

0. Introduzione

Cominceremo con questo capitolo ad applicare sistematicamente allo studio delle reti elettriche i concetti che abbiamo esposto nelle ~~prime~~ ~~partite~~ parti delle dispense.

Lo scopo che inizialmente ci proponiamo è quello di ricavare delle tecniche di sintesi, o delle tecniche che consentano, adeguate una matrice $W(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$, di costruire, sotto opportune ipotesi su $W(s)$, una rete la cui ammettanza (o impedenza, o matrice ibrida, o matrice di diffusione) sia $W(s)$.

L'analisi delle reti elettriche sarà differente alle ~~terze~~ parti di questi appunti, ed utilizzerà concetti dello studio dei grafi che esporremo in quelle parti: per le sintesi, di cui ora ci occupiamo, saranno sufficienti le nozioni apprese nel corso di Elettrotecnica, completate con alcune poche altre che formano l'oggetto di questo capitolo.

1. Il concetto di m-porte (o m-bipolo)

2. Elementi circuitali fondamentali.

(2)

Quando si considera un problema di sintesi, come quando ci si propone di ottenere un m-impolo elettrico che soddisfi ad assegnate prescrizioni (strutture delle matrici impedenza, delle matrici di diffusione od altre ancora), è ovvio che occorre specificare qual è la lista dei componenti elementari disponibili per costruire l'm-impolo e qual è l'insieme delle connessioni che riteniamo ammissibili fra tali componenti.

Noi ci occuperemo di sintesi di reti lineari passive, e considereremo disponibili per la sintesi la seguente lista di componenti elementari "ideali": resistenze, induttanze, capacità (tutte di valore non negativo), trasformatori multiporata, giratori.

Ci soffermiamo qui sugli ultimi due componenti, che sono probabilmente meno familiari degli altri.

TRASFORMATORE MULTIPORTA

Il trasformatore ideale $(h+K)$ -porta è un $(h+K)$ -bipolo caratterizzato da una matrice reale $T \in \mathbb{R}^{K \times h}$, detta matrice "dei rapporti spuri" o "dei rapporti di trasformazione"; dette i_1 e v_1 le variabili che interessano le prime h porte, ed i_2 e v_2 quelle che interessano le residue K porte tutte riferite alla "convenzione degli utilizzatori" il trasformatore istituisce il legame:

$$\begin{matrix} h \\ K \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & T^T \\ -T & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} h \\ K \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.1)$$

La rappresentazione grafica semplificata del trasformatore multiporata è quella di fig. 2.1

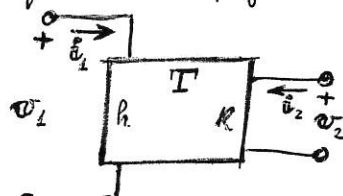


fig. 2.1

dove le coppie di morsetti di sinistra è rappresentativa delle h coppie relative al pedice 1, e le coppie di morsetti di destra è rappresentativa delle K coppie relative al pedice 2.
Una rappresentazione più dettagliata è quella di Belenky

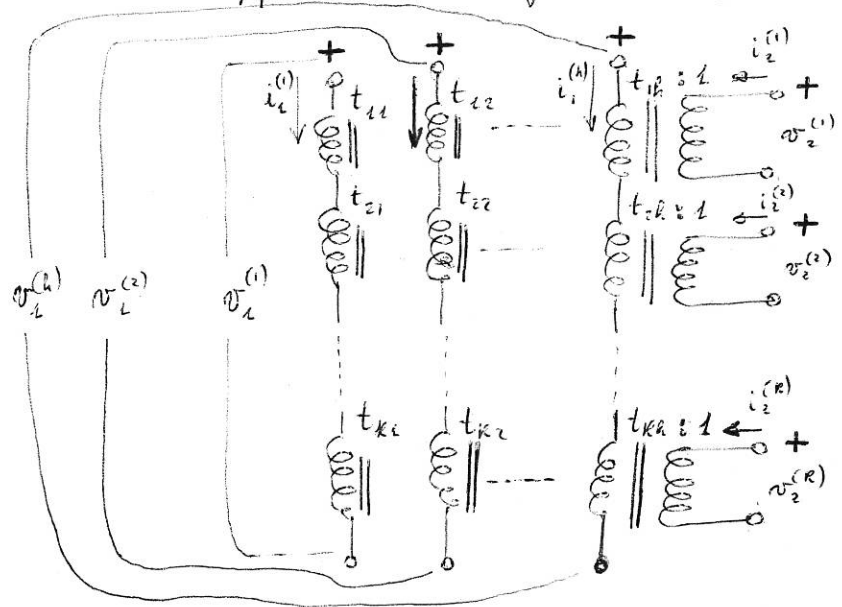


fig (2.2)

di fig. 2.2, dove $t_{ij} : 1$ denotano i rapporti spire

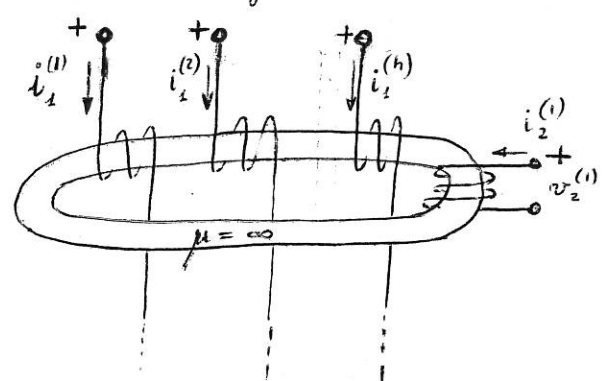


fig (2.3)

Se supponiamo di avvolgere le prime "n" di avvolgimenti di fig (2.2) su un nucleo di permeabilità infinite, come indicato in fig (2.3), e lo stesso, su nuclei distinti, facciamo per ogni altre nze successive, dovendo essere nulle le totali amperspire interassanti, ciascuno nucleo torriamo

$$t_{11} i_1^{(1)} + t_{12} i_1^{(2)} + \dots + t_{1h} i_1^{(h)} + i_2^{(1)} = 0 \quad (2.2)$$

$$t_{K1} i_1^{(1)} + t_{K2} i_1^{(2)} + \dots + t_{Kh} i_1^{(h)} + i_2^{(K)} = 0$$

e quindi

$$\vec{U}_2 = - T^T \vec{U}_1$$

(4)

Se molte sono presenti i flussi "dispersi", coniche ogni avvolgimento concatenare soltanto il flusso del nucleo su cui è avvolto, le tensioni presenti in ciascun avvolgimento sono dovute soltanto alla variazione del flusso nel nucleo dell'avvolgimento, e si ha quindi

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= t_{11} v_2^{(1)} + t_{21} v_2^{(2)} + \dots + t_{k1} v_2^{(k)} \\ v_1^{(2)} &= t_{12} v_2^{(1)} + t_{22} v_2^{(2)} + \dots + t_{k2} v_2^{(k)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$v_1^{(h)} = t_{1h} v_2^{(1)} + t_{2h} v_2^{(2)} + \dots + t_{kh} v_2^{(k)}$$

e quindi conclusione.

$$v_1 = T^T v_2$$

Quanto abbiamo visto indica quale sia una tecnica costruttiva per ottenere concretamente una approssimazione "fisica" del trasformatore ideale. In realtà, a prescindere dagli inconvenienti pratici derivanti dall'uso di avvolgimenti nelle tecnologie attuali, la possibilità stesse di approssimare in modo soddisfacente la situazione descritta (accoppiamenti senza dispersioni, nuclei a permeabilità infinita, assenza di capacità parassite, etc...) risulta essere assai remota, e comunque economicamente non conveniente.

La sintesi di reti elettriche che includano anche trasformatori risulta peraltro assai più semplice, dal punto di vista matematico, di quella che non li include, e noi esamineremo in generale che essi siano disponibili. Accenneremo comunque anche al problema della sintesi senza trasformatori, del quale è il caso di ricordarlo - non è ancora stata trovata una soluzione generale.

Esercizio 1. Si verifichi che l'usuale trasformatore a 2 porte rientra nella classe dei trasformatori multipor-
te.

Nel trasformatore multiporta abbiamo assunto come "ingressi",
ossia come "grandezze di comando", le componenti del vettore
 $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ e come "grandezze comandate" le componenti del vettore
 $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. In generale non è lecito, sulle varie porte, scambiare
grandezze di comando e grandezze comandate. E' lasciato
come esercizio provare che se T non è una matrice quadrata
non è possibile assumere $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ come vettore di "comando".

Esercizio 2. Se T è matrice quadrata, qual è una condi-
zione necessaria e sufficiente affinché $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ possa essere
assunto come vettore di "comando"?

GIRATORE

Il giratore ideale è un doppio bipolo caratterizzato da
una costante reale γ detta "resistenza di giratore", e per
cui valgono le equazioni

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

quando entrambe le porte sono riferite alla convenzione degli
utilizzatori.

la rappresentazione grafica del giratore (ideale) è quella di
fig 2.4

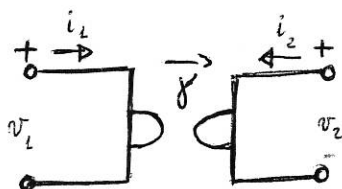


fig. 2.4

E' ovvio che, quando $\gamma \neq 0$, si possono assumere come gran-
dezze di comando sia le correnti che le tensioni. Infatti è

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\gamma \\ 1/\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

3. Intraconnessioni.

Le connessioni più frequentemente considerate fra m -bipoli sono quella in serie, quella in parallelo e quella in cascata. Le prime due connessioni sono una generalizzazione immediata delle connessioni omonime fra bipoli.

Se si hanno due m -bipoli N ed N' , i cui terminali sono nel-
l'ordine $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_m A'_m$ e $B_1 B'_1, B_2 B'_2, \dots, B_m B'_m$
e se si connettono A'_1 con B_1, A'_2 con $B_2, \dots, A'_m$ con B_m , l' m -bipolo
risultante, di terminali $A_1 B'_1, A_2 B'_2, \dots, A_m B'_m$ è chiamato la
serie dei due m -bipoli.

Se si connettono A_1 con $B_1, \dots, A_m$ con B_m, A'_1 con $B'_1, \dots, A'_m$ con B'_m
l' m -bipolo risultante, di terminali $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_m B_m$ è
chiamato il parallelo dei due m -bipoli.

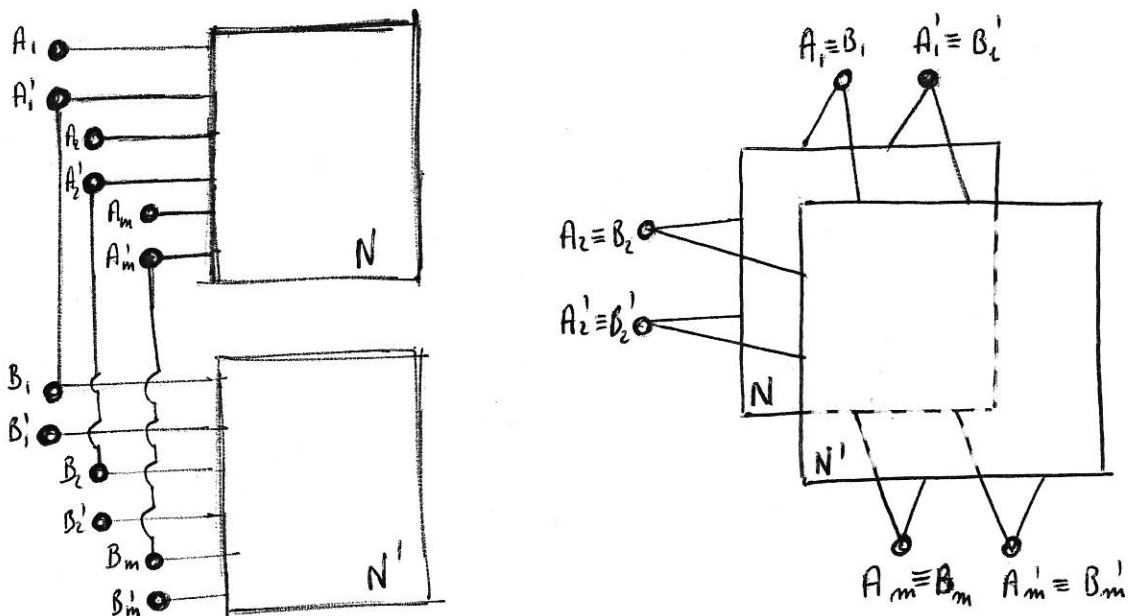


fig. 1

Usualmente, le connessioni serie e parallelo sono indicate, in modo
pictico, come in fig. 2

Non è sempre detto che, una volta effettuata la connessione serie
o la connessione parallelo i due m -bipoli originali N ed N'
conservino la caratteristica di m -bipoli, come le proprietà che per ogni

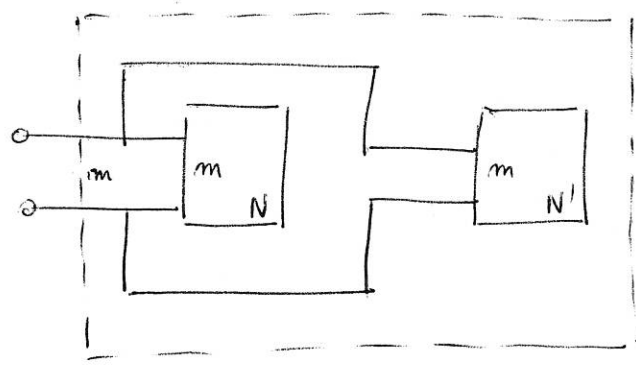
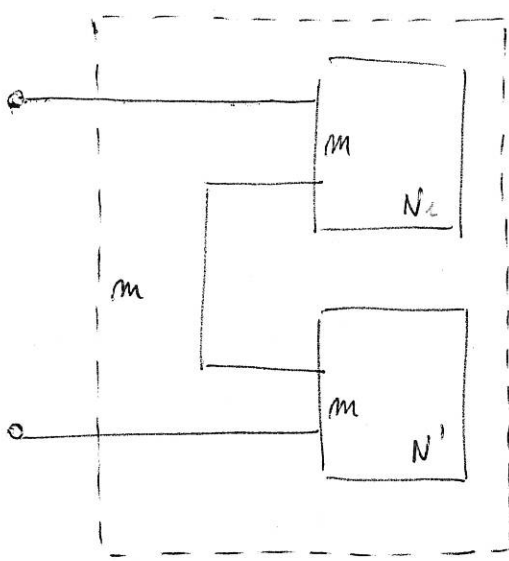


fig 2

coppie di terminali di porte la corrente che "entra" attraverso un morsetto è uguale a quella che "esce" attraverso l'altro morsetto. Basterà - per convincersene - considerare l'esempio di fig 3 : è chiaro

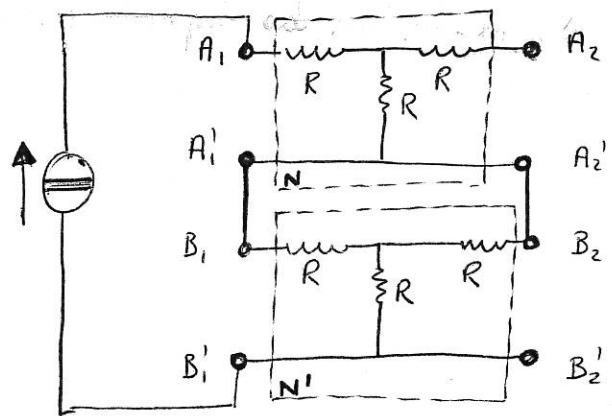


fig 3

che, quando $A_2 B'_2$ è lasciata aperta, il doppio bipolo N non funziona più come tale, poiché le correnti iniettate in A_1 si equipartiscono fra A'_1 ed A'_2 .

Perché anche dopo la connessione N ed N' conservino le proprietà di m -bipoli, si possono alimentare le porte mediante trasformatori ideali con rapporto di trasformazione unitario (cf. fig 4). Noi d'ora in poi supporremo sempre, quando con =

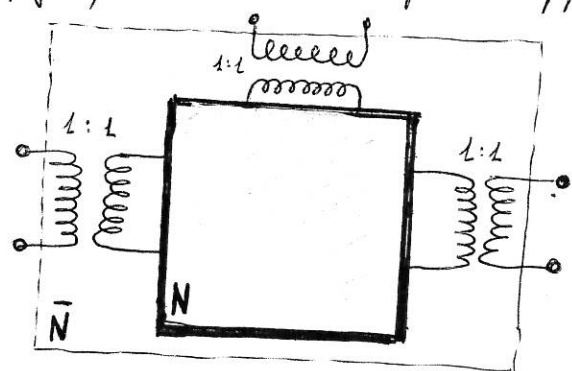


fig. 4

metteremo m-lipoli, che ne conservate dopo la connessione, eventualmente con l'uso di trasformatori, la condizione sulle correnti di porte.

In queste ipotesi, se N ed N' possiedono matrici impedenza $Z(s)$ e $Z'(s)$ rispettivamente, l'm-lipolo serie ha matrice impedenza

$$Z_s(s) = Z(s) + Z'(s) \quad (3.1)$$

Se N ed N' possiedono matrici ammettente $Y(s)$ ed $Y'(s)$ rispettivamente, l'm-lipolo parallelo ha matrice ammettente

$$Y_p(s) = Y(s) + Y'(s) \quad (3.2)$$

Consideriamo infine la connessione di fig 5, dove un R -porta N_c carica "in cascata" le ultime R porte di un $(h+R)$ -porta N_e , dando luogo ad un h -porta N

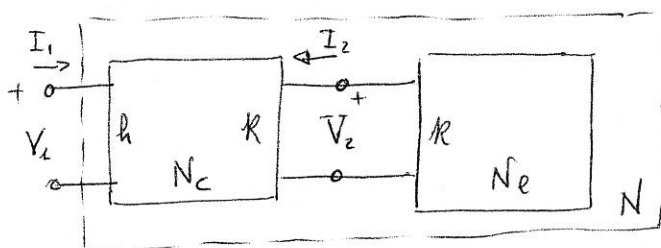


fig. 5

Se N_c ed N_e sono dotati di matrice impedenza Z_c e Z_e rispettivamente (e se la connessione non altera le proprietà delle porte di N_c e di N_e), allora è possibile ricavare una matrice impedenza per l' h -lipolo N (sotto un'ipotesi che specificheremo). Si partizioni Z_c conformemente ai numeri h e R

$$Z_c = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}} \right\} h \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}} \right\} R \end{matrix}$$

e si osservi che valgono le equazioni

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \\ V_2 &= -Z_e I_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Se esiste l'inversa della matrice $(Z_{22}(s) + Z_e(s))$, allora si ha da (3.3)

$$V_2 = Z_{11} - Z_{12} (Z_{22} + Z_e)^{-1} Z_{21} \quad (3.4)$$

e quindi N è dotata di matrice impedenza

(9)

$$Z = Z_{11} - Z_{12} (Z_{22} + Z_e)^{-1} Z_{21} \quad (3.5)$$

Analogamente, se N_c ed N_e sono dotati di matrice ammettente Y_c ed Y_e e se, una volta partizionata Y_c conformemente ad h e R , esiste $(Y_{22}(?) + Y_e(?))^{-1}$, allora

$$Y = Y_{11} - Y_{12} (Y_{22} + Y_e)^{-1} Y_{21} \quad (3.6)$$

è la matrice ammettente di N .

Esercizio 1. Si estendano le nozioni e i risultati fin qui esposti alle matrici ibride.

Concludiamo questo paragrafo con lo studio di una particolare connessione in cascata, impiegata frequentemente nelle sintesi; quella in cui N_c è un trasformatore ideale con matrice di rapporti spire T .

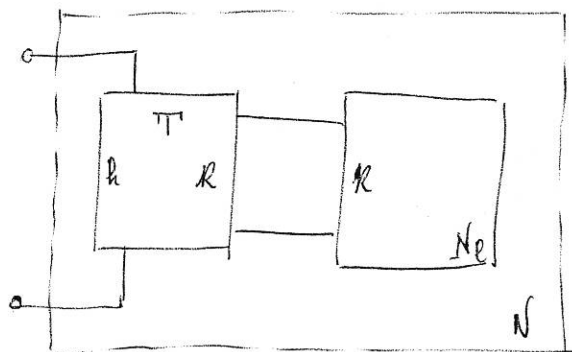


fig. 6

Se le porte comandate in tensione sono caricate da N_e e se N_e è dotata di matrice impedenza Z_e , è immediato verificare che N è dotato di matrice impedenza (fig. 6)

$$Z = T^T Z_e T \quad (3.7)$$

Se invece (fig. 7) le porte comandate in corrente sono caricate da N_e e se N_e è dotata di matrice ammettente Y_e , si verifica che N ha matrice ammettente

$$Y = T Y_e T^T \quad (3.8)$$

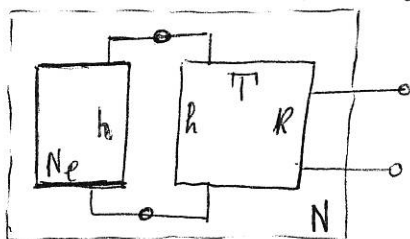


fig. 7