RECENTI RISULTATI E PROSPETTIVE NELLA TEORIA DEI SISTEMI 2D

Mauro Bisiacco, Ettore Fornasini, Giovanni Marchesini
Dipartimento di Elettronica e Informatica, Università di Padova
via Gradenigo, 6/A - 35131 Padova

Sommario In questa comunicazione vengono discussi alcuni recenti risultati relativi alla modellistica, la realizzazione e il controllo dei sistemi 2D, anche in connessione con le attuali tematiche di ricerca.

1 Introduzione

I modelli 2D hanno cominciato ad attrarre l'attenzione dei ricercatori nell'area sistemistica fin dall'inizio degli anni 70 [1-6]. I motivi di tale interesse non sono riconducibili ad un'unica matrice: in alcuni casi l'idea ispiratrice della ricerca è sorta nell'ambito dell'elaborazione di dati bidimensionali con strutture di calcolo parallele, in altri casi nella modellistica di processi parametrizzati da due variabili indipendenti (e.g. il tempo ed una coordinata spaziale), in altri ancora le motivazioni, di natura essenzialmente teorica, riguardano l'analisi di dinamiche causali su insiemi parzialmente ordinati e l'estendibilità di nozioni sistemistiche "classiche" ad ambiti più generali.

Le difficoltà concettuali e formali della teoria 2D sono ben note: basti accennare al fatto che molte definizioni e operazioni naturali o addirittura ovvie nell'ambito 1D devono essere abbandonate oppure integralmente ripensate quando si opera in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. È quindi intuibile che la teoria, lungi da una definitiva cristallizzazione sui risultati acquisiti, offra numerosi spunti di ricerca in ogni suo capitolo.

In questa nota si discuteranno brevemente alcune prospettive di ricerca nei settori della modellistica, della realizzazione e del controllo 2D, inquadrandole nell'ambito di studi già avviati e per i quali si dispone ormai di un insieme non trascurabile di risultati.

2 Modellistica

I sistemi 2D sono modelli dinamici adatti alla rappresentazione dei legami fra *segnali bidimensionali*, descrivibili cioè come funzioni di due variabili indipendenti. Poiché il supporto dei segnali 2D è il piano discreto $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, si possono concepire molte strutture d'ordine essenzialmente diverse per rappresentare gli ipotetici legami di causa-effetto esistenti. A ciascuna di esse corrispondono modelli matematici diversi e con caratteristiche non sempre confrontabili.

Da questo punto di vista si può osservare che nei primi lavori la struttura causale (tipicamente quella a quarto di piano o quella a semipiano) è stata assunta a priori nel modello, come conseguenza di una particolare scelta dell'ordine parziale in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Più recentemente [7-9] sono comparsi vari lavori nei quali si è cercato di evitare una definizione a priori della struttura causale e dell'ordine parziale che la induce, assumendo invece come punto di partenza per la determinazione del modello dinamico l'insieme delle traiettorie del sistema.

In altri casi [10], ispirandosi alla discretizzazione delle equazioni alle derivate parziali, vengono assegnate condizioni sul segnale 2D lungo un contorno chiuso in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Nel calcolo della risposta la struttura causale bidimensionale non svolge allora virtualmente alcun ruolo, perchè la soluzione viene ricondotta alla evoluzione di un sistema 1D.

I modelli dotati di struttura causale a quarto di piano sono stati studiati dal punto di vista ingresso-uscita nell'ambito della cosiddetta teoria dei *filtri 2D* [11-15].

La rappresentazione è fornita abitualmente mediante una funzione di trasferimento razionale propria in due indeterminate, del tipo

$$W(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i+j\geq 1} n_{ij} z_1^i z_2^j}{1 + \sum_{i+j\geq 1} d_{ij} z_1^i z_2^j} \tag{1}$$

Dal punto di vista sistemistico gli aspetti più interessanti della teoria dei filtri 2D riguardano la stabilità BIBO e le numerose implementazioni circuitali delle equazioni alle differenze associate alla (1), che contengono in nuce una rappresentazione di stato. In proposito, costituiscono problemi tuttora aperti l'individuazione di condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità BIBO basate sugli zeri del numeratore e del denominatore di (1) e la determinazione del numero minimo di ritardatori necessari nella implementazione circuitale.

Quasi contemporaneamente ai filtri bidimensionali sono stati introdotti nella letteratura i *modelli di stato 2D*. Un grosso ostacolo che si è frapposto all'ottenimento di un unico modello è stata l'impossibilità di inferire in modo "canonico" dalla equivalenza di Nerode [5,6,16] la struttura di un modello di stato di dimensione finita.

Si è così pervenuti, con procedimenti talvolta euristici, a strutture nelle quali coesistono

1. stati locali, appartenenti a uno spazio vettoriale di dimensione finita, che determinano singolarmente il valore del campione di uscita e che, insieme ad un altro o ad alcuni altri stati locali, entrano nella equazione di aggiornamento di stato

2. stati globali $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x}(i,-i), i \in \mathbf{Z}\}$, che forniscono le condizioni iniziali su un insieme di separazione di $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Essi appartengono ad uno spazio vettoriale di dimensione infinita, che estende lo spazio delle classi di Nerode

Il più comune dei modelli di stato con causalità a quarto di piano è il seguente [17]:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(h+1,k+1) =& A_1\mathbf{x}(h,k+1) + A_2\mathbf{x}(h+1,k) \\
& + B_1\mathbf{u}(h,k+1) + B_2\mathbf{u}(h+1,k) \\
\mathbf{y}(h,k) =& C\mathbf{x}(h,k)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

in cui i vettori $\mathbf{x}(h,k), \mathbf{u}(h,k), \mathbf{y}(h,k)$, appartenenti rispettivamente a $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$ forniscono il valore dello stato locale, dell'ingresso e dell'uscita nel punto $(h,k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Il modello (2), che per brevità indicheremo con $\Sigma_1 = (A_1, A_2, B_1, B_2, C)$, è del primo ordine, dato che lo stato locale in $(h+1,k+1)$ è fornito da un'equazione alle differenze del prim'ordine. Esso è stato intensamente studiato sia nella forma generale (2) che in alcune versioni particolari: la più nota è senza dubbio il *modello di Roesser* [1-3, 18], in cui lo spazio di stato locale X è somma diretta di due sottospazi X^h e X^v, di dimensione rispettivamente n_1 e n_2, e le matrici del modello risultano partizionate conformemente:

$$
A_1 = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{21}^{(1)} & A_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Le equazioni (2) si possono riscrivere nella forma

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{x}^v(h+1,k) \\ \mathbf{x}^h(h,k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} \\ A_{21}^{(2)} & A_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^v(h,k) \\ \mathbf{x}^h(h,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(h,k) \\ \mathbf{u}(h,k) \end{bmatrix} \\
\mathbf{y}(h,k) &= \begin{bmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^v(h,k) \\ \mathbf{x}^h(h,k) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Di impiego meno frequente sono i modelli del secondo ordine per i quali una struttura tipica dell'equazione di stato è data da [5,6]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(h+1,k+1) =& A_1\mathbf{x}(h,k+1) + A_2\mathbf{x}(h+1,k) + A_0\mathbf{x}(h,k) \\
& + B\mathbf{u}(h,k) \\
\mathbf{y}(h,k) =& C\mathbf{x}(h,k)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Sebbene le sue applicazioni siano limitate ai soli *filtri separabili*, un modello del secondo ordine di particolare interesse è quello di Attasi [4], in cui le matrici A_1 e A_2 commutano ed inoltre $A_1A_2 = A_0$. Come si vedrà nel paragrafo seguente, le ragioni di tale interesse sono da ascriversi soprattutto al fatto che la teoria che lo descrive è molto simile a quella valida nel caso 1D.

Di recente [7-9] si è affrontata la modellizzazione di dinamiche definite sul piano secondo un approccio nel quale a priori non si stabilisce quali segnali giochino il ruolo di ingressi e quali quello di uscite. Secondo questo approccio,un sistema 2D è costituito da una famiglia $\mathcal{B}$ di funzioni definite sull'intero piano discreto, che rappresentano i *segnali ammissibili (behaviours)* , caratterizzate ciascuna dall'appartenenza al nucleo di una matrice polinomiale $M(z_1, z_2)$ in due variabili

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w} = \sum_{i,j \in \mathbf{Z}} w_{ij} z_1^i z_2^j : M\mathbf{w} = 0\} \tag{6}$$

Associate all'insieme $\mathcal{B}$, che fornisce una rappresentazione *esterna* del sistema, si considerano delle rappresentazioni *interne*, che fanno uso di variabili *latenti* (o ausiliarie, nel senso che possono sempre essere eliminate dalla rappresentazione stessa).

Le variabili di stato costituiscono un particolare tipo di variabili latenti, che riassumono la memoria del sistema rispetto ad una nozione di *passato* introdotta nel piano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Quando una descrizione di stato è possibile, ovvero quando la struttura di $\mathcal{B}$ consente di introdurre le nozioni di passato, presente e futuro, $\mathcal{B}$ vien detto *markoviano.* Poiché non esiste una direzione "naturale" per l'evoluzione in $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, la markovianità appare un concetto più generale della usuale causalità a quarto di piano ed è stata applicata all'analisi di dinamiche 2D non causali.

3 Realizzazione

Nel caso 1D, com'è noto, le realizzazioni minime di una data funzione di trasferimento sono raggiungibili e osservabili, *algebricamente equivalenti*, e riconducibili alla relizzazione canonica di Nerode.

Questo quadro molto semplice è assolutamente inadeguato al caso 2D. Non si è lontani dal vero affermando che il problema della realizzazione minima costituisce tuttora il "collo di bottiglia" dell'intera teoria dei sistemi 2D e che a tutt'oggi non si dispone di strumenti efficaci per investigarlo.

I concetti di raggiungibilità e di osservabilità, sia riferiti allo stato locale che allo stato globale, non sono utilizzabili per costruire una realizzazione minima 2D. Infatti, se si calcolano modelli in cui sia raggiungibile e osservabile lo stato locale, non si ottengono in generale modelli di dimensione minima [19,20]. D'altra parte non tutti i modelli di dimensione minima sono globalmente raggiungibili e osservabili e si verificano casi nei quali la minimizzazione non può essere ottenuta mediante la costruzione di un (inesistente) modello globalmente raggiungibile e osservabile [21,22].

ESEMPIO 1 La funzione di trasferimento $W(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ non ammette alcuna realizzazione globalmente raggiungibile e osservabile , qualunque sia il corpo sul quale si costruiscono le matrici del sistema (2).

Nell'affrontare il problema della realizzazione minima sono stati tentati diversi approcci. Un primo approccio perseguito da vari autori nell'ambito dei sistemi a un ingresso e un'uscita, ma che può essere esteso senza complicazioni concettuali al caso multivariabile, è quello di associare alla risposta impulsiva del sistema una matrice di Hankel e di applicare una opportuna versione dell'algoritmo di Ho. Data una serie formale $s = \sum_{ij} s_{ij} z_1^i z_2^j$ nelle indeterminate commutative z_1 e z_2, la matrice di Hankel $\mathcal{H}(s)$ è una matrice infinita, indiciata sul semigruppo commutativo dei monomi monici in due indeterminate. L'elemento della matrice in posizione $(z_1^i z_2^j, z_1^h z_2^k)$ è il coefficiente $s_{i+h,j+k}$. È stato dimostrato [23,24] che, salvo nel caso in cui s è lo sviluppo di una funzione di trasferimento separabile, il rango di $\mathcal{H}(s)$ è infinito, anche se s è una serie razionale. Ciò rende alquanto problematica una implementazione diretta dell'algoritmo di Ho per ottenere una realizzazione minima di una funzione di trasferimento razionale.

Un metodo che si è utilizzato per aggirare tale difficoltà [20] si basa sull'osservazione che la matrice di Hankel associata ad una serie razionale non commutativa ha rango finito e consente di ottenere una rappresentazione matriciale minima della serie stessa mediante un algoritmo lineare. Più precisamente, dato l'alfabeto $\{\xi_1, \xi_2\}$ e il monoide non commutativo $\{\xi_1, \xi_2\}^*$, si consideri una serie razionale strettamente propria

$$\sigma = \sum_{w \in \{\xi_1, \xi_2\}^* \setminus \{\emptyset\}} (\sigma, w) w$$

nelle indeterminate non commutative ξ_1 e ξ_2, e si associ ad essa la matrice $\mathcal{H}(\sigma)$, indiciata in $\{\xi_1, \xi_2\}^*$, il cui elemento in posizione (w_1, w_2) è il coefficiente $(\sigma, w_1 w_2)$. L'algoritmo di Ho permette allora

1. di rappresentare la serie non commutativa σ nella forma seguente

$$\sigma(\xi_1, \xi_2) = C(I - A_1\xi_1 - a_2\xi_2)^{-1}(B_1\xi_1 + B_2\xi_2) \tag{7}$$

2. di ottenere una rappresentazione (7) nella quale le matrici A_1 e A_2 hanno dimensione minima $\delta(\sigma)$

Se σ ha come immagine commutativa lo sviluppo in serie della matrice di trasferimento $W(z_1, z_2)$, il sistema $\Sigma_1 = (A_1, A_2, B_1, B_2, C)$ costituisce una realizzazione di W.

L'ottenimento delle realizzazioni minime di $W(z_1, z_2)$ richiede allora di ricercare le serie razionali non commutative $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ che hanno $W(z_1, z_2)$ come immagine commutativa e per cui $\delta(\sigma)$ è minima. L'algoritmo per ottenere l'insieme di tali serie non commutative è intrinsecamente non lineare e mette in luce i seguenti fatti

1. la dimensione della realizzazione minima di $W(z_1, z_2)$ dipende dal corpo sul quale si costruiscono le matrici della realizzazione

2. due realizzazioni minime di $W(z_1, z_2)$ possono non essere algebricamente equivalenti. Ciò si verifica quando l'algoritmo di Ho viene applicato a due serie non commutative diverse, aventi entrambe $W(z_1, z_2)$ come immagine commutativa.

ESEMPIO 2 La funzione di trasferimento

$$W(z_1, z_2) = \frac{2z_1 z_2}{1 + z_1^2 + z_2^2}$$

ammette

$$A_1 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

come realizzazione minima del tipo (2) sul corpo complesso. Si dimostra che sul corpo reale $W(z_1, z_2)$ non ammette realizzazioni dello stesso tipo in dimensione 2.

ESEMPIO 3 I sistemi

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sono realizzazioni minime delle medesima funzione di trasferimento, ma non sono algebricamente equivalenti.

Un approccio diverso alla realizzazione di sistemi 2D è stato messo a punto nell'ambito dei problemi di controllo [25] e si basa sul concetto di *realizzazione coprima*.

Data una matrice di trasferimento razionale propria $W(z_1, z_2)$ di dimensione $p \times m$, siano $N_R(z_1, z_2)D_R^{-1}(z_1, z_2)$ e $D_L^{-1}(z_1, z_2)N_L(z_1, z_2)$ due rappresentazioni matriciali fratte (MFD), rispettivamente destra e sinistra, di W. Quando le MFD sono coprime, risulta [8] $\det D_R = \det D_L$ ed è di particolare interesse ottenere relizzazioni nelle quali il polinomio caratteristico $\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)$ verifica la condizione

$$\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2) = \det D_R(z_1, z_2) \tag{8}$$

In tal caso infatti le realizzazioni sono prive di *modi nascosti*, che sono invarianti del polinomio caratteristico ad anello chiuso rispetto alla scelta del compensatore. Le realizzazioni che soddisfano la (8) sono dette *coprime*.

Gli algoritmi lineari esistenti per calcolare tali realizzazioni portano, in generale, a sistemi di dimensione piuttosto elevata. È inoltre ancora aperto il problema di stabilire se le realizzazioni minime sono necessariamente coprime.

I sistemi (2) e (5) realizzano, al variare delle matrici che vi figurano, ogni funzione di trasferimento razionale strettamente propria. Quando si impongano particolari vincoli strutturali sulle matrici del sistema si realizzano, in generale, classi particolari di funzioni razionali.

- Il modello di Attasi [4] realizza tutte e sole le funzioni di trasferimento separabili, cioè quelle in cui il denominatore fattorizza come prodotto di un polinomio in z_1 e di un polinomio in z_2. Si dimostra che, data una funzione di trasferimento separabile $W(z_1, z_2)$, il rango della corrispondente matrice di Hankel $\mathcal{H}(W)$ fornisce la dimensione minima delle realizzazioni aventi la struttura di Attasi. Le relizzazioni minime sono algebricamente equivalenti ed ottenibili con procedimenti lineari ricorrendo a un algoritmo di Ho.

- Quando si consideri invece il modello (5) con i vincoli

$$A_0 = 0, \; A_1 A_2 = A_2 A_1, \tag{9}$$

la classe delle funzioni di trasferimento realizzabili coincide [26,27] con l'insieme delle funzioni razionali che ammettono uno sviluppo in frazioni parziali del tipo

$$W(z_1, z_2) = \left[n_0(z_1, z_2) + \sum_j \frac{n_j(z_1, z_2)}{(1 - a_{1j} z_1 - a_{2j} z_2)^{\nu_j}} \right] z_1 z_2 \tag{10}$$

con $\deg n_j < \nu_j$ e $n_0 \in \mathbb{R}[z_1, z_2]$.

La costruzione di una realizzazione minima soddisfacente le condizioni (9) per una funzione di trasferimento del tipo (10) può essere ottenuta con un algoritmo lineare. Infatti, se vale la relazione

$$W(z_1, z_2) = C(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)^{-1} B z_1 z_2$$

con $A_1 A_2 = A_2 A_1$, si verifica senza difficoltà che

$$W'(z_1, z_2) = \sum_{ij} w_{ij} \binom{i+j}{j}^{-1} z_1^i z_2^j$$

è esprimibile nella forma

$$W'(z_1, z_2) = C(I - A_1 z_1)^{-1} (I - A_2 z_2)^{-1} B z_1 z_2 \tag{11}$$

Quindi W' è realizzata da un modello di Attasi con matrici A_1 e A_2 e per ottenere una realizzazione minima con struttura (9) è sufficiente costruire una realizzazione di Attasi di dimensione minima per W'.

- Non tutte le funzioni di trasferimento il cui denominatore fattorizza in polinomi del primo ordine ammettono lo sviluppo in frazioni parziali (10). Quando si considerano funzioni di trasferimento con denominatore fattorizzato in termini del primo ordine, ma per il resto generiche, si può ricorrere a realizzazioni, sia del tipo (2) che (5), in cui le matrici A_1, A_2 (e A_0) sono simultaneamente triangolarizzabili [27]. Non si conoscono algoritmi di realizzazione minima per questa classe di funzioni.

4 Controllo

La struttura d'ordine parziale che caratterizza la dinamica 2D del sistema (2) permette di implementare una classe di schemi di retroazione più vasta di quella utilizzata per i sistemi 1D. Si possono infatti concepire procedure di controllo nelle quali il valore dello stato e/o dell'uscita in (h,k) influenzino non soltanto i valori dell'ingresso in istanti successivi ad (h,k), ma anche quelli in istanti che non sono in connessione causale con (h,k). È chiaro che quando si fa ricorso a tali procedure, nel sistema risultante ad anello chiuso viene perduta la causalità a quarto di piano, e ciò può non essere accettabile quando vi siano motivi per non uscire dall'ambito causale nel quale è assegnato il sistema da controllare.

Un'altra osservazione di carattere generale riguarda la natura, statica o dinamica, degli schemi di retroazione impiegati. Nel caso dei sistemi 2D la soluzione della maggior parte dei problemi di controllo si basa sull'introduzione di controllori dinamici causali, che realizzano legami stato/ingresso o uscita/ingresso rappresentati da equazioni ricorsive del tipo

$$\mathbf{u}(h,k) = \sum H_{ij}\mathbf{u}(h-i,k-j) + \sum K_{ij}\mathbf{x}(h-i,k-j)$$

Esiste peraltro un caso, quello del controllo ottimo, nel quale l'ingresso in (h,k) è generato attraverso una legge di controllo di tipo statico che coinvolge un numero infinito di stati locali. Ciò dà luogo ad una serie di inconvenienti dal punto di vista realizzativo, che possono rendere preferibile il ricorso a controllori dinamici causali, anche se soltanto subottimi.

In questo paragrafo accenneremo alle strategie di controllo utilizzate per risolvere i problemi della stabilizzazione, del disaccoppiamento e della minimizzazione di un funzionale di costo quadratico.

4.1 Stabilizzazione

Per definizione, il sistema (2) è *internamente stabile* se per ogni stato globale iniziale $\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x}(i,-i), i \in \mathbf{Z}\}$, con sup $||\mathbf{x}(i,-i)|| < \infty$, l'evoluzione libera dello stato soddisfa la condizione

$$\lim_{h+k\to+\infty} \mathbf{x}(h,k) = 0$$

Un *compensatore stabilizzante* per il sistema $\Sigma_1 = (A_1, A_2, B_1, B_2, C)$ è un sistema 2D $\tilde{\Sigma}_1$ che rende internamente stabile la connessione in cui $\tilde{\Sigma}_1$ retroaziona Σ_1. Si farà qui riferimento alla retroazione dall'uscita: i risultati relativi alla retroazione dallo stato si possono ottenere come casi particolari, ponendo in (2) $C = I_n$.

Le proprietà di stabilità e di stabilizzabilità si possono verificare analizzando l'intersezione fra il polidisco unitario

$$\mathcal{P}_1 = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$$

e le varietà di opportuni (ideali di) polinomi.

TEOREMA 1 [28-31] Il sistema (2) è internamente stabile se e solo se il suo polinomio caratteristico $\det(I - A_1z_1 - A_2z_2)$ è privo di zeri in $\mathcal{P}_1$. Indicate inoltre con $\mathcal{V}(\mathcal{R})$ e con $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ le varietà degli ideali generati dai minori di ordine massimo delle matrici polnomiali

$$\mathcal{R} = [\, I - A_1 z_1 - A_2 z_2 \quad B_1 z_1 + B_2 z_2 \,] \tag{12}$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} I - A_1 z_1 - A_2 z_2 \\ C \end{bmatrix}, \tag{13}$$

il sistema (2) è stabilizzabile mediante reazione dinamica dall'uscita se e solo se

$$[\mathcal{V}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{O})] \cap \mathcal{P}_1 = \emptyset \tag{14}$$

La condizione (14) è analoga ad una ben nota, valida per i sistemi 1D, basata sul criterio PBH. C'è tuttavia una differenza peculiare fra i due casi, quando si vogliano ottenere condizioni di stabilizzabilità basate sulla matrice di trasferimento e sui "modi nascosti" del sistema.

Infatti, per i sistemi 1D la stabilizzabilità non dipende dalla matrice di trasferimento ma soltanto dalla stabilità dei modi non raggiungibili e/o non osservabili. Di conseguenza, ogni matrice di trasferimento 1D ammette realizzazioni (fra cui le minime) stabilizzabili per reazione dinamica dall'uscita.

La situazione è del tutto diversa nel caso 2D, per la presenza delle cosiddette *singolarità di rango* nella matrice di trasferimento. Data una MFD coprima sinistra della matrice di trasferimento

$$W(z_1, z_2) = D_L^{-1}(z_1, z_2) N_L(z_1, z_2) \tag{15}$$

la varietà $\mathcal{V}(W)$ associata all'ideale dei minori di ordine massimo della matrice

$$[\, N_L \quad D_L \,]$$

è un insieme finito (eventualmente vuoto), i cui punti sono detti singolarità di rango di W. Esse non dipendono dalla particolare MFD coprima sinistra usata in (15) e coincidono con i punti della varietà corrispondente associata ad ogni MFD coprima destra. Poiché ogni modello di stato (2) che realizzi $W(z_1, z_2)$ soddisfa l'uguaglianza

$$\mathcal{V}(\mathcal{R}) \cup \mathcal{V}(\mathcal{O}) = \mathcal{V}(W) \cup \mathcal{V}\left(\frac{\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)}{\det D_L(z_1, z_2)}\right) \tag{16}$$

l'insieme dei punti critici per la stabilizzabilità, specificati dal teorema precedente, include sia la *varietà dei modi nascosti* $\mathcal{V}(\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)/\det D_L(z_1, z_2))$, sia la varietà delle singolarità di rango $\mathcal{V}(W)$. Ricorrendo ad una realizzazione coprima, è comunque possibile ottenere un sistema 2D in forma di stato nel quale la varietà dei modi nascosti sia vuota. La varietà delle singolarità di rango, invece, non dipende dalla realizzazione; pertanto, se $\mathcal{V}(W)$ interseca $\mathcal{P}_1$, nessuna realizzazione di W è stabilizzabile.

Sono stati messi a punto [32] criteri lineari per verificare se $\mathcal{V}(W)$ interseca il polidisco unitario, senza determinare esplicitamente le coordinate delle eventuali intersezioni.

La stabilizzazione può essere inquadrata nel problema più generale (e difficile) di assegnare mediante reazione dinamica il polinomio caratteristico del sistema ad anello chiuso. Allo stato attuale, il risultato più completo disponibile in letteratura riguarda la assegnabilità della varietà del polinomio caratteristico (ma non la molteplicità dei suoi punti) ed è formalizzato nel seguente

TEOREMA 2 [25,33] Sia data una realizzazione $\Sigma_1 = (A_1, A_2, B_1, B_2, C)$ di una matrice di trasferimento strettamente propria $W = D_L^{-1}(z_1, z_2)N_L(z_1, z_2)$ con D_L e N_L coprime a sinistra, sia

$$h(z_1, z_2) = \frac{\det(I - A_1 z_1 - A_2 z_2)}{\det D_L(z_1, z_2)}$$

e sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica non passante per l'origine. Allora esiste un compensatore $\bar{\Sigma}_1$ per Σ_1 tale che $\mathcal{C}$ sia la varietà del polinomio caratteristico ad anello chiuso se e solo se

$$\mathcal{C} \supseteq \mathcal{V}(W) \cup \mathcal{V}(h)$$

Dal punto di vista computazionale, una descrizione completa dell'insieme dei polinomi caratteristici ad anello chiuso assegnabili costituirebbe un risultato indubbiamente più utile del precedente. Nel caso in cui N_L e D_L siano *zero coprime*, ovvero $\mathcal{V}(W) = \emptyset$, non è difficile dimostrare [34] che è assegnabile ogni polinomio multiplo di h e con termine costante unitario. Non si sono ottenuti invece risultati conclusivi nel caso in cui $\mathcal{V}(W)$ non sia vuoto. Limitandosi, come non è restrittivo fare, al caso $h = 1$, il problema si riconduce a quello di caratterizzare quali siano i polinomi ottenibili come determinante della matrice polinomiale

$$\begin{bmatrix} X & N_R \\ -Y & D_R \end{bmatrix} \tag{16}$$

quando YX^{-1} è una matrice razionale propria in due indeterminate.

Se non si pongono vincoli sulle matrici polinamiali X e Y, sembrerebbe naturale congetturare che, al variare di X e Y, il determinanate della (16) descriva l'ideale dei minori di ordine massimo di $\begin{bmatrix} N_R \\ D_R \end{bmatrix}$. La congettura è stata provata quando il sistema ha un ingresso e un'uscita. È d'altra parte interessante notare che essa è falsa se riferita a matrici polinomiali in tre indeterminate [35].

4.2 Controllo non interagente

Un compensatore dinamico in retroazione dallo stato ed un precompensatore statico realizzano uno *schema di controllo non interagente* di un sistema Σ_1 com m ingressi ed m uscite se la matrice di trasferimento del sistema ad anello chiuso è diagonale e non singolare.

Come si vede senza difficoltà, condizione necessaria per l'esistenza di uno schema di controllo non interagente è che si possa costruire un *precompensatore bicausale* 2D che disaccoppia Σ_1. Poiché, diversamente dal caso 1D, questa condizione non è anche sufficiente, si devono introdurre ipotesi aggiuntive sulla struttura di Σ_1 onde garantirne la disaccoppiabilità in retroazione. La più semplice consiste nell'assumere che la matrice $[B_1 \; B_2]$ sia iniettiva.

Il seguente teorema riassume i risultati finora ottenuti. È interessante ricordare che la sua prova ha carattere costruttivo e permette di ricavare esplicitamente sia il precompensatore bicausale che il corrispomdente schema di controllo disaccoppiante.

TEOREMA 3 [36] Sia $\Sigma_1 = (A_1, A_2, B_1, B_2, C)$ un sistema con m ingressi e m uscite e si consideri la matrice polinomiale

$$M_0 = \begin{bmatrix} C_1(A_1z_1 + A_2z_2)^{d_1}(B_1z_1 + B_2z_2) \\ C_2(A_1z_1 + A_2z_2)^{d_2}(B_1z_1 + B_2z_2) \\ \dots \\ C_m(A_1z_1 + A_2z_2)^{d_m}(B_1z_1 + B_2z_2) \end{bmatrix}$$

dove C_i è la i-esima riga di C e

$$d_i = \min\{j : C_i(A_1z_1 + A_2z_2)^{d_j}(B_1z_1 + B_2z_2) \neq 0\}$$

Allora Σ_1 ammette un precompensatore disaccoppiante se e solo se

1. $M_0^{-1}C(I - A_1z_1 - A_2z_2)^{-1}(B_1z_1 + B_2z_2)$ è razionale propria

2. esiste una matrice costante non singolare Q_0 tale che M_0Q_0 è diagonale

$$M_0Q_0 = \mathrm{diag}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$$

dove ϵ_i, $i = 1, 2, \dots, m$, sono polinomi omogenei in $\mathbf{R}[z_1, z_2]$ di grado $d_i + 1$.

Nell'ipotesi che $[B_1 \; B_2]$ sia iniettiva, le condizioni 1 e 2 sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di uno schema di controllo non interagente.

Se il sistema Σ_1 soddisfa le condizioni di disaccoppiabilità espresse nel teorema precedente e quella di stabilizzabilità mediante reazione dinamica dallo stato, ovvero

$$\mathrm{rank}[\, I - A_1z_1 - A_2z_2 \quad B_1z_1 + B_2z_2 \,] = n \;, \;\; \forall (z_1, z_2) \in \bar{\mathcal{P}}_1,$$

è possibile progettare uno schema di compensazione in retroazione dallo stato che disaccoppi il sistema ad anello chiuso, rendendolo (o lasciandolo) internamente stabile.

Un problema aperto è quello di individuare condizioni di disaccoppiabilità mediante retroazione meno stringenti dell'ipotesi di iniettività per $[B_1 \; B_2]$.

4.3 Controllo ottimo

Il metodo per la sintesi del compensatore cui si è accennato nel par 4.1 consente di ottenere sistemi ad anello chiuso il cui polinomio caratteristico abbia una varietà $\mathcal{C}$ preassegnata. Tuttavia, ancor più che nel caso dei sistemi 1D, è difficile inferire dalla struttura polare del sistema informazioni utili sul suo comportamento a breve o a medio termine: la forma della varietà e, ciò che più importa, la sua distanza dal polidisco unitario, hanno effetto essenzialmente sulla velocità di convergenza a zero della risposta libera.

In questo paragrafo affronteremo brevemente il problema del controllo da un punto di vista diverso, che tiene conto dell'andamento "transitorio" a breve e a medio termine dei segnali di ingresso e dello stato locale. Ciò si ottiene procedendo alla minimizzazione di un indice quadratico del tipo

$$J(\mathbf{u}, \mathcal{X}_0) = \sum_{\substack{h,k \\ h+k \geq 0}} [\mathbf{u}(h,k)^T R \mathbf{u}(h,k) + \mathbf{x}(h,k)^T Q \mathbf{x}(h,k)] \tag{17}$$

con Q ed R matrici rispettivamente s.d.p. e d.p., supponendo che lo stato iniziale globale $\mathcal{X}_0$ sia una sequanza in ℓ_2.

L'esistenza e l'unicità di una funzione di ingresso che rende finito, minimizzandolo, l'indice J è legata al rango delle matrici (12) e (13). Qui peraltro, anziché il polidisco unitario,sono coinvolti per la (12) l'insieme

$$\mathcal{M} = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} : |z_1| = |z_2| \leq 1\}$$

e per la (13) il toro unitario

$$\mathcal{T}_1 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C} : |z_1| = |z_2| = 1\}$$

Se (12) ha rango pieno in $\mathcal{M}$ e (13) in $\mathcal{T}$, allora [37] la legge di controllo che minimizza l'indice J ha la struttura

$$\mathbf{u}(h,k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} K_i \mathbf{x}(h+i, k-i) \tag{18}$$

Nella (18) le matrici K_i sono i coefficienti dello sviluppo di Laurent, in un anello aperto che include la circonferenza unitaria, della matrice di funzioni analitiche

$$K(z) = -\left(R + (B_1^T + z^{-1}B_2^T)P(z)(B_1 + B_2 z)\right)^{-1}(B_1^T + B_2^T z^{-1})P(z)(A_1 + A_2 z) \tag{19}$$

e $P(z)$ é sul medesimo anello la soluzione analitica dell'equazione di Riccati

$$\begin{aligned} P(z) =& Q + (A_1^T + A_2^T z)P(z)(A_1 + A_2 z) - (A_1^T + A_2^T z^{-1})P(z)(B_1 + B_2 z) \\ & \cdot \left(R + (B_1^T + z^{-1}B_2^T)P(z)(B_1 + B_2 z)\right)^{-1}(B_1^T + B_2^T z^{-1})P(z)(A_1 + A_2 z) \end{aligned}$$

che soddisfa la condizione

$$P(e^{i\omega}) = P^*(e^{i\omega}) \geq 0 \ , \ \forall \omega \in [0, 2\pi]$$

In particolare va osservato che la soluzione (18) ha la struttura di una legge di reazione dallo stato che coinvolge, staticamente, gli stati locali appartenenti all'insieme di separazione passante per (h, k).

Salvo casi particolari, che sono tuttora allo studio [38], la (18) coinvolge un numero infinito di stati locali nella determinazione del valore dell'ingresso in (h, k). I problemi aperti nell'area del controllo ottimo 2D sono molto numerosi e vanno dalla messa a punto di algoritmi risolutivi per l'equazione di Riccati in z alla determinazione della successione dei coefficienti K_i nella (18) e degli effetti di un suo troncamento, dalla introduzione di test per verificare le condizioni di rango su $\mathcal{M}$ e $\mathcal{T}$ a problemi di carattere numerico legati all'enorme numero di iterazioni richieste nel calcolo delle soluzioni.

Da un punto di vista piú generale, si puó criticare la struttura stessa, non causale, della soluzione trovata e porsi il problema di ricercare leggi di controllo subottime, implementabili con controllori, eventualmente dinamici, causali.

5 Riferimenti bibliografici

1. D.D.Givone, R.P.Roesser *Multidimensional linear iterative circuits. General Properties* IEEE Trans. Comp., vol. C-21, pp.1067-73, 1972

2. D.D.Givone, R.P. Roesser *Minimization of multidimensional linear iterative circuits* IEEE Trans. Comp., vol. C-22, pp. 673-78, 1973

3. R.P.Roesser *A discrete state-space model for linear image processing* IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-20, pp.1-10, 1975

4. S.Attasi *Systèmes linéaires homognes à deux indices* Rap. Laboria, 31, 1973

5. E.Fornasini, G.Marchesini *Algebraic realization theory of two-dimensional filters* in Variable Structure Systems (A.Ruberti, R.Mohler eds.), L.N. in Econ. and Math. Sys., vol. 111, Springer, 1974

6. E.Fornasini, G.Marchesini *State space relization theory of two-dimensional filters* , IEEE Trans. Aut. Contr., vol. AC-21, pp. 484-92, 1976

7. P.Rocha, J.C.Willems *State for 2D systems* Lin. Alg. Appl., Special Issue on Linear Systems, vol.122, 1989

8. P.Rocha *Structure and representation of 2-D systems* Thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 1990

9. P.Rocha, J.C.Willems *Dterministic markovian 2D systems* in Analysis and Optimization of Systems (A.Bensoussan, J.L.Lions eds.) Springer L.N. in Contr. Inf.Sci., vol. 111, pp. 1079-90, 1988

10. B.Lévy, M.Adams, A.Willsky *Solution and linear estimation of 2D nearest neighbour models* to appear in IEEE Proc. Apr. 1990

11. J.L.Shanks, S.Treitel, J.H.Justice *Stability and synthesis of two dimensional recursive filters* , IEEE Trans. Audio El., vol AU-20, pp.115-28, 1972

12. T.S.Huang *Stability of two-dimensional recursive filters* IEEE Trans. Audio El., vol AU-20, pp. 158-63 , 1972

13. S.K.Mitra, A.D.Sagar, N.A.Pendergrass *Realizations of two dimensional recursive digital filters* IEEE Trans. Circ. Sys., vol. CAS-22, pp. 177-84, 1976

14. D.Goodman *Some stability properties of two-dimensional linear shift-invariant digital filters* , IEEE Trans. Circ. Sys., vol. Cas-24, pp.201-08, 1977

15. E.I.Jury *Stability of multidimensional scalar and matrix polynomials* Proc. IEEE, vol. 66, pp.1018-47, 1978

16. E.Fornasini, E.Marchesini *Structure and properties of two-dimensional systems* in Multidimensional Systems (S.G. Tzafestas ed.) Dekker, 1983

17. E.Fornasini, G.Marchesini *Doubly indexed dynamical systems: state space models and structural properties* Math. Sys. Th., vol.12, pp. 1978

18. S.Kung, B.Lévy, T.Kailath *New results in 2-D systems theory. Part I : 2D polynomial matrices, factorization and coprimeness; Part II : 2D state-space models, realizations and the notions of controllability, observability and minimality* Proc. IEEE, vol 65, n.6, 1977

19. E.Fornasini, G.marchesini *Two-dimensional filters: new aspects of the realization theory* Proc of the Third Int. J. Conf. Pattern Rec., Coronado (CA), pp. , 1976

20. E. Fornasini *On the relevance of noncommutative power series in spatial filters realization* IEEE Trans. Circ. Sys., vol. CAS-25, pp. 290-99, 1979

21. E.Fornasini, G.Marchesini *Global properties and duality in 2D systems* Sys. Contr. Letters, vol.2, pp.30-38, 1982

22. M.Bisiacco *Struttura algebrica dei sistemi 2D* Tesi - Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica - Università di Padova, 1983

23. M.Fliess *Séries réconnaissables, rationnelles et algébriques* Bull.Sci.Math., vol. 94, pp.231-39, 1970

24. M.Fliess *Matrices de Hankel* J. Math. Pures Appl., vol. 53, pp.197-224, 1974

25. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *Dynamic regulation of 2D systems: a state space approach* Lin. Alg. Appl., Special Issue on Linear Systems, voll. 122-24, pp. 195-218, 1989

26. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *2D systems feedback compensation: an approach based on commutative linear transformations* Lin. Alg. Appl., vol. 121, pp. 135-50, 1989

27. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *Some connections between algebraic properties of pairs of matrices and 2D realizations* in Analysis and Optimization of Systems (A.Bensoussan, J.L.Lions eds.), Springer L.N. Contr. Inf. Sci., vol 63, part 2, pp. 117-29, 1984

28. E.Fornasini, G.Marchesini *On the internal stability of two-dimensional filters* IEEE Trans. Autom. Contr., vol. AC-24, pp. 129-30, 1979

29. E.Fornasini, G.Marchesini *Stability analysis of 2D systems* IEEE Trans. Circ. Sys., vol. CAS-27, pp.1210-17, 1980

30. M.Bisiacco *State and output feedback stabilizability of 2D systems* IEEE Trans. Circ. Sys., vol. CAS-32, pp.1246-54, 1985

31. M.Bisiacco *On the structure of 2D observers* IEEE Trans. Aut. Contr., vol AC-31, pp.676-80, 1986

32. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *Linear algorithms for computing closed loop polynomials of 2D systems* Proc. ISCAS 88, pp.345-48, Helsinki, 1988

33. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *Controller design for 2D systems* in Frequency and State Space Methods for Linear Systems (C.I.Byrnes, A.Lindquist ed.), pp.99-113, Elsevier, 1985

34. M.Bisiacco, E.Fornasini, G.Marchesini *On some algebraic aspects of 2D dynamical feedback control* Proc. MTNS'89, Amsterdam, 1989

35. R.Gattazzo *Polynomial matrices with given determinant* to appear in Lin. Alg. Appl.

36. E.Fornasini, G.Marchesini *Noninteracting control of 2D systems* to appear in IEEE Trans. Aut. Contr., Nov.1990

37. M.Bisiacco, E.Fornasini *Optimal control of 2D systems* to appear in SIAM J. Contr. Opt., 1990

38. M.Bisiacco, E.Fornasini *Structure and solutions of the LQ optimal control problem for 2D systems* Proc. IFAC Workshop on System Structure and Control, pp.127-32, Praga, 1989