Coro 87

REALIZZAZIONE E REGOLAZIONE DI SISTEMI 2D

M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini

Dipartimento di Elettronica e Informatica, Università di Padova
Via Gradenigo 6/A - 35131 PADOVA (Italia)
Tel. (049) 8070268 - Telex 430462 IEEUPD I

SOMMARIO

Dopo un riassunto dei temi studiati nello scorso triennio, vengono succintamente inquadrati in tale contesto alcuni risultati ottenuti nell'ultimo anno [2-8].

MODELLI 2D: STIMA DELLO STATO E REGOLAZIONE

Dato un sistema 2D in forma di stato

$$\begin{aligned} x(h+1,k+1) &= A_1 x(h,k+1) + A_2 x(h+1,k) + B_1 u(h,k+1) + B_2 u(h+1,k) \\ y(h,k) &= C\, x(h,k) \end{aligned} \tag{1}$$

si pongono in modo naturale i problemi di costruire uno stimatore asintotico dello stato e di sintetizzare uno schema di retroazione che conferisca al sistema ad anello chiuso particolari caratteristiche dinamiche.

Le soluzioni di entrambi questi problemi, illustrate in dettaglio nei fascicoli [10,11], sono riconducibili essenzialmente alla soluzione di una equazione di Bézout in due indeterminate e alla realizzazione di una matrice di trasferimento ricavabile da tale soluzione.

Più precisamente, dette

$$\mathcal{O}(z_1,z_2) = \begin{bmatrix} I-A_1z_1-A_2z_2 \\ C \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathcal{R}(z_1,z_2) = \begin{bmatrix} I-A_1z_1-A_2z_2 & | & B_1z_1+B_2z_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

le matrici dei criteri PBH di ricostruibilità e di controllabilità del sistema, si dimostra che:

i) esiste uno stimatore dello stato il cui errore di stima $e(h,k)$ converge a zero almeno come $\rho^{-(h+k)}$, se e solo se $\mathcal{O}(z_1,z_2)$ ha rango pieno per ogni (z_1,z_2) nel polidisco $\mathcal{P}_\rho = \{(z_1,z_2), |z_1| \le \rho,\ |z_2| \le \rho\}$

ii) detto $q(z_1,z_2)$ qualsiasi polinomio nell'ideale dei minori di ordine massimo di $\mathcal{O}(z_1,z_2)$, la equazione

$$q(z_1,z_2)I = P(z_1,z_2)C + Q(z_1,z_2)(I-A_1z_1-A_2z_2) \tag{4}$$

ammette soluzione. Se $\mathcal{O}(z_1,z_2)$ ha rango pieno in $\mathcal{P}_\rho$, è possibile scegliere $q(z_1,z_2)$ in modo tale che l'intersezione $\mathcal{V}(q) \cap \mathcal{P}_\rho$ sia vuota, ed esistono realizzazioni della matrice

$$\hat{W}(z_1,z_2) = \left[Q(z_1,z_2)(B_1z_1+B_2z_2) \;\vdots\; P(z_1,z_2)\right] q(z_1,z_2)^{-1} \tag{5}$$

che forniscono uno stimatore con la proprietà di convergenza descritta in i).

Quindi l'esistenza di uno stimatore asintotico è equivalente al fatto che la matrice $\mathcal{O}(z_1,z_2)$ abbia rango pieno nel polidisco unitario $\mathcal{P}_1$.

iii) esiste una retroazione dinamica dallo stato tale che il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso sia privo di zeri in $\mathcal{P}_\rho$ se e solo se $\mathcal{R}(z_1,z_2)$ ha rango pieno per ogni (z_1,z_2) in $\mathcal{P}_\rho$.

iv) detto $m(z_1,z_2)$ qualsiasi polinomio nell'ideale dei minori di ordine massimo di $\mathcal{R}(z_1,z_2)$, la equazione

$$m(z_1,z_2)I = (B_1z_1+B_2z_2)N(z_1,z_2) + (I-A_1z_1-A_2z_2)M(z_1,z_2) \tag{6}$$

ammette soluzione. Se $\mathcal{R}(z_1,z_2)$ ha rango pieno in $\mathcal{P}_\rho$, si può scegliere $m(z_1,z_2)$ in modo che $\mathcal{V}(m) \cap \mathcal{P}_\rho = \emptyset$, ed esistono realizzazioni della matrice

$$N(z_1,z_2)M(z_1,z_2)^{-1} \tag{7}$$

che forniscono un compensatore dinamico dallo stato cui corrisponde il polinomio caratteristico ad anello chiuso $m(z_1,z_2)^n$.

L'esistenza di una retroazione stabilizzante è allora equivalente al fatto che $\mathcal{R}(z_1,z_2)$ abbia rango pieno in ogni punto di $\mathcal{P}_1$.

Una notevole differenza rispetto alla soluzione dei problemi analoghi nel caso dei sistemi 1D è che lo stimatore asintotico 2D non ha le caratteristiche di un ricostruttore dello stato di Luenberger (in particolare la dimensione dello stimatore può essere maggiore di quella del sistema (1)) e che, in generale, non si possono impiegare compensatori stabilizzanti di tipo statico.

ALGORITMI PER LA SINTESI DEL COMPENSATORE DALLO STATO E DELLO STIMATORE

I punti i) e ii) e i punti iii) e iv) si riferiscono a situazioni duali, cosicchè sarà sufficiente riferirsi soltanto alla sintesi del compensatore stabilizzante. In relazione a questi punti, è necessario risolvere alcuni problemi:

a) verificare che i minori di ordine massimo di $\mathcal{R}(z_1,z_2)$ sono privi di zeri comuni in $\mathcal{P}_1$

b) costruire un polinomio $m(z_1,z_2)$ appartenente all'ideale generato da tali minori e privo di zeri in $\mathscr{P}_1$

c) risolvere l'equazione di Bézout (6)

d) realizzare NM^{-1} mediante un modello di stato 2D.

Il problema a) può essere affrontato cslcolando esplicitamente - per via numerica - i punti della varietà associata ai minori di ordine massimo di $\mathscr{R}(z_1,z_2)$. Un'altra via è quella di ricorrere a criteri che, prescindendo dalla determinazione della varietà, indichino direttamente se tale varietà interseca o meno $\mathscr{P}_1$. In [8] è stata seguita questa seconda via, basandosi sull'algoritmo delle basi di Gröbner e costruendo una coppia di matrici commutative M_1 e M_2 che rappresentano l'ideale $\mathscr{I}$ dei minori, nel senso che $p(z_1,z_2) \in \mathscr{I}$ se e solo se $p(M_1,M_2) = 0$. Le proprietà della varierà $\mathscr{V}(\mathscr{I})$ si riflettono allora in modo naturale nelle proprietà spettrali della coppia M_1,M_2.

Il problema b) è stato risolto in [2] ricorrendo alla classe dei polinomi simmetrici in due variabili del tipo $p(z_1^h + z_2^h)$, con $p(z) \in \mathbb{R}[z]$. Quando $\mathscr{V}(\mathscr{I})$ non interseca $\mathscr{P}_1$, esiste nell'ideale $\mathscr{I}$ un polinomio stabile avente tale struttura, pur di scegliere h abbastanza elevato. Un polinomio di questo tipo può essere costruito esplicitamente in un numero finito di passi, con tecniche lineari.

Per il problema c) si rinvia a [11] e alla relativa bibliografia. Infine, per quanto riguarda la realizzazione della matrice NM^{-1} con un modello di stato, va osservato che la varietà del polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso coincide con quella di $m(z_1,z_2)$ se la realizzazione (F_1,F_2,G_1,G_2,H,J) di NM^{-1} soddisfa la condizione $\det M(z_1,z_2) = \det(I-F_1z_1-F_2z_2)$. Realizzazioni aventi questo requisito sono state descritte in [1].

BIBLIOGRAFIA

1 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Controller design for 2D systems", in: *Frequency Domain and State Methods for Linear Systems*, C.I. Byrnes and A. Lindquist eds., Elsevier publ., pp. 99-113, 1986.

2 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Causal 2D compensators: stabilization algorithms for multivariable 2D systems", *Proc. 25th Conf. on Decision and Control*, Athens, pp. 2171-2174, December 1986.

3 M. Bisiacco: "Stabilization theory for single-input/single output two dimensional systems", *Circuits, Systems & Signal Processing*, vol. 6, pp. 77-93, 1987.

4 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Stable realizations of 2D matrix fraction descriptions and feedback stabilizability", *SIAM Conf. on Linear Algebra in Signals, Systems and Control*, Boston, August 1986, (Abstract).

5 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "State space technique in sta-

bilizability two-dimensional filters", in: *Signal Processing III, Theories and Applications*, I.T. Toung et al., eds., pp. 701-704, 1986.

6 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Polynomial matrix approach to the analysis and stabilization of two-dimensional filters", *ICIAM '87 Conf.*, Paris, 1987, (Abstract).

7 E. Fornasini: "A progress report on output feedback stabilizability of multivariable 2D systems", *Proc. of SMD '87*, M.H. Hamza ed., pp. 135-138, 1987.

8 E. Fornasini: "A note on output feedback stabilizability of multivariable 2D systems", to appear in *Systems & Control Letters*, 1987.

9 E. Fornasini, G. Marchesini: "Strutture e proprietà dei sistemi 2D", in *Sistemi dinamici, identificazione, controllo e ottimizzazione*, a cura di E. Mosca, Incontro Ricercatori progetto M.P.I. 40%, pp. 31-34, 1985.

10 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Sintesi del regolatore per i sistemi 2D", in *Metodologie e dispositivi per l'identificazione, il controllo e l'elaborazione dei segnali nei sistemi dinamici*, a cura di E. Mosca, Incontro Ricercatori progetto M.P.I. 40%, pp. 23-27, 1986.

11 M. Bisiacco, E. Fornasini, G. Marchesini: "Algoritmi per la sintesi e il controllo di sistemi 2D", in *Metodologie e dispositivi per l'identificazione, il controllo e l'elaborazione dei segnali nei sistemi dinamici*, a cura di E. Mosca, Incontro Ricercatori progetto M.P.I. 40%, pp. 7-12, 1986.