z_1,z_2) = R_L^{-1}S_L$ è una MFD non necessariamente coprima. In base al teorema precedente, per il sistema Σ esiste un polinomio $h(z_1,z_2)$ ed una MDF coprima $N_RD_R^{-1}$ della matrice di trasferimento $W(z_1,z_2)$ che soddisfano l'equazione

$$\det(I-A_1z_1-A_2z_2) = h(z_1,z_2)\ \det D_R(z_1,z_2).$$

E' immediato verificare che il polinomio caratteristico del sistema 2D ad anello chiuso è esprimibile come:

$$\Delta(z_1,z_2) = h(z_1,z_2)\cdot\det(R_LD_R+S_LN_R)$$

Fissato Σ, al variare di Σ_c $h(z_1,z_2)$ rimane un fattore fisso di $\Delta(z_1,z_2)$, e $\Delta(z_1,z_2)$ si annulla nei punti di $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$, in cui la matrice $R_LD_R +$ $+ S_LN_R$ diviene singolare.

Inoltre, per ogni polinomio $p(z_1,z_2)$ che si annulla in $\mathcal{V}(W(z_1,z_2))$, esiste un intero $s \geq 1$ tale per cui risulta:

$$\Delta(z_1,z_2) = h(z_1,z_2)\cdot p^s(z_1,z_2) \tag{7}$$

Per verificarlo, è sufficiente provare che l'equazione nelle incognite R_L, S_L:

$$R_LD_R + S_LN_R = I\ p^r$$

è risolubile per qualche $r \geq 1$.

La prova è tracciata per grandi linee.

In primo luogo, dall'Hilbert Nullstellensatz e dell'essere $\mathcal{V}(p) \subseteq$ $\subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(N_R,D_R)) = \mathcal{V}(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_k)$ segue l'esistenza di polinomi $q_1,q_2,\ldots q_k$ e di un intero $r \geq 1$ tali che

$$\sum_{i=1}^{k} q_i\nu_i = p^r$$

In secondo luogo, detta M_i la sottomatrice di (5) con minore ν_i, esistono matrici costanti L_i, K_i tali che:

$$M_i(z_1,z_2) = L_iD_R(z_1,z_2) + K_iN_R(z_1,z_2)$$

Infine, da $\nu_iI = (\mathrm{Adj}\ M_i)\cdot M_i$, segue che

$$p^r I = \sum_{i=0}^{k} q_i \nu_i I = \sum_{i=0}^{k} q_i (\mathrm{Adj}\ M_i)(L_i D_R + K_i N_R) = R_L D_R + S_L N_R$$

avendo posto $R_L \overset{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{k} q_i (\mathrm{Adj}\ M_i) L_i$ ed $S_L \overset{\Delta}{=} \sum_{i=0}^{k} q_i (\mathrm{Adj}\ M_i) K_i$

Riassumento le precedenti considerazioni, possiamo concludere che Σ è stabilizzabile se e solo se:

(a) $\mathscr{V}(h) \cap \mathscr{P}_1 = \emptyset$

(b) $\mathscr{V}(W) \cap \mathscr{P}_1 = \emptyset$

e la formula (7) esprime la assegnabilità del polinomio caratteristico ad anello chiuso.

Per (a) esistono criteri di verifica [4], per (b) attualmente no. Esiste invece un algoritmo per decidere se $\mathscr{V}(W(z_1, z_2)) = \emptyset$. In tal caso è risolubile l'equazione di Bézout nelle incognite R_L ed S_L:

$$R_L D_R + S_L N_R = I$$

e si può costruire un dead-beat controller [5,6].

Supponiamo ora che Σ sia stabilizzabile, e che sia noto un polinomio $p(z_1, z_2) \in \mathscr{I}(N_R, D_R)$ tale che $\mathscr{V}(p) \cap \mathscr{P}_1 = \emptyset$.
La tecnica precedente permette di sintetizzare il controllore risolvendo la equazione

$$R_L D_R + S_L N_R = pI \tag{8}$$

Un problema ancora aperto è quello di come scegliere $p \in \mathscr{I}(N_R, D_R)$ in modo che soddisfi a $\mathscr{V}(p) \cap \mathscr{P}_1 = \emptyset$.

Osservazione Nel caso in cui la varietà $\mathscr{V}(W(z_1, z_2))$ sia esplicitamente ricavabile, si può costruire un polinomio p che rende risolubile la (8) determinando dapprima un polinomio $q(z_1, z_2)$ separabile , stabile e che si annulla su $\mathscr{V}(W(z_1, z_2))$ [7]. Poichè per k sufficientemente elevato $q^k \in \mathscr{I}(N_R, D_R)$, si può porre $p = q^k$.

Esiste infine un algoritmo per decidere se un dato polinomio p appartiene o meno ad un ideale. Esso fa uso delle basi di Gröbner e del relativo algoritmo di riduzione.

BIBLIOGRAFIA

1. M.Bisiacco: "State and output feedback stabilizability of 2D systems", in IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-32, N. 12, December 1985, pp. 1246÷1254.

6

2. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini: "Feedback stabilization of 2D systems", in Proceedings of 24th Conference on Decision and Control, Ft. Lauderdale, Florida, December 1985, pp. 1579÷1583.
3. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini: "Controller design for 2D systems", in Frequency Domain and State Space Methods for Linear Systems, Byrnes and Lindquist (ed.), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1986, pp. 99÷113.
4. E.I. Jury: "Stability of multidimensional scalar and matrix polinomials", in Proceedings of the IEEE, vol. 66, n. 9, September 1978, pp. 1018 ÷ 1047.
5. M.Bisiacco: "On the state reconstruction of 2D systems", in System and Control Letters, North-Holland, N. 5 (1985), pp. 347÷353.
6. B.Buchberger: "Gröbner bases: an algorithmic method in polynomial ideal theory", in Multidimensional System Theory, N.K. Bose (ed.), Reidel (1985), pp. 184÷232.
7. M.Bisiacco: "On the structure of 2D observers", in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31 (1986), pp. 676÷680.