

---

# UN PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DELLA TRASFERENZA DI UN GRAFO DI FLUSSO DI SEGNALI CON LA FORMULA DI MASON

F. BOMBI (\*) - E. FORNASINI (\*) - A. LEPSCHY (\*\*) 

---

*L'articolo presenta un procedimento per individuare i cammini ingresso-uscita, i cicli e le relative condizioni di tangenza di un grafo di flusso di segnale, in rapporto alla applicazione della formula di Mason.*

*Il procedimento si basa sulla costruzione di un'arborescenza i cui vertici terminali corrispondono ai cammini ingresso-uscita ed ai cicli del grafo e viene presentato anche in forma idonea all'implementazione su elaboratore.*

## PREMESSA.

Come è noto, i grafi di flusso di segnale (*signal flow graph*) sono grafi orientati e pesati il cui impiego è stato suggerito da S. J. Mason [1, 2] per la rappresentazione delle relazioni funzionali che caratterizzano il comportamento di un sistema, in alternativa ai tradizionali schemi a blocchi.

Quando il grafo non è molto semplice o non è riducibile con poche manipolazioni elementari ad uno schema semplice, il problema di calcolare la trasferenza da un vertice-sorgente ad un altro vertice del grafo comporta qualche complicazione e calcoli laboriosi; per risolverlo in maniera sistematica Mason ha suggerito una formula, che da lui ha preso nome, esprimente la trasferenza cercata come rapporto di due termini di struttura analoga (quello a denominatore comune a tutte le trasferenze del grafo), ottenuti come somma algebrica di prodotti di trasferenze relative a cicli e/o a cammini che non abbiano vertici in comune.

L'impiego di tale formula richiede dunque preliminarmente l'individuazione di tutti i cicli del grafo e di tutti i cammini che collegano il vertice di ingresso a quello di uscita, e la verifica della condizione di *tangenza* (vertice in comune) fra ciascun ciclo e gli altri cicli e/o i cammini individuati.

Per individuare i cammini ed i cicli di cui si è detto e per verificare le condizioni di tangenza, nella letteratura sono stati proposti alcuni procedimenti; fra questi si ricordano quello di Mariani e Tassinari [3], che ricorre ai numeri strutturali, e quello — del pari utilizzante tali numeri — presentato nel volume di teoria dei circuiti di Bellert e Woźniacki [4].

In questa nota si presenta un procedimento di ispezione che consente di risolvere agevolmente il problema indicato, portando alla individuazione di cammini e vertici e delle relative condizioni di tangenza.

(\*) F. BOMBI, E. FORNASINI - Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica dell'Università di Padova.

(\*\*) A. LEPSCHY (Socio AEI) - Istituto di Elettrotecnica e di Elettronica dell'Università di Padova e LADSEB-CNR.

Il procedimento consiste nel tracciamento e nella ispezione di un grafo arborescente i cui pozzi corrispondono a cicli e cammini ingresso-uscita del grafo di partenza; la costruzione del grafo arborescente verrà inizialmente descritta in termini di operazioni grafiche e successivamente si illustrerà un algoritmo per la corrispondente implementazione su elaboratore, a partire dalla matrice di connessione del grafo assegnato; in appendice si presenterà inoltre un criterio di manipolazione preliminare del grafo, che semplifica apprezzabilmente l'applicazione del metodo esposto, da adottare nel caso che il grafo rappresenti le equazioni ingresso-stato-uscita del sistema nella forma usuale  $\dot{x} = Ax + Bu$ ;  $y = Cx$ .

## PRESENTAZIONE DEL PROCEDIMENTO IN TERMINI DI MANIPOLAZIONE DI GRAFI.

Sia dato un grafo di flusso di segnale e si voglia calcolare la trasferenza  $W_{i,o}(s)$  da un vertice  $i$  del grafo, che ne sia una sorgente, ad un altro vertice  $o$  del grafo stesso (che non deve necessariamente essere un pozzo). Il grafo presenta  $h$  cammini distinti da  $i$  ad  $o$  e siano  $P_1(s), P_2(s) \dots P_h(s)$  le relative trasferenze; il grafo presenta inoltre  $k$  cicli, le cui trasferenze siano  $L_1(s), L_2(s) \dots L_k(s)$ .

Come è noto la formula di Mason può essere scritta nella forma:

$$(1) \quad W_{i,o}(s) =$$

$$\sum_1^h [P_j(s) \cdot (1 - L_1(s)) \cdot (1 - L_2(s)) \dots (1 - L_k(s))]^* \\ [(1 - L_1(s)) \cdot (1 - L_2(s)) \dots (1 - L_k(s))]^*$$

dove l'asterisco denota il fatto che dallo sviluppo dei prodotti vanno eliminati gli addendi comprendenti fattori relativi a cicli e/o cammini tangenti.

Per la determinazione dei cammini e dei cicli del grafo è anzitutto conveniente modificarlo eliminando i pozzi non di interesse e, se  $o$  non è già un pozzo, aggiungendo al grafo stesso un nuovo vertice  $o'$  collegato ad  $o$  da un arco di trasferenza unitaria.

Ciò fatto, partendo dal vertice di ingresso  $i$  si costruisce un'arborescenza associando a tale vertice e ad ogni altro vertice mano a mano raggiunto la stella di archi uscenti dal vertice stesso nel grafo di partenza (se del caso, modificato come si è detto). Tale procedimento si arresta in corrispondenza ad un vertice raggiunto nei seguenti due casi:

- (necessariamente) se il vertice è un pozzo del grafo dato;

b) (per convenzione) se il vertice raggiunto è stato già incontrato (evidentemente una sola volta) nel cammino dalla sorgente della arborescenza al vertice stesso.

In tal modo, come è chiaro, il procedimento si arresta dopo un numero finito di passi. Ogni pozzo dell'arborescenza così costruita corrisponde ad un cammino da  $i$  ad  $o$  ovvero ad un ciclo del grafo di partenza. Ad ognuno degli  $h$  cammini  $i \rightarrow o$  corrisponde, evidentemente, un solo pozzo dell'arborescenza (per il modo stesso con cui questa è stata costruita) mentre ad ogni ciclo può corrispondere più di un pozzo.

Se si ha l'avvertenza di ordinare ciascuna stella uscente dai vertici dell'arborescenza in modo che l'eventuale arco diretto verso  $o'$  figuri prima degli altri, percorrendo nell'ordine i pozzi dell'arborescenza, dopo ciascuno di quelli che corrispondono ad un cammino si incontrano quelli che corrispondono a tutti i cicli tangenti al cammino stesso (oltre ad eventuali altri cicli tangenti a quelli già incontrati ma non al cammino).

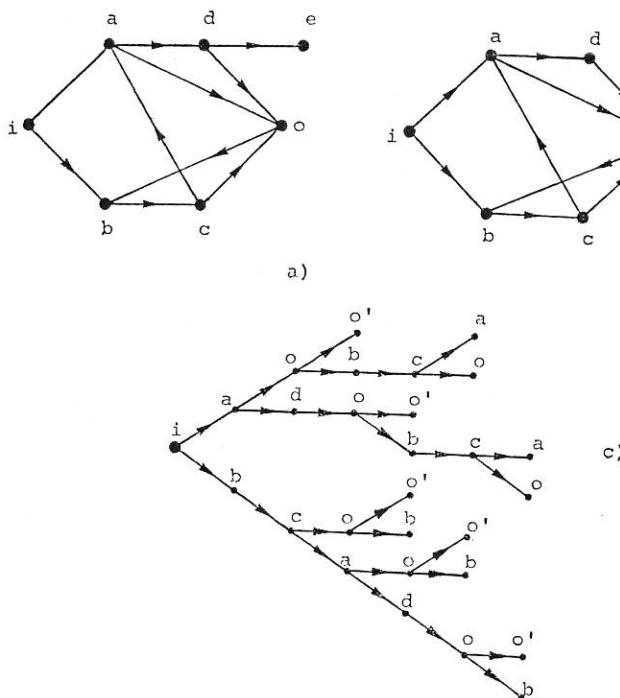


Fig. 1

Il procedimento descritto è esemplificato in fig. 1. In questa è riportato il grafo di partenza (fig. 1a); quello modificato eliminando il pozzo  $e$ , non di interesse, ed aggiungendo il pozzo  $o'$  (fig. 1b); ed infine l'arborescenza costruita con le regole indicate (fig. 1c). Alla figura è associata la tabella le cui colonne elencano i vertici toccati in successione nell'arborescenza percorrendo i cammini dalla radice ai pozzi; la tabella è poi riscritta eliminando dalle colonne corrispondenti ai cicli i simboli dei vertici incontrati dalla radice fino a quello che figura alla fine della colonna; i simboli rimasti corrispondono così ai soli vertici del ciclo (1).

(1) Può essere opportuno notare che la tabella non va considerata come un numero strutturale, perché non è irrilevante l'ordine dei suoi termini.

Considerando la fig. 1c (o le tabelle) si stabilisce immediatamente che:

1) nel grafo sono presenti 5 cammini da  $i$  ad  $o$ , corrispondenti alle colonne 1, 4, 7, 9, 11 della tabella ed indicati con i simboli  $\pi_1 \div \pi_5$ ;

2) nel grafo sono presenti tre cicli, indicati in tabella con i simboli  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ ;  $\lambda_1$  corrisponde alle colonne 2 e 10;  $\lambda_2$  alle colonne 3; 6 ed 8 ed infine  $\lambda_3$  alle colonne 5 e 12;

3) il cammino  $\pi_1$  è tangente ai cicli  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (che corrispondono infatti a colonne che seguono quella del cammino); analogamente  $\pi_2$  è tangente a  $\lambda_3$  e  $\lambda_2$ ;  $\pi_3$  a  $\lambda_2$ ;  $\pi_4$  a  $\lambda_1$ ;  $\pi_5$  a  $\lambda_3$ .

Accanto a queste tre proprietà, che vengono dedotte direttamente dall'arborescenza o dalla tabella (considerando, ad esempio, solo la posizione relativa delle colonne dei cicli rispetto a quelle dei cammini), si può agevolmente stabilire altresì che:

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  hanno vertici in comune.

Quest'ultimo risultato (ove il grafo fosse molto

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i	i	i	i	i	i	j	i	i	i	j	i
a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b
o	o	o	o	d	d	c	c	c	c	c	c
o'	b	b	d	o	o	b	b	a	a	a	a
	c	c	c	o'	b	c	c	o'	o'	d	d
	d	o		c	a	o	b	o'	b	g	b

1	1	2	2	3	2	3	2	4	1	5	3
i		i	a	d	d	i	b	i	b	i	b
a		o	b	b	o	b	c	c	c	b	c
o		c	c	c	o'	c	c	a	a	a	a
o'		a	o	o	b	b	b	o'	o'	d	o

complesso e quindi lo stabilirlo risultasse meno agevole) potrebbe essere conseguito costruendo (in base all'arborescenza o alla tabella) la matrice di appartenenza dei vertici ai cicli (*circuit matrix*). In proposito si può anche notare che le condizioni di tangenza fra cicli vanno individuate una sola volta per tutte, quale che sia il numero di trasferenze che si vogliono calcolare per lo stesso grafo.

#### PRESENTAZIONE DEL PROCEDIMENTO IN TERMINI DI OPERAZIONI SULLA MATRICE DI CONNESSIONE.

Al procedimento descritto nel paragrafo precedente corrisponde un algoritmo operante sulla matrice di connessione del grafo che verrà qui di seguito illustrato. Per comodità di elaborazione conviene individuare i nodi del grafo con il numero d'ordine

delle corrispondenti riga e colonna della matrice di connessione; il nodo di ingresso  $i$  verrà considerato per primo.

Costruita la matrice di connessione secondo la convenzione indicata, il procedimento consta dei seguenti passi:

1) Modificare la matrice di connessione in modo

corrispondente alle operazioni inizialmente eseguite sul grafo (per es. nel passaggio da fig. 1a a fig. 1b); in particolare si tratta di:

1a) Aggiungere una riga ed una colonna, che verranno contrassegnate con l'indice 0, corrispondenti al nodo  $o'$ ; la colonna aggiunta ha un 1 nella posizione corrispondente al nodo di uscita  $o$  ed inoltre nella

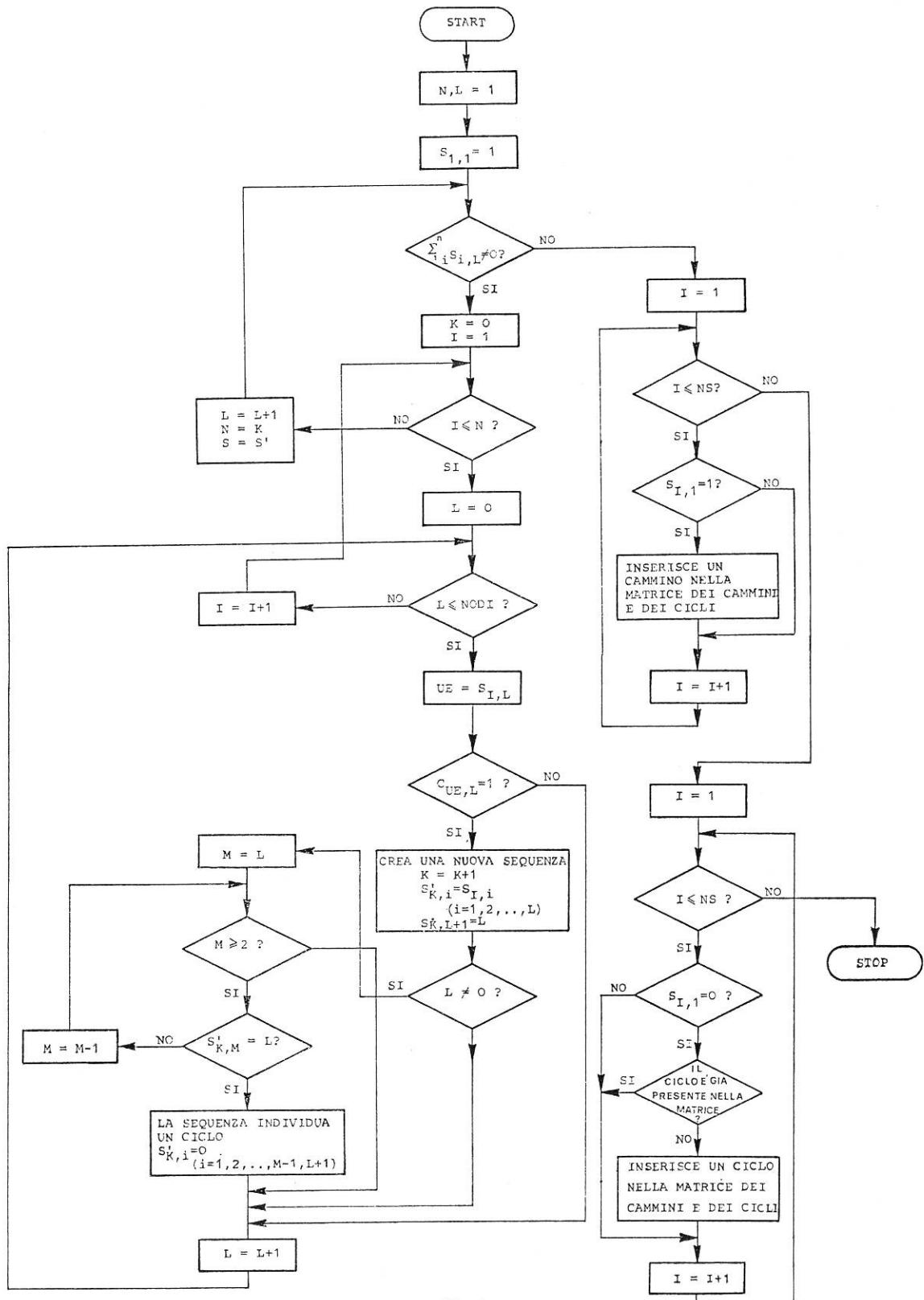
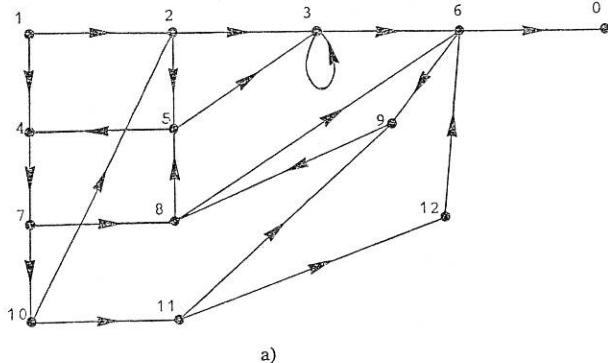


Fig. 2

posizione 0 (2); la riga è formata di zeri ad eccezione dell'elemento di posto 0 (dovendo calcolare trasferenze relative a più nodi di uscita conviene iterare il procedimento che verrà descritto spostando l'elemento uguale ad 1 nella prima colonna).

1b) Eliminare le righe nulle della matrice e le corrispondenti colonne; ciò equivale ad eliminare dal grafo i pozzi non di interesse e gli archi ad essi afferenti; il procedimento dovrà essere ripetuto se l'eliminazione di colonne corrispondenti a righe nulle crea nuove righe nulle (pozzi); la matrice così ottenuta verrà indicata con  $C = (c_{ji})$ .

2) Costruire le sequenze dei vertici dell'arborescenza di cui al paragrafo precedente; le regole per la costruzione di tali sequenze possono essere espresse in forma ricorsiva nel modo qui di seguito illustrato, in cui le sequenze al passo  $j$  sono rappresentate dalle righe di una matrice  $S_j$  di dimensioni  $L_j \times N_j$



a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
12	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

b)

NODI	CAMMINI												CICLI											
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	3	4	0	0	0	0	0	6	0	6	7	9	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	0
4	0	0	4	4	4	4	4	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	1	7	1	1	0	0	3
5	0	3	3	3	3	3	3	5	0	0	6	8	0	0	0	0	5	4	6	7	9	0	0	2
6	4	5	7	10	10	9	7	5	7	8	10	8	8	7	0	0	2	0	3	0	6	1	1	0
7	0	0	5	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	0	0	2	8	2	2	0	0	4
8	0	0	6	9	0	0	4	4	0	0	7	7	0	0	0	0	4	3	5	6	8	3	0	0
9	0	0	0	8	8	0	0	0	0	0	6	6	6	0	0	0	3	0	4	5	7	2	2	0
10	0	0	0	6	6	6	0	0	4	4	4	4	4	4	0	0	0	0	9	3	3	0	0	5
11	0	0	0	7	7	7	0	0	0	0	5	5	5	5	0	0	0	0	4	4	0	0	0	0
12	0	0	0	0	9	8	0	0	0	0	0	0	7	6	0	0	0	0	5	0	3	0	0	0

c)

Fig. 3

( $L_j$  = lunghezza delle sequenze;  $N_j$  = numero delle sequenze):

2a) al primo passo,  $L_1 = N_1 = 1$ ; l'unica sequenza è costituita dal solo nodo  $i$  (cui si è associato l'indice 1).

(2) In termini di operazioni sul grafo ciò corrisponde ad inserire un autoanello fittizio su  $o'$ , che permette di prolungare tutti i rami dell'arborescenza terminanti su  $o'$  in modo da renderli di lunghezza uguale agli altri; il fatto non è d'interesse nell'esecuzione grafica della procedura, quale è stata descritta nel paragrafo precedente, che infatti non introduce l'autoanello in questione, ma riesce comodo in rapporto all'esecuzione meccanizzata.

ottiene ponendo uguali a 0 tutti gli elementi della sequenza considerata che precedono quello uguale all'elemento aggiunto e quest'ultimo.

2d) il procedimento si arresta al passo  $r$  in cui l'ultima colonna di  $S_r$  è nulla; nelle ipotesi adottate, in cui il nodo di ingresso è una sorgente, tutti i percorsi ingresso-uscita sono costituiti dalle righe di  $S_r$ , che iniziano per 1, mentre le altre righe (che iniziano per 0) corrispondono a cicli.

3) Costruire la matrice di appartenenza dei vertici a cammini e cicli, cioè la matrice le cui righe cor-

rispondono ai vertici del grafo, le cui colonne corrispondono a cammini e cicli ed i cui elementi sono diversi da 0 se il vertice appartiene al cammino o al ciclo della colonna ed uguali a 0 in caso contrario; il valore attribuito agli elementi diversi da 0 coincide con il numero d'ordine con cui compaiono nel percorso o nel ciclo, in quest'ultimo caso iniziando convenzionalmente la numerazione dal nodo di indice più basso presente nel ciclo; nella generazione di tale matrice si dovranno eliminare colonne uguali, in corrispondenza a cicli individuati da più di una riga di  $S_r$ .

La matrice di cui al punto 3 compendia tutta l'informazione sul grafo, evidenziando gli elementi di interesse ai fini dell'applicazione della formula di Mason, in quanto le sue colonne corrispondono ai cammini da  $i$  ad  $o$  ed ai cicli del grafo (riportati una sola volta) mentre la condizione di tangenza viene agevolmente individuata in base alla presenza di elementi diversi da 0 su una stessa riga nelle colonne corrispondenti ai cicli e/o ai cammini di interesse.

In fig. 2 è riportato il flow chart per la costruzione della matrice di appartenenza dei vertici a cammini e cicli a partire dalla matrice di connessione del grafo assegnato. Il corrispondente programma (che è stato scritto in PL/1) risulta molto semplice; la fig. 3 ne illustra l'applicazione ad un grafo di flusso di segnale sufficientemente complesso da rendere piuttosto laboriosa l'applicazione manuale del procedimento, come descritto nel paragrafo precedente; la fig. 3a rappresenta il grafo, la 3b la corrispondente matrice di connessione e la 3c la matrice di appartenenza dei vertici a cammini e cicli, quale è stata ottenuta applicando alla matrice di connessione il programma messo a punto.

#### APPENDICE.

Se il grafo di flusso di segnale sul quale si deve applicare la formula di Mason corrisponde alla descrizione del funzionamento di un sistema in termini

di equazioni di stato, presentate nella forma abituale:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

è conveniente procedere anzitutto ad una semplificazione preliminare del grafo, riducendone il numero di vertici.

Per illustrare le modifiche che si suggerisce di apportare al grafo ci si riferirà, per comodità di esposizione, ai soli legami ingresso-ristato, sempre nella ipotesi (semplificativa ma non riduttiva) di ingresso scalare. In tal caso alla prima delle (A.1) corrisponde un grafo di flusso della forma di quello riportato in fig. 1A, con  $2n + 1$  vertici, essendo  $n$  la di-

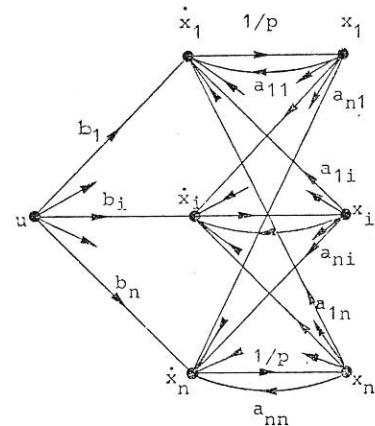


Fig. 1A

dimensione del vettore di stato. Per altro solo gli  $n$  vertici corrispondenti alle  $x_i$  possono interessare concretamente come uscite di trasferenze; si tratta dunque di «assorbire» i vertici intermedi  $\dot{x}_i$ , applicando le classiche regole di manipolazione dei grafi di flusso

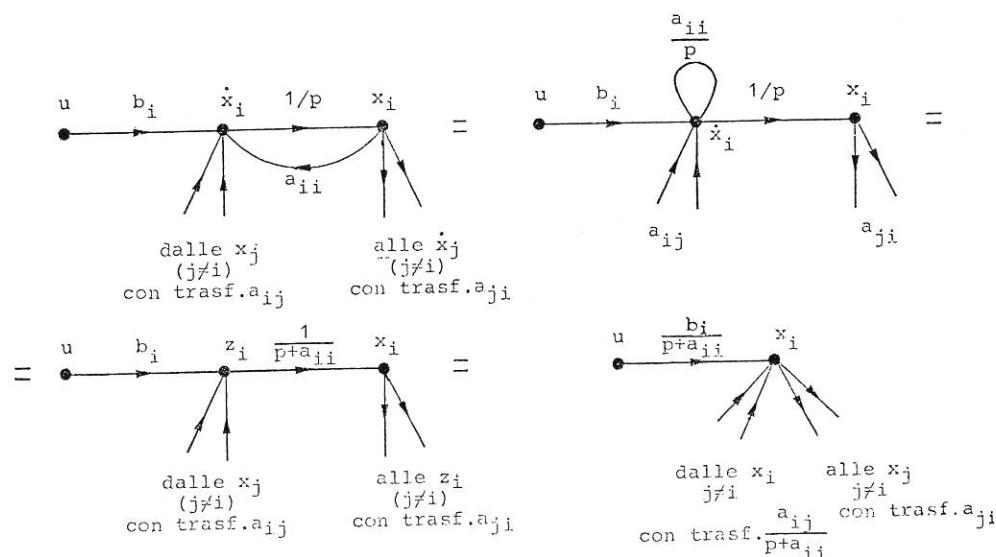


Fig. 2A

di segnale, illustrate, con riferimento alla generica  $x_i$ , nella fig. 2A.

In definitiva si tratta dunque di passare da un grafo del tipo di quello di fig. 1A ad uno (con soli  $n+1$  vertici) del tipo di quello di fig. 3A, in cui le

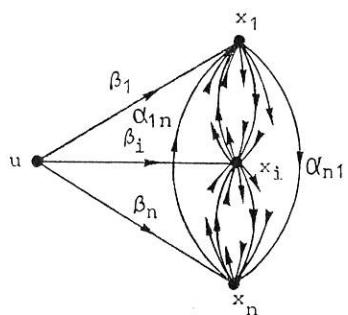


Fig. 3A

trasferenze  $\beta_i$  ed  $\alpha_{ij}$  associate agli archi che vanno da  $u$  a ciascuna delle  $x_i$  e da ciascuna di queste a ciascuna delle altre sono ottenuti dagli elementi  $b_i$  di  $B$  ed  $a_{ij}$  di  $A$  con le formule

$$(A.2) \quad \begin{aligned} \beta_i &= \frac{b_i}{p + a_{ii}} \\ \alpha_{ij} &= \begin{cases} 0 & \text{per } j = i \\ \frac{a_{ij}}{p + a_{ii}} & \text{per } j \neq i \end{cases} \end{aligned}$$

e dove, evidentemente, la matrice  $(\alpha_{ij})$  ha la diagonale principale costituita di elementi nulli; in corrispondenza il grafo di fig. 3A non presenta autoanelli.

Manoscritto pervenuto il 6 marzo 1975.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] S. J. MASON: *Feedback Theory - Some properties of signal flow graphs*. « Proc. I.R.E. », XLI, 9, settembre 1953, p. 1144-1156.
- [2] S. J. MASON: *Feedback Theory - Further properties of signal flow graphs*. « Proc. I.R.E. », XLIV, 7, luglio 1956, p. 920-926.
- [3] L. MARIANI, M. TASSINARI: *Sull'impiego dei numeri strutturali per l'analisi dei sistemi di controllo lineari*. « Alta Frequenza », XXXIV, vol. 12, dicembre 1965, p. 904-909.
- [4] S. BELLERT, H. WOZNIAK: *Analiza i syntezza ukiadów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*. « Wydawnictwa Naukowo-Techniczne ». Warszawa 1968.