

X. SINTESI SENZA PERDITE DELL'IMMETTENZA.

1. Introduzione.

Questo capitolo è dedicato allo studio di alcune tecniche di sintesi di matrici positive reali senza perdite come matrici immettense (i.e. impedenze, ammettense o ibride) di m -bipoli lineari che non includano resistori.

Noi ci limiteremo a considerare, fra le molte tecniche possibili, due estensioni agli m -bipoli delle procedure classiche di sintesi del bipolo reattivo dovute a Foster ed a Cauer, ed una procedura che utilizzi il lemma positivo reale e quindi concetti sistemistici ormai noti. Quest'ultima procedura di sintesi sarà poi adattata alla sintesi reciproca (i.e. senza giratori) di matrici immettense reciproche.

2. Sintesi di Cauer del bipolo reattivo.

Supponiamo assegnata una funzione L.P.R. $W(s)$; e ci proponiamo di sintetizzare un bipolo reattivo che abbia $W(s)$ come immettense (i.e. come impedenza o come ammettense). Come vedremo, questo problema ha sempre soluzione, ed anzi la sintesi può essere in ogni caso portata a compimento impiegando soltanto induttanze e capacità.

Esamineremo qui due procedure, dovute a Cauer: la prima consiste in operazioni alternative di rimozione del polo all'infinito nella funzione e di passaggio alla funzione inversa, la seconda consiste in operazioni alternative di rimozione del polo nello zero della funzione e di passaggio alla funzione inversa.

A) PRIMA SINTESI DI CAUER

Da VI.6 conosciamo le proprietà dello sviluppo in frazioni parziali di una matrice L.P.R.: particolarizzandolo al caso scalare è un facile esercizio provare che, riunendo in un unico termine gli addendi $(K_i/s + j\omega_i) + (K_i/s - j\omega_i)$, si ha

$$W(s) = D_1 s + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^v \frac{sH_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (2.1)$$

con $D_1, K_0, H_i, i=1, 2, \dots, v$, numeri reali non negativi.

Se $\bar{D}_1 \neq 0$, la funzione razionale

$$W(s) - D_1 s$$

(2.2)

verifica le seguenti proprietà

i) $\bar{L.P.R.}$

ii) $\delta[W(s)] = \delta[W(s) - D_1 s] + 1$

iii) ha uno zero all'infinito.

Se $\bar{D}_1 = 0$, allora $W(s)$ ha uno zero all'infinito, e la funzione razionale

$$W^{-1}(s)$$

(2.3)

verifica le seguenti proprietà

i) $\bar{L.P.R.}$

ii) $\delta[W] = \delta[W^{-1}]$

iii) ha un polo all'infinito

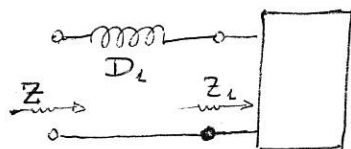
Poiché il termine $D_1 s$ è interpretabile in termini di impedenza come un'induttanza di D_1 henry ed in termini di ammettente come una capacità di D_1 farad, le proprietà susposte indicano una procedura iterativa che porta alle niten di $W(s)$ (tanto come impedenza che come ammettente) in un numero finito di passi.

A seconda che $W(s)$ sia da sintetizzare come impedenza o come ammettente ed a seconda che sia $W(\infty) = \infty$ oppure $W(\infty) = 0$, basta eseguire le seguenti istruzioni:

1. $Z(s)$ L.P.R., $Z(\infty) = \infty$.

- scomporre $Z(s)$ nella forma $Z(s) = Z_1(s) + sD_1$, $Z_1(\infty) = 0$, $\delta[Z_1] < \delta[Z]$

- sintetizzare sD_1 con un'induttanza, da porre in serie con un bipolo che sintetizzi l'impedenza $Z_1(s)$:



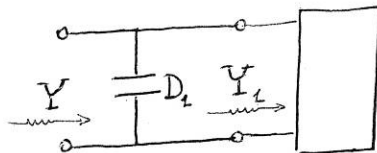
2. $Z(s)$ L.P.R., $Z(\infty) = 0$

- ricavare la funzione $Y(s) = Z^{-1}(s)$, con $Y(\infty) = \infty$, $\delta[Y] = \delta[Z]$

- considerare $Y(s)$ come ammettente di bipolo

3. $Y(s)$ L.P.R., $Y(\infty) = \infty$ (12)

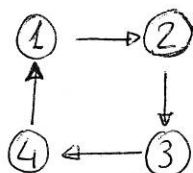
- scomporre $Y(s)$ nella forma $Y(s) = Y_1(s) + sD_1$, $Y_1(\infty) = 0$, $\delta[Y_1] < \delta[Y]$
- sintetizzare sD_1 con una capacità, da porre in parallelo con un bipolo che sintetizzi l'ammettenza $Y_1(s)$:



4. $Y(s)$ L.P.R., $Y(\infty) = 0$

- ricavare la funzione $Z(s) = Y^{-1}(s)$, con $Z(\infty) = \infty$, $\delta[Z] = \delta[Y]$
- considerare $Z(s)$ come impedenza di bipolo

È evidente che le istruzioni si eseguono ciclicamente come indicato:



e, poiché l'esecuzione di ② e ④ non altera il grado di Mc Millan e non introduce componenti nella rete, mentre l'esecuzione di ③ o di ① abbassa di una unità il grado di Mc Millan ed introduce un componente nella rete, il procedimento ha termine, e la sintesi di $W(s)$ (come impedenza o come ammettenza) che ne deriva è un bipolo LC contenente $\delta[W]$ componenti.

Si noti che la prima sintesi di Cauer corrisponde, nelle operazioni algebriche che involve, a sviluppare $W(s)$ in frazione continua di Stieltjes nell'intorno del punto all'infinito:

$$W(s) = a_1 s + \frac{1}{a_2 s + \frac{1}{a_3 s + \frac{1}{\ddots}}}$$

Quando è $W(s) = Z(s)$ si ha allora

$$Z(s) = L_1 s + \frac{1}{C_2 s + \frac{1}{L_3 s + \frac{1}{\ddots}}}$$

e quando è $W(s) = Y(s)$ si ha

$$Y(s) = C_1 s + \frac{1}{L_2 s + \frac{1}{C_3 s + \frac{1}{\ddots}}}$$

Esempio 1. Sintetizzare come impedenza la seguente funzione L.P.R: (13)

$$Z(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + 3}$$

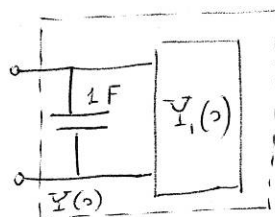
È $Z(\infty) = 0$. Si considera allora la corrispondente ammettanza $Y(s) = Z^{-1}(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^3 + 2s}$$

Si ha

$$Y(s) = s + \frac{2s^2 + 3}{s^3 + 2s} = s + Y_1(s)$$

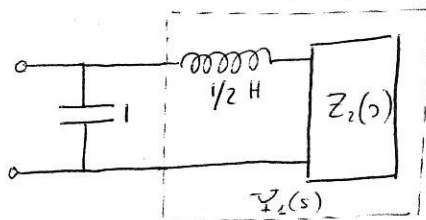
Rimosso il termine s come ammettanza di un condensatore, resta da sintetizzare Y_1



È $Y_1(\infty) = 0$. Si considera allora la impedenza $Z_1(s) = Y_1^{-1}(s)$

$$Z_1(s) = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 3} = \frac{1}{2}s + \frac{s}{4s^2 + 6} = \frac{1}{2}s + Z_2(s)$$

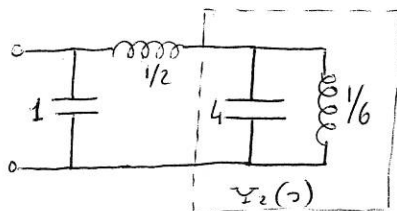
Si rimuove il termine $\frac{1}{2}s$ come impedenza di un induttore, e rimane da sintetizzare $Z_2(s)$



È $Z_2(\infty) = 0$. Si considera $Y_2(s) = Z_2^{-1}(s)$

$$Y_2(s) = \frac{4s^2 + 6}{s} = 4s + \frac{6}{s} = 4s + Y_3(s)$$

e la sintesi su $4s$ (come ammettanza di un condensatore che dà $6/s$ come ammettanza di un induttore è ormai ovvia:



Esercizio 1. Si sintetizzi la medesima funzione $(s^3 + 2s)/(s^4 + 4s^2 + 3)$ come ammettanza di bipolo reattivo.

Esercizio 2. Si sintetizzi la funzione impedenza L.P.R.

(14)

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^2 + 9}{s^3 + 4s}$$

B) SECONDA SINTESI DI CAUER.

Per affrontare la seconda sintesi di Cauer, osserviamo che in (2.1) se $K_0 \neq 0$, la funzione razionale

$$W(s) = \frac{K_0}{s}$$

verifica le seguenti proprietà:

- i) è L.P.R.
- ii) $\delta[W(s)] = \delta[W(s) - \frac{K_0}{s}] + 1$
- iii) ha uno zero nell'origine

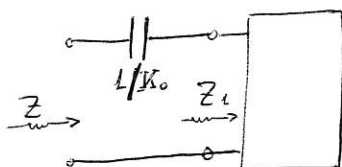
Se è invece $K_0 = 0$, allora $W(s)$ ha uno zero nell'origine e $W^{-1}(s)$ soddisfa le proprietà seguenti:

- i) è L.P.R.
- ii) $\delta[W] = \delta[W^{-1}]$
- iii) ha un polo nell'origine

Il termine $\frac{K_0}{s}$ è interpretabile come impedenza corrispondente ad un condensatore di K_0^{-1} farad o come ammettanza di un induttore di K_0^{-1} henry. A seconda che $W(s)$ si voglia sintetizzare come impedenza o come ammettanza ed a seconda che sia $W(0) = 0$ oppure $W(0) = \infty$, i passi elementari di sintesi sono i seguenti:

1. $Z(s)$ L.P.R., $Z(0) = \infty$

- scomporre $Z(s)$ nella forma $Z(s) = Z_1(s) + \frac{K_0}{s}$, $Z_1(0) = 0$, $\delta[Z_1] < \delta[Z]$
- sintetizzare K_0/s con un condensatore, da porre in serie con un bipolo che sintetizzi l'impedenza $Z_1(s)$:



2. $Z(s)$ L.P.R., $Z(0) = 0$

- ricavare la funzione $Y(s) = Z^{-1}(s)$, con $Y(0) = \infty$, $\delta[Y] = \delta[Z]$
- considerare $Y(s)$ come ammettanza di bipolo

3. $Y(s)$ L.P.R., $Y(0) = \infty$

- scomporre $Y(s)$ nella forma $Y(s) = Y_1(s) + \frac{K_0}{s}$, $Y_1(0) = 0$, $\delta[Y_1] < \delta[Y]$

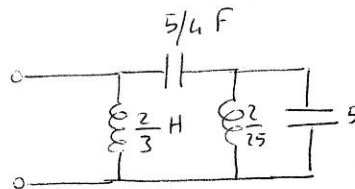
- sintetizzare K_0/s con un'induttanza, da porre in parallelo con un bipolo che sintetizzi l'ammettanza $Y_1(s)$. (15)

4. $Y(s)$ L.P.R., $Y(\infty) = 0$

- ricavare la funzione $Z(s) = Y^{-1}(s)$, con $Z(0) = \infty$, $\delta[Z] = \delta[Y]$
- considerare $Z(s)$ come impedenza di bipolo.

Quanto detto per le prime sintesi di Cauer vale ora anche per le seconde: in particolare le sintesi ^{ancora} individuate un bipolo LC contenente $\delta[W]$ componenti.

Esercizio 3. Si provi, usando la seconda sintesi di Cauer, che l'impedenza $Z(s) = (s^3 + 2s)/(s^4 + 4s^2 + 3)$ è sintetizzabile da un bipolo reattivo



3. Sintesi generalizzata di Cauer per gli m -bipoli reattivi

(16)

Vogliamo ora provare come una estensione del procedimento esposto nel paragrafo precedente consente di sintetizzare una matrice $\overset{m \times m}{W(s)}$ L.P.R. come impedenza (o ammettanza) di un m -bipolo reattivo. Le sintesi non potrà però prescindere dall'uso di trasformatori e, sotto certe ipotesi, dall'uso di giratori.

Ricordiamo che dallo sviluppo in frazioni parziali di $W(s)$ si ottiene

$$W(s) = D_1 s + D_0 + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^j \frac{s H_i + \omega_i E_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (3.1)$$

con $D_1 = D_1^T$, $K_0 = K_0^T$, $H_i = H_i^T$ matrici reali simmetriche definite positive e $D_0 = -D_0^T$, $E_i = -E_i^T$ matrici antisimmetriche reali.

1) Se $D_1 \neq 0$, allora

$$W(s) - s D_1 \quad (3.2)$$

soddisfa le seguenti proprietà (esercizio)

i) $\bar{\in}$ L.P.R.

ii) $\delta[W(s)] = \delta[W(s) - s D_1] + \text{rank } D_1$

iii) non ha poli all'infinito

2) Se $D_1 = 0$, e $D_0 \neq 0$ allora

(3.3)

$$W(s) - D_0$$

soddisfa le seguenti proprietà (esercizio)

i) $\bar{\in}$ L.P.R.

ii) $\delta[W(s)] = \delta[W(s) - D_0]$

iii) $W(s) - D_0$ $\bar{\in}$ nulla all'infinito

3) Se $W(s)$ nulla all'infinito (i.e. $D_1 = D_0 = 0$) e se $\text{rank } W(s) \equiv m' < m$, allora esiste una matrice T costante e non singolare per cui risulta

$$W(s) = T^T \overset{m'}{\left[\begin{array}{c|c} W'(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]} T \quad (3.4)$$

e $W'(s) \in \mathbb{R}(s)^{m' \times m'}$ soddisfa le seguenti proprietà

i) $\bar{\in}$ L.P.R.

ii) $\delta[W(s)] = \delta[W'(s)]$

iii) $W'(s)$ ha rango m'

$$iv) W'(\infty) = 0$$

(17)

Per dimostrare questa proprietà, basterà far vedere che

Teor. 1. Se $W(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$ è P.R. e se è $\text{rank } W(s) = m' < m$, esiste una matrice invertibile $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ per cui risulta

$$W(s) = T^T \left[\begin{array}{c|c} \bar{W}_{11}(s) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] T$$

con $\bar{W}_{11}(s) \in \mathbb{R}(s)^{m' \times m'}$ P.R. di rango m'

⊗

La prova è una conseguenza immediata del lemma 1 di VI. 4. L'unica cosa da menzionare è che la matrice T può essere scelta reale (nel lemma era complessa). Basterà considerare $W(s)$ in un punto s_0 reale e positivo (esercizio!).

0/0

Lasciamo come esercizio provare che se $W(s)$ è L.P.R., $W'(s) = \frac{d}{ds} W(s)$ è L.P.R., e che se $W(\infty) = 0$, allora $\bar{W}_{11}(\infty) = 0$. (18)

4) Se infine $W(s)$ nulla all'infinito e di rango completo (come matrice su $\mathbb{R}(s)$), allora

$$W^{-1}(s) \quad (3.10)$$

esiste su $\mathbb{R}(s)$ e soddisfa le seguenti proprietà:

- i) è L.P.R.
- ii) $\delta[W(s)] = \delta[W^{-1}(s)]$
- iii) $W^{-1}(s)$ ha un polo all'infinito.

Esercizio 1. Si verifichi che $W^{-1}(s)$, nelle ipotesi di (3.10), è non solo P.R., ma anche senza perdite.

Verifichiamo ora come le formule (3.2) (3.3) e (3.4) teste ottenute si prestano alla applicazione di alcune procedure elementari di sintesi.

A) il termine $D_1 s$ in (3.2) può essere interpretato come impedenza o come ammettanza di un m -bipolo costituito da un trasformatore multiporle e da $v = \text{rank } D_1$ induttanze o capacità.

Basterà ricordare che se D_1 ha rango v , esiste (cf. cap III, par. 3) una matrice $T \in \mathbb{R}^{v \times m}$ per cui vale la factorizzazione

$$D_1 = T^T T$$

e che quindi risulta

$$D_1 s = T^T (s \mathbb{I}_v) T \quad (3.11)$$

Si è visto nel cap. IX che (3.11) è l'impedenza dell' m -bipolo di fig. 1:

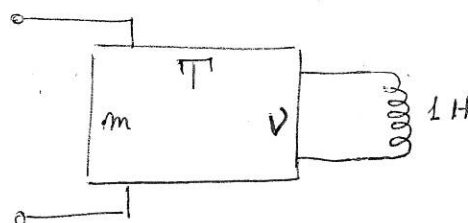


fig. 1

oppure l'ammettanza dell' m -bipolo di fig. 2:

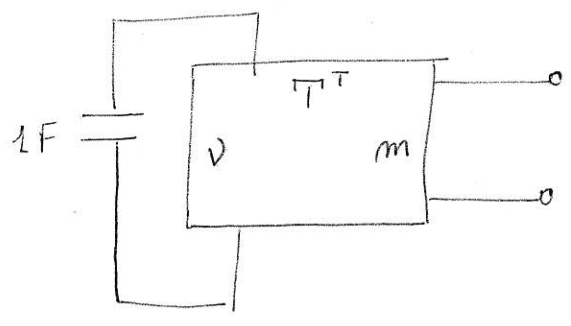


fig 2

B) La matrice D_0 di (3.3) è antisimmetrica, e può essere interpretata come impedenza o come ammettenza di un m. lipolo costituito da un trasformatore multiporte e da g giratori, se $2g$ è il rango (necessariamente pari) di D_0 . Per provarlo, useremo il seguente

Teor. 2 Sia $H \in \mathbb{F}^{m \times m}$ una matrice antisimmetrica

Allora esiste una sequenza di matrici elementari di $\mathbb{F}^{m \times m}$

$$E_1, E_2, \dots, E_t$$

per cui risulta

$$E_t E_{t-1} \dots E_1 H E_1^T E_2^T \dots E_t^T = \text{diag} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{g \text{ blocchi}} \right\}_{m \times m} \quad (3.12)$$

prova Il teorema è vero per $m = 1$. Procediamo allora per induzione sulla dimensione di H , e supponiamo di aver provato l'asserto quando la dimensione della matrice M è minore o uguale ad $m-1$.

Se H ha dimensione m ,

$$H = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1m} \\ \hline h_{21} & & & & \\ h_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ h_{m1} & & & & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccc} 0 & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1m} \\ \hline h_{21} & & & & \\ h_{31} & & & & \\ \vdots & & & & \\ h_{m1} & & & & \end{array}} \right\} m-1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m-1}$

e se risulta $[h_{12} h_{13} \dots h_{1m}] = -[h_{21} h_{31} \dots h_{m1}] = 0$, allora basta applicare l'ipotesi induttiva alla matrice antisimmetrica H_{22} , operando con matrici elementari del tipo

Aggiungendo ora alla i -esima riga la prima moltiplicata per $\bar{h}_{2i} = -\bar{h}_{i2}$ ed alla i -esima colonna la prima colonna moltiplicata per $\bar{h}_{2i} = -\bar{h}_{i2}$ la matrice $\bar{H}'$

$$\bar{H}' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & \bar{h}_{2i} & & \ddots \end{bmatrix} \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(i) (i)

è antisimmetrica, e può differire da $\bar{H}$ nelle prime due righe e colonne soltanto perché $\bar{h}'_{2i} = \bar{h}'_{i2} = 0$. Resterate applicazioni di quest'ultime procedure riducono infine $\bar{H}$ nella forma $\bar{H}''$

$$\bar{H}'' = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & \underbrace{\bar{H}''_{22}}_{m-2} \end{array} \right]_{m-2}$$

e si può applicare l'ipotesi induttiva alla matrice $\bar{H}''_{22}$. ⊠

Esercizio 1. Sia $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$ matrice antisimmetrica.

- i) il rango di H è pari (è uguale al doppio del il numero dei blocchi di (3.12))
- ii) $H \in L.P.R$
- iii) gli autovalori di H sono immaginari [sugg: si provi che, per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$, $v^T H v$ è immaginario].

Il teorema 2 consente di esprimere D_0 nella forma

$$D_0 = T^T \underbrace{\text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}}_{g \text{ blocchi}} T$$

$m \times m$

con T matrice in $\mathbb{R}^{m \times m}$ prodotto di matrici elementari. Indicando con $\bar{T}$ la matrice di $\mathbb{R}^{2g \times m}$ ottenuta sopprimendo le ultime $m-2g$ righe di T , si ha anche (la verifica è immediata):

$$D_0 = \overline{T}^T \text{diag} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{g \text{ blocchi}} \right\}_{2g \times 2g} \overline{T} \quad (3.13) \quad (22)$$

g bipoli di figg 3 e 4

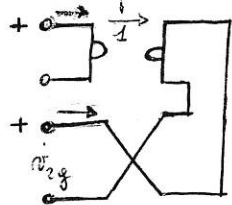
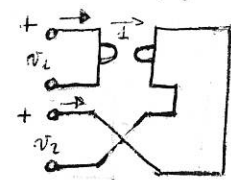


fig 3

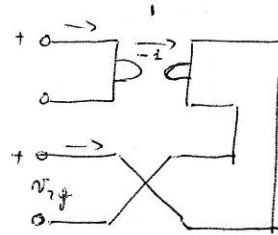
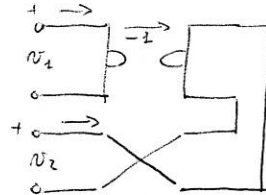


fig 4

hanno rispettivamente matrice impedenze $Z = \text{diag} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{g \text{ blocchi}} \right\}_{2g \times 2g}$
e matrice ammettenza $Y = \text{diag} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{g \text{ blocchi}} \right\}_{2g \times 2g}$.

Quindi, per quanto visto nel cap. IX, (3.13) è l'impedenza dell'm-bipolo di fig 5

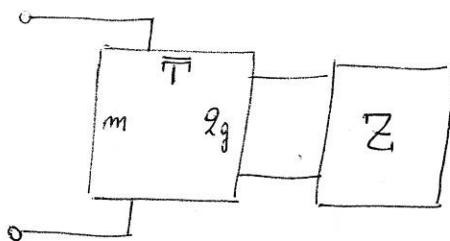


fig. 5

oppure l'ammettenza dell'm-bipolo di fig. 6

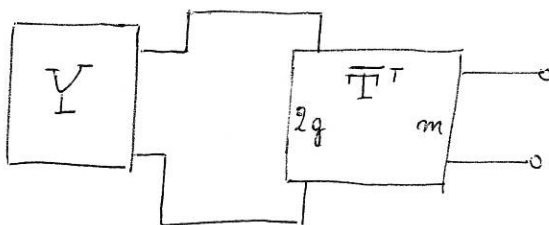


fig. 6

- a) Supposto di disporre di un m'-bipolo di impedenze (ammettenze) $W'(s)$, l'impedenza (ammettenza) di (3.4) è ottenibile mediante

un trasformatore multiporale.

(23)

Indicando con $\overline{T}$ la matrice $\text{Sl } \mathbb{R}^{m' \times m}$ costruita dalle prime m' righe di T , si ha

$$W(s) = T^{-1} \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{W'(s)}^{m'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] T = \overline{T}^{-1} W'(s) \overline{T} \quad (3.14)$$

e la sintesi nel caso dell'impedenza è schematizzata in fig 7:

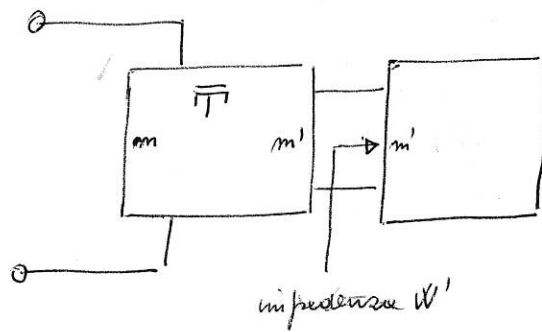


fig 7

nel caso dell'ammettanza in fig 8:

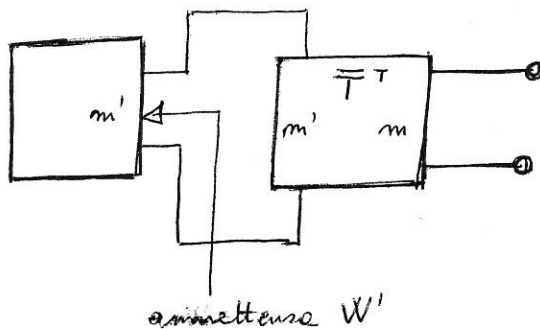


fig 8.

Quanto detto finora è sufficiente per procedere ad una sintesi completa di $W(s)$. A seconda che $W(s)$ si voglia sintetizzare come impedenza o come ammettanza, ed a seconda di quale fra le ipotesi 1), 2), 3), 4) elencate all'inizio del paragrafo sia verificata, si eseguiranno le seguenti istruzioni

1. $Z(s)$ L.P.R., $Z(\infty) = \infty$

- scomporre $Z(s)$ nelle forme $Z(s) = Z_1(s) + sD_1$, $\delta[z_1] < \delta[z]$

- sintetizzare sD_1 come indicato al punto A), e porlo in serie con un m -bi polo che sintetizza $Z_1(s)$.

2. $Z(s)$ L.P.R. $Z(\infty) = D_0 \neq 0$

- sintetizzare D_0 come indicato al punto B) e porlo in serie con un m -bi polo che sintetizza $Z(s) - D_0$.

3. $Z(s)$ L.P.R., $Z(\infty) = 0$, $\text{rank } Z(s) = m' < m$
- scrivere $Z(s)$ nella forma (3.14):

$$Z(s) = \overline{T}^T Z'(s) \overline{T}$$

con $Z'(s)$ di rango pieno

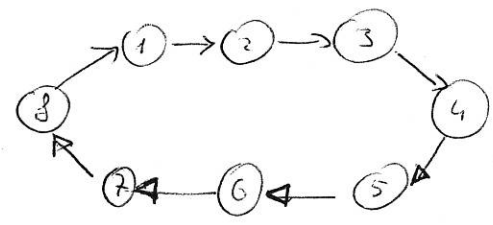
- considerare $Z(s)$ come impedenza di un trasformatore multiplo, che si riduce sulle impedenze $Z'(s)$ (da sintetizzare)

4. $Z(s)$ L.P.R., $Z(\infty) = 0$, $\text{rank } Z(s)$ pieno

- ricavare la matrice $Y(s) = Z^{-1}(s)$, con $Y(\infty) = \infty$, $\delta[Y] = \delta[Z]$.
- considerare $Y(s)$ come ammettenze di m bipoli.

I punti 5. 6. 7. 8 si ottengono nell'ordine da 1. 2. 3. 4 sostituendo alle impedenze le ammettenze.

Le istruzioni 1 ÷ 8 si eseguono ciclicamente come indicato



Poiché l'esecuzione di 2. 3. 4. 6. 7. 8 non altera il grado di Mc Millan, mentre l'esecuzione di 1 e di 5 lo abbassa di almeno una unità, il procedimento di sintesi "converge", come ha termine in un numero finito di passi. Inoltre è immediato constatare che il numero complessivo di induttanze e capacità introdotte eguaglia il grado di McMillan della matrice da sintetizzare.

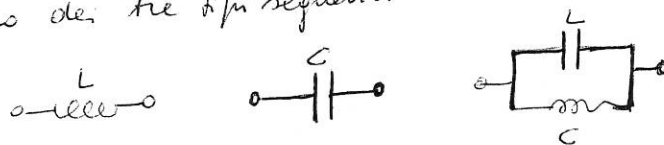
Se $W(s)$ è matrice simmetrica, tale è $W(s) - sD_1$; inoltre $D_0 = 0$ e $W'(s)$ ottenuta in (3.14) è ancora simmetrica. Infine, se $W(s)$ è simmetrica, lo è anche la sua inversa. Da queste considerazioni si ha che la sintesi di Cauer di $W(s)$ come impedenza o come ammettenza non richiede guai quando $W(s)$ è simmetrica.

4. Sintesi di Foster del bipolo reattivo.

La sintesi di Foster del bipolo reattivo si fonda sulla decomposizione delle funzione L.P.R. $W(s)$ nella somma di termini semplici per i quali sia immediata la sintesi (in termini di ammettenze o di impedenze). I bipoli che sintetizzano tali termini "semplici" saranno poi disposti in serie o in parallelo, a seconda del tipo di sintesi effettuato.

A) PRIMA SINTESI DI FOSTER

Si applica quando $W(s)$ si vuole sintetizzare come serie di reti elementari di uno dei tre tipi seguenti



Se $W(s)$ è data come impedenza, la procedura che descriveremo si applica direttamente; se è data come ammettenza, la procedura sarà applicata alla funzione inversa $W^{-1}(s)$, che è una impedenza.

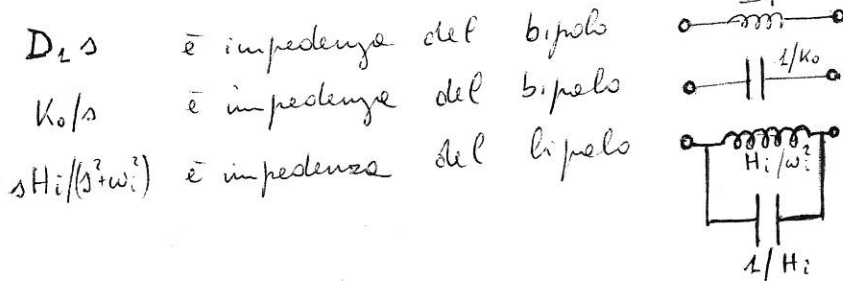
In entrambi i casi, quindi, possiamo assumere come dato iniziale una funzione impedenza L.P.R. $Z(s)$.

Analogamente a quanto fatto in (2.1), decomponiamo $Z(s)$ secondo la:

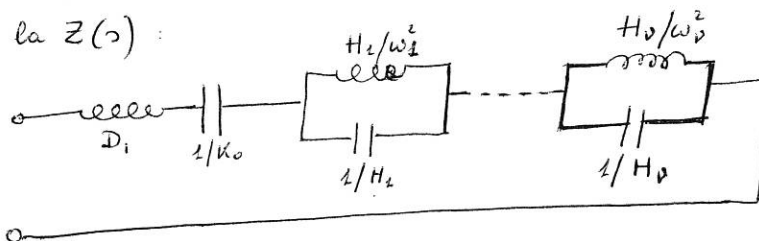
$$Z(s) = D_1 s + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{s H_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (4.1)$$

con D_1, K_0, H_i numeri reali non negativi.

Ciascun addendo di (4.1) può essere interpretato come impedenza di un bipolo LC:

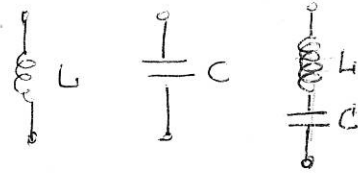


e la serie di tali impedenze ha, come impedenza di ingresso proprio la $Z(s)$:



B) SECONDA SINTESI DI FOSTER

Si applica quando $W(s)$ si vuole sintetizzare come parallelo di reti elementari dei tre tipi seguenti



Se $W(s)$ è vista come ammettenza, la procedura è applicabile direttamente; se è data come impedenza, si dovrà considerare la funzione inversa $W^{-1}(s)$, che è un' ammettenza.

In entrambi i casi, la sintesi ha quindi come punto di partenza l'assegnazione di una funzione ammettenza $\bar{Y}(s)$ L.P.R.

Decomponiamo $\bar{Y}(s)$ secondo la

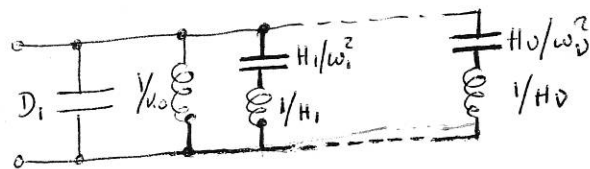
$$\bar{Y}(s) = D_1 s + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{s H_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (4.2)$$

con D_1, K_0, H_i numeri reali non negativi.

Ogni addendo in (4.2) può interpretarsi come ammettenza di un bipolo LC:

$D_1 s$ è ammettenza del bipolo	
K_0/s è ammettenza del bipolo	
$s H_i / (s^2 + \omega_i^2)$ è ammettenza del bipolo	

così che il parallelo di tali ammettenze ha come ammettenza di ingresso la $\bar{Y}(s)$:



Si vede immediatamente che sia la prima che la seconda sintesi di Foster utilizzano $\mathcal{J}[W]$ componenti reattivi.

Esempio 1. Si vuole sintetizzare la funzione impedenza L.P.R.

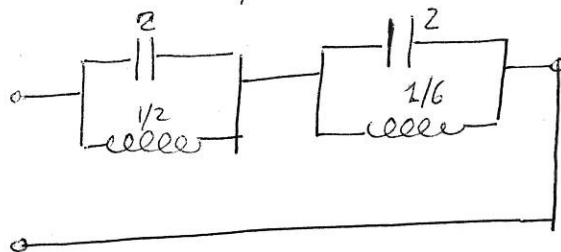
$$Z(s) = \frac{s^3 + 2s}{s^4 + 4s^2 + 3}$$

con la prima sintesi di Foster.

Dallo sviluppo in frazioni parziali si ha

$$Z(s) = \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+3}$$

e quindi si ha il bipolo



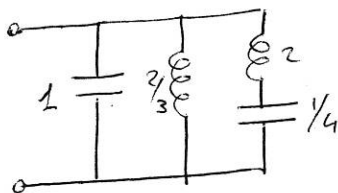
Per la seconda sintesi di Foster, si considera l'admittanza

$$Y(s) = Z^{-1}(s) = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^3 + 2s}$$

e dallo sviluppo in frazioni parziali

$$Y(s) = s + \frac{3/2}{s} + \frac{(1/2)s}{s^2+2}$$

si risale alle sintesi:



Problema 1 (TEOREMA DI FOSTER) I poli e gli zeri di una funzione L.P.R. $W(s)$ si alternano sull'asse immaginario [Sugg. Si scriva $W(j\omega)$ come $jX(\omega)$ e si verifichi che per $\omega > 0$ $\frac{dX}{d\omega} > 0$ utilizzando la formula (2.1). Quindi $X(\omega)$ è funzione crescente di ω per $\omega > 0$, e due suoi zeri deve essere sempre compreso almeno un polo. Si estende il risultato a tutto l'asse immaginario]

Problema 2 Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $W(s)$ sia L.P.R. è che:

- poli e zeri siano immaginari, semplici, e verificanti l'alternanza del teorema di Foster
- il rapporto dei coefficienti dei monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore di $W(s)$ sia positivo.

5. Sintesi generalizzata di Foster per gli m -bipoli reattivi.

(2)

Come è noto, dallo sviluppo in frazioni parziali di una matrice L.P.R. $W(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$ si ottiene

$$W(s) = D_1 s + D_0 + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^v \frac{s H_i + \omega_i E_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (5.1)$$

con $D_1 = D_1^T$, $K_0 = K_0^T$, $H_i = H_i^T$ matrici reali semidefinite positive

e con $D_0 = -D_0^T$, $E_i = -E_i^T$ matrici antisimmetriche reali.

Inoltre, se $W(s)$ è matrice simmetrica, tale rimane $W(s) - D_1 s$ e passando al limite per $s \rightarrow \infty$ si ricave $D_0 = 0$, E_i allora simmetriche

$$\sum_{i=1}^v \frac{s H_i + \omega_i E_i}{s^2 + \omega_i^2}$$

e restano ancora simmetriche

$$\left(\sum_{i=1}^v \frac{s H_i + \omega_i E_i}{s^2 + \omega_i^2} \right) (s^2 + \omega_k^2) \quad k = 1, 2, \dots, v$$

Passando al limite per $s \rightarrow j\omega_k$, si ricave $E_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, v$

La sintesi dei termini $D_1 s$ e D_0 di (5.1), come ammettanza o come impedenze di m -bipoli, è già stata risolta nel paragrafo 3.

Anche la sintesi di $\frac{K_0}{s}$ è immediata: infatti K_0 può essere fatto =

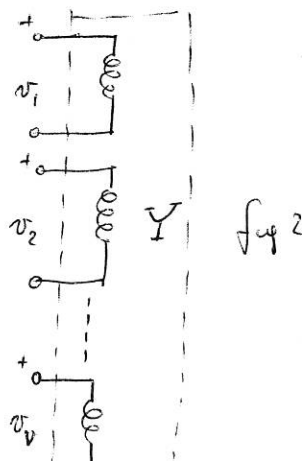
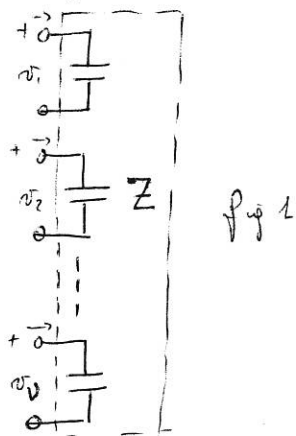
realizzato nella forma

$$K_0 = T^T T$$

con $T \in \mathbb{R}^{v \times m}$ se $\text{rank } K_0 = v$, con

$$\frac{K_0}{s} = T^T (s^{-1} \mathbb{1}_v) T$$

Poiché $s^{-1} \mathbb{1}_v$ è l'impedenza del v -bipolo di fig 1 o l'ammettanza del v -bipolo di fig 2



con le solite procedure si hanno gli m-bipoli di figg 3-4

(79)

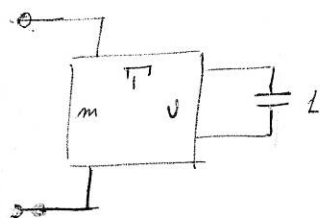


fig 3

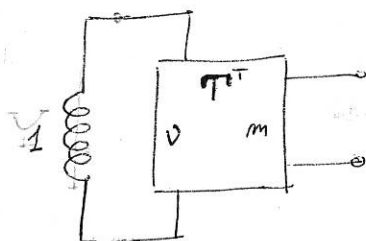


fig 4

La sintesi di una matrice del tipo

$$\frac{sH + E\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

è molto facile se $E=0$. In tal caso infatti si ha, fattorizzando la matrice simmetrica semidefinita positiva H nella forma

$$H = T^T T, \quad T \in \mathbb{R}^{v \times m} \quad (\text{rank } H = v)$$

la seguente equivalenza

$$\frac{sH}{s^2 + \omega^2} = T^T \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \mathbb{1}_v \right) T$$

e ricordando che $s/(s^2 + \omega^2)$ è l'impedenza del bipolo

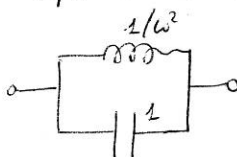


fig 5

oppure l'ammettanza del bipolo

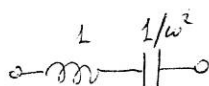


fig 6

$sH/(s^2 + \omega^2)$ si può sintetizzare con un trasformatore multi-porta e con v bipoli reattivi del tipo di fig 5 o di fig 6:

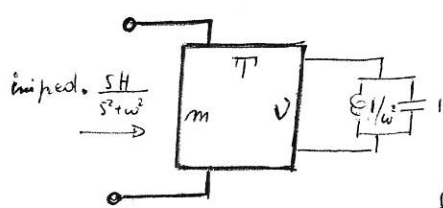
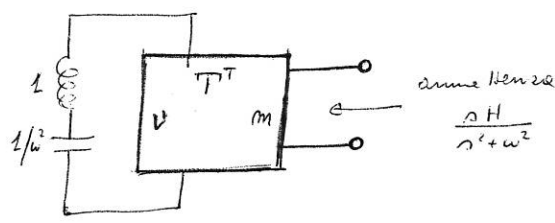


fig 7



Maggiori complicazioni nascono quando si vuole sintetizzare una ⁽³¹⁾ matrice del tipo

$$\frac{sH + E}{s^2 + \omega^2} \quad (5.2)$$

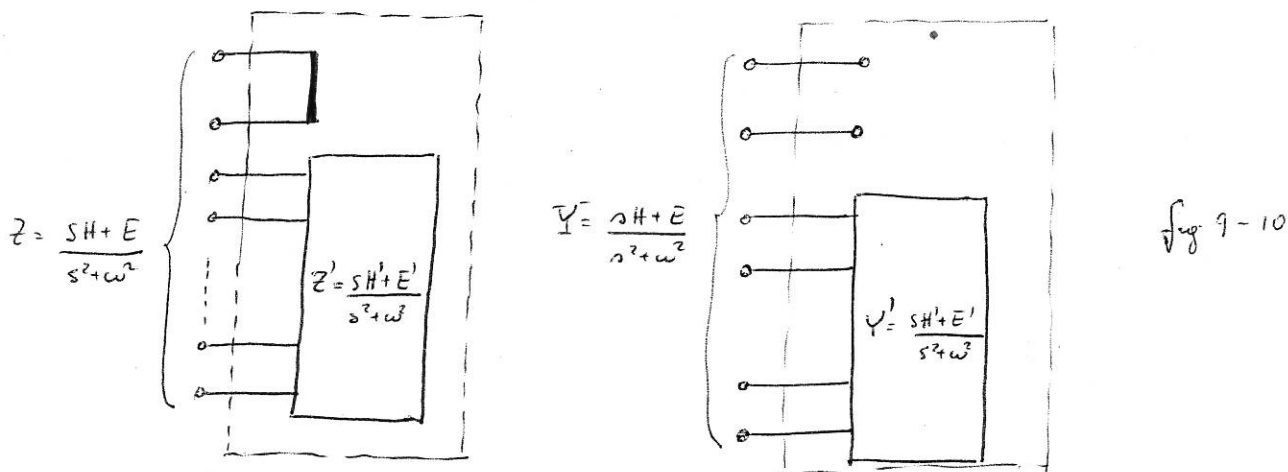
con $E = -E^T$ generica. Indicate E con $\|e_{ij}\|$ ed H con $\|h_{ij}\|$, si presentano tre possibilità:

1) nella matrice H risulta $h_{11} = 0$. Allora tutte le prime righe e la prima colonna di H sono nulle (perché H è semi-definita positiva: esercizio!) e con pure sono nulle le prime righe e la prima colonna di E (esercizio: si usi il fatto che esiste una matrice hermitiana K per cui $H = K + \check{K}$ ed $E = K - \check{K}$).

In questo caso E ed H possono scriversi nelle forme

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{0}_1 \oplus H' & H' &\in \mathbb{R}^{(m-1) \times (n-1)} \\ E &= \mathbf{0}_1 \oplus E' & E' &\in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

e ci si riduce a sintetizzare $(sH' + E')/(s^2 + \omega^2)$, in quanto la prima porta si ottiene con un corto circuito o con un circuito aperto, a seconda che (5.2) debba essere una impedenza o una ammettenza



Supponiamo ora che sia $h_{11} > 0$. Esiste allora una congruenza, ottenibile con omie trasformazioni elementari, per cui

$$\frac{sH + E}{s^2 + \omega^2} = T^T \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 0 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \right) T$$

2) se $E_{12} (= -E_{21}) = 0$, ancora una volta si può ridursi a sintetizzare un $(m-1)$ lipolo: è chiaro infatti che nel caso, p.es., dell'impedenza la matrice

$$T^T \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix} \right) T \quad (5.4)$$

si sintetizza come in fig 11:

(31)

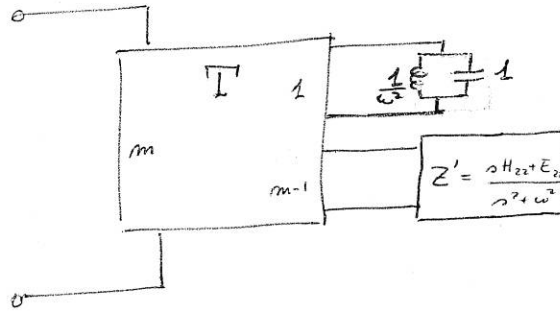


fig 11

(si lascia come esercizio le sintesi dell'ammettenza).

- 3) se $E_{12} \neq 0$, sia ω il più piccolo intero per cui $E_{12} \neq 0$. Con opportune ulteriori trasformazioni elementari (che non alterano le strutture delle prime righe e delle prime colonne di H) si può modificare E fino ad ottenere che la sua prima riga sia $[0 \ \omega \ 0 \ \dots \ 0]$

Si ottiene quindi

$$\frac{sH+E}{s^2+\omega^2} = T^T \left(\frac{s}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{H}_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & & & & \\ 0 & & \bar{E}_{22} & & \end{bmatrix} \right) T \quad (5.5)$$

Se $\bar{h}$ denota il termine di posto (1,1) in $\bar{H}_{22}$, si pone

$$\bar{h} = 1 + \bar{h}'$$

e si scompone $(sH+E)/(s^2+\omega^2)$ nella forma seguente:

$$\frac{sH+E}{s^2+\omega^2} = T^T \left(\frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega & & 0 \\ -\omega & s & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & s\bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} & & \end{bmatrix} \right) T \quad (5.6)$$

dove $\bar{H}'_{22}$ coincide con $\bar{H}_{22}$ eccetto nell'elemento di posto (1,1), che è $\bar{h}'$, anziché $\bar{h}$.

Se indichiamo con T_1 la sottomatrice di T costituita dalle prime due righe di T , abbiamo

$$T^T \left(\frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega & & 0 \\ -\omega & s & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \right) T = T_1^T \frac{1}{s^2+\omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix} T_1 \quad (5.7)$$

la cui sintesi in termini di impedenza è data in fig 12.

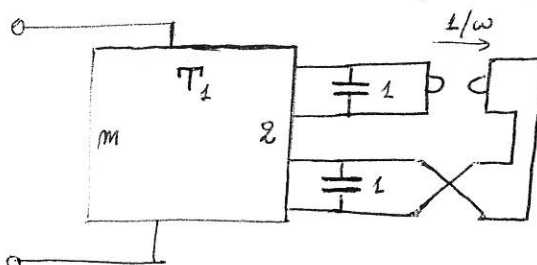


fig 12

Se riusciremo a provare che in (5.6)

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} \end{array} \right] \quad (5.8)$$

è L.P.R., è evidente che il procedimento descritto consente di sintetizzare come impedenza (o come ammettanza) in un numero finito di passi la assegnata matrice $(sH + E)/(s^2 + \omega^2)$. Basterà infatti scambiare $(s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22})/(s^2 + \omega^2)$ come già $(sH + E)/(s^2 + \omega^2)$ e, a seconda che si verifichino le condizioni considerate in (5.3), (5.4), (5.5), si passerà alla sintesi di

$$T^T \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & s H' + E' \end{array} \right] T \quad H', E' \in \mathbb{R}^{(m-2) \times (m-2)}$$

$$T^T \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline N^T & \end{array} \right] \frac{1}{s^2 + \omega^2} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & s H_{22} + E_{22} \end{array} \right]}_{m-1} \left[\begin{array}{c|c} 0 & N \\ \hline 0 & \end{array} \right] T$$

$$T^T \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline N^T & \end{array} \right] \left(\underbrace{\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{H}_{22} \end{array} \right]}_{m-1} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & \omega - 0 \\ \hline -\omega & \bar{E}_{22} \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c|c} 0 & N \\ \hline 0 & \end{array} \right] T$$

etc., cosicché in m passi $(sH + E)/(s^2 + \omega^2)$ sarà completamente sintetizzata. con successive riduzioni del numero delle porte e con connessioni in serie (per l'impedenza) o in parallelo (per l'ammettanza) di multiporte con le strutture di fig 12 (o analoghe per l'ammettanza).

Per verificare che (5.8) è L.P.R., basterà provare che è L.P.R. $(s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22})/(s^2 + \omega^2)$, e per questo sarà sufficiente mostrare che la matrice K dei residui in $s = j\omega$ è semidefinita positiva (le altre condizioni sono banalmente verificate).

Per il teor. di K dovremo considerare i minori principali di $K \in \mathbb{C}^{(m-1) \times (m-1)}$ e verificare che sono tutti non negativi.

Tali minori principali sono anche minori principali della matrice

$$\text{res} \left[\left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & \omega \\ -\omega & s \end{bmatrix} \oplus 0_{m-2} \right) + \left(0_1 \oplus \frac{1}{s^2 + \omega^2} (s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22}) \right) \right]_{s=j\omega} \quad (5.9)$$

eccetto quelli che coinvolgono le prime righe e le prime colonne

di K . Poiché (5.9) è semidef. positive, basta considerare i minori⁽³⁾ di K che interessano l'elemento di K di posto $(1,1)$ e mostrare che essi sono non negativi. Se consideriamo un siffatto minore di ordine v , esso può essere espresso nella forma

$$\det \left\{ \frac{1}{2j\omega} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{h}' j\omega & \text{---} \\ \text{---} & \Delta \end{bmatrix}}_v \right\} \quad (5.10)$$

dove la parte tratteggiata di matrice fa anche parte della matrice (5.9).

Consideriamo ora il minore principale di (5.9) contenente la prima (e) colonna di (5.9) ed inoltre le righe e colonne di (5.9) che sono coinvolte da (5.10). Esso ha la struttura:

$$\det \left\{ \frac{1}{2j\omega} \underbrace{\begin{bmatrix} j\omega & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & (1+\bar{h}')j\omega & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \Delta \end{bmatrix}}_{v+1} \right\} \quad (5.11)$$

(le parti tratteggiate in (5.10) e (5.11) coincidono) e risulta positivo o nullo, essendo (5.9) semidefinita positive.

Sviluppando (5.11) secondo la prima riga della matrice si ha

$$\left(\frac{1}{2j\omega} \right)^{v+1} \left\{ j\omega \left[(1+\bar{h}')j\omega \det \Delta + \xi \right] + \omega^2 \det \Delta \right\} \geq 0 \quad (5.12)$$

dove si è posto

$$\xi = \det \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}}_v \quad (5.13)$$

Da (5.12) si ottiene

$$\left(\frac{1}{2j\omega} \right)^v \left\{ \xi + j\omega \bar{h}' \det \Delta \right\} \geq 0 \quad (5.14)$$

Ma il primo membro di (5.14) è lo sviluppo del determinante (5.10) secondo la prima riga.

(54)

Per concludere, osserviamo che le sintesi di Foster introduce un numero di induttanze e capacità pari al grado di McMillan della matrice $W(s)$ da sintetizzare.

Infatti

$$\begin{aligned} \delta[W] &= \delta \left[D_1 s + D_0 + \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^v \frac{s H_i + E_i}{s^2 + \omega_i^2} \right] = \\ &= \text{rank } D_1 + \text{rank } K_0 + \sum_{i=1}^v \delta \left[\frac{s H_i + E_i}{s^2 + \omega_i^2} \right] \end{aligned}$$

e le sintesi di $D_1 s$ introduce $\text{rank } D_1$ elementi reattivi, le sintesi di D_0 non introduce elementi reattivi, le sintesi di $\frac{K_0}{s}$ introduce $\text{rank } K_0$ elementi reattivi.

Resta da considerare il numero degli elementi reattivi introdotti sintetizzando un termine del tipo $(sH+E)/(s^2+\omega^2)$.

Delle tre procedure adottate per conseguire la sintesi, la prima riduce la sintesi di una matrice $m \times m$ a quella di una matrice $(m-1) \times (m-1)$, evidentemente di egual grado, senza introdurre alcun elemento reattivo.

La seconda introduce due elementi reattivi (e trasformatori ideali, irrilevanti nel computo) e porta dalla sintesi di

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & 0 \\ \hline 0 & \frac{s H_{22}}{s^2 + \omega^2} + \frac{E_{22}}{s^2 + \omega^2} \end{array} \right] \quad (5.15)$$

alla sintesi di $(s H_{22} + E_{22})/s^2 + \omega^2$ che, rispetto a (5.15), ha il grado di McMillan ridotto di due unità.

La terza infine introduce due elementi reattivi (e trasformatori ideali) e porta dalla sintesi di

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left(\left[\begin{array}{c|c} \frac{s}{\omega} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} \end{array} \right] \right) \quad (5.16)$$

alla sintesi di

$$\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & s \bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} \end{array} \right] \quad (5.17)$$

Il residuo in $s = j\omega$ di (5.16) è

$$K_1 = \frac{1}{2j\omega} \left[\begin{array}{c|ccc} j\omega & \omega & 0 & \dots & 0 \\ -\omega & j\omega + \bar{h}'j\omega & & & \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \right] \quad (5.18)$$

e quello di (5.17) è

$$K_2 = \frac{1}{2j\omega} \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{h}'j\omega & & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right] \quad (5.19)$$

ed è immediato che il rango di (5.18) supera di una unità il rango di (5.19)

Quindi

$$\begin{aligned} & \delta \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} s\omega & 0 \\ -\omega s & 0 \end{array} \right] + \frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & s\bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} \end{array} \right] \right] = \\ & = \delta \left[\frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{\check{K}_1}{s + j\omega} \right] = 2 + \delta \left[\frac{K_2}{s - j\omega} + \frac{\check{K}_2}{s + j\omega} \right] = \\ & = 2 + \delta \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & s\bar{H}'_{22} + \bar{E}_{22} \end{array} \right] \right] \end{aligned}$$

Ma allora ognuna delle tre procedure introduce un numero di componenti reattivi eguale alla differenza fra il grado di Mc Millan della matrice prima e dopo l'esecuzione delle procedure stesse.

In conclusione, si è provato che $\delta[W]$ è proprio il numero dei condensatori e delle induttanze complessivamente utilizzate per portare a termine le sintesi.

6. Sintesi dell' m -bipolo reattivo con le variabili di stato.

56

Si suppone assegnata una matrice L.P.R. $W(s)$ priva di poli all'infinito (se fosse $W(\infty) = \infty$, è sempre possibile porre $W(s)$ nella forma $W'(s) + sD_1$, con $W'(\infty) < \infty$ e con sD_1 sintetica reale, in termini di impedenze o di ammettenze, con un m -bipolo reattivo).

Il lemma positivo reale senza perdite ci assicura che, data una realizzazione minima $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ di dimensione n per $W(s)$, esiste una matrice definita positiva P che soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= 0 \\ P B &= C^T \end{aligned} \quad (6.1)$$

Il computo della matrice P che soddisfa (6.1) è molto semplice, in questo caso. Infatti essa deve verificare le relazioni seguenti (deducibili da (6.1)):

$$\begin{aligned} P B &= C^T \\ P A B &= -A^T P B = -A^T C^T \\ P A^2 B &= -A^T P A B = (A^T)^2 C^T \\ &\vdots \\ P A^{n-1} B &= (-1)^{n-1} (A^T)^{n-1} C^T \end{aligned}$$

Conciliando, indicando con R la matrice di controllabilità di Σ e con $\hat{O}$ la matrice

$$\hat{O} = [C^T | -A^T C^T | (A^T)^2 C^T | \dots | (-1)^{n-1} (A^T)^{n-1} C^T]$$

si ottiene

$$P R = \hat{O}$$

Poiché R ha rango pieno, $R R^T$ è invertibile e quindi

$$P = \hat{O} R^T (R R^T)^{-1} \quad (6.2)$$

(6.2) fornisce esplicitamente la matrice P e ne prova anzi la unicità.

Se fattorizziamo la matrice P nella forma

$$P = M^T M \quad (6.3)$$

l'esercizio proposto in VII.2 dimostra che la realizzazione

minime $\hat{\Sigma} = (\hat{M} \hat{A} \hat{M}', \hat{M} \hat{B}, \hat{C} \hat{M}', \hat{D}_0) = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}_0)$ soddisfa (37)
le relazioni

$$\hat{A}^T + \hat{A} = 0$$

$$\hat{B} = \hat{C}^T$$

che soddisfa il L.P.R. lemma con $P = I$.

Possiamo allora riunire quanto qui esposto nel seguente

Teor. 1. Se $W(s)$ è L.P.R., e $W(\infty) < \infty$, allora esistono delle realizzazioni minime $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ di $W(s)$ che soddisfanno le condizioni

$$\begin{aligned} A + A^T &= 0 \\ B &= C^T \end{aligned} \quad (6.4)$$

e che possono essere ottenute da una generica realizzazione minima con operazioni di prodotto e di inversione di matrici e con trasformazioni elementari. $\square$

Ricordiamo ora dal capitolo precedente che un $m+n$ bipolo con matrice impedenza

$$Z(s) = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix}$$

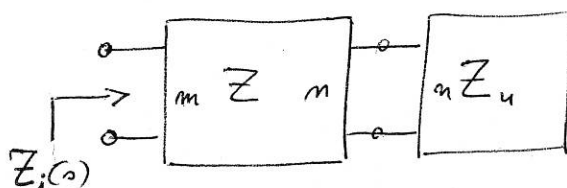


fig. 1

la cui ultime n porte siano chiuse su un n -bipolo di impedenza $Z_u(s)$ dà luogo ad un m -bipolo di impedenza

$$Z_i(s) = z_{11} - z_{12}(z_u + z_{22})^{-1}z_{21} \quad (6.5)$$

perché sia invertibile la matrice $(z_u + z_{22})$.

(Una formula analoga a (6.5) si ha per l'admittanza).

Consideriamo ora la realizzazione Σ del teor. 1:

$$W(s) = D_0 + C(sI_m - A)^{-1}B$$

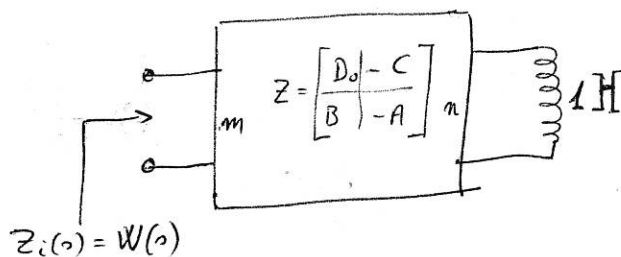
È chiaro che se esiste un $(m+n)$ bipolo la cui impedenza sia

$$\underline{Z} = \left[\begin{array}{c|c} D_0 & -C \\ \hline B & -A \end{array} \right],$$

(6.6)

(38)

poiché $\underline{A}_m$ è interpretabile come impedenza di un m -bipolo costituito da m induttanze unitarie, l' m -bipolo seguente



ha per matrice impedenza $W(s)$. Poiché valgono (6.4), (6.6) è anti-simmetrica e quindi, per quanto provato nel par. 3, è sintetizzabile con giratori accoppiati mediante un trasformatore multipor-
ta. Si ha con una sintesi di $W(s)$, in termini di impedenze, che utilizza $\mathcal{J}[W]$ induttanze.

Esercizio 1. Si dualizzi il ragionamento svolto, per sintetizzare $W(s)$ come ammettanza.

La sintesi sopra descritta è computazionalmente piuttosto semplice, ma ha l'inconveniente di utilizzare giratori anche quando la matrice impedenze (o ammettanza) da sintetizzare è simmetrica.

7 Sintesi dei doppi bipoli reattivi con metodi di "chimica".

(39)

Vogliamo concludere questo capitolo riportando brevemente alcune procedure ormai "classiche" per la sintesi dei doppi bipoli reattivi: ciò è motivato sia dall'interesse storico delle cose, che soprattutto dal fatto che queste procedure di sintesi sono ancora in uso.

A) SINTESI DI CAUER DEL DOPPIO BIPOLO REATTIVO

Le procedure che consideriamo parte dell'assegnazione di una matrice L.P.R. simmetrica

$$Z(s) = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix}$$

da sintetizzare come impedenze di doppio bipolo reattivo.

Cominceremo con lo scrivere $Z(s)$ nella forma

$$Z(s) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{Z}_{11}(s) + Z_{11}^{(p)}(s) & Z_{12}(s) \\ \hline Z_{12}(s) & \bar{Z}_{22}(s) + Z_{22}^{(p)}(s) \end{array} \right]$$

dove $Z_{11}^{(p)}(s)$ e $Z_{22}^{(p)}(s)$ raggruppano tutti i poli di $Z_{11}(s)$ e di $Z_{22}(s)$, rispettivamente, che non sono comuni a $Z_{12}(s)$.

E' chiaro che

1) $Z_{11}^{(p)}(s)$ e $Z_{22}^{(p)}(s)$ sono impedenze di bipoli reattivi e come tali sono sintetizzabili con uno dei metodi ormai ben noti (reti N_1 ed N_2 di fig 1).

$$2) \quad \bar{Z}(s) = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{12}(s) & \bar{Z}_{22}(s) \end{bmatrix}$$

è ancora L.P.R.

3) Quando ci disponga di un doppio bipolo N che suite =

1221 $\bar{Z}(\omega)$, le sezioni di $Z(\omega)$ è data dalle connessioni di $\textcircled{40}$
fig. 1.

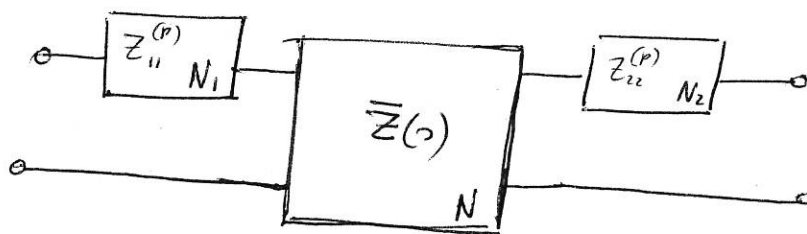


fig. 1

Sviluppiamo ora in frazioni parziali la matrice $\bar{Z}(\omega)$, ottenendo, con le formule usuali:

$$\begin{aligned} \bar{Z}(\omega) = & \begin{bmatrix} d_{11}^{(1)} & d_{12}^{(1)} \\ d_{12}^{(1)} & d_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} R_{11}^{(0)} & R_{12}^{(0)} \\ R_{12}^{(0)} & R_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \frac{1}{\omega} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A}{\omega^2 + \omega_i^2} \begin{bmatrix} h_{11}^{(i)} & h_{12}^{(i)} \\ h_{12}^{(i)} & h_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.1)$$

e proviamo che ogni addendo di (7.1) si sintetizza con una struttura del tipo indicato in fig. 2,

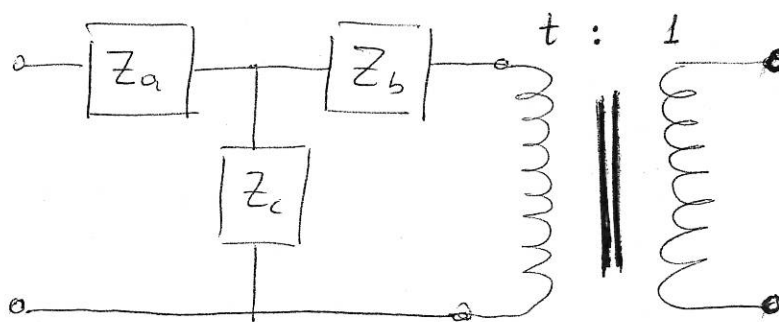


fig. 2

dove Z_a, Z_b, Z_c sono bipoli reattivi da individuarsi.

La matrice impedenza del doppio bipolo di fig. 2 è la seguente

$$\hat{Z}(\omega) = \begin{bmatrix} Z_a + Z_c & 1/t Z_c \\ 1/t Z_c & 1/t^2 (Z_b + Z_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{12} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

e si ha quindi

$$Z_c = t \hat{Z}_{12}$$

$$Z_b = t^2 \hat{Z}_{22} - t \hat{Z}_{12}$$

(7.2)

$$Z_a = \hat{Z}_{11} - t \hat{Z}_{12}$$

Le (7.2) indicano, a partire da un generico solendo di (7.1), come sintetizzarlo con una struttura del tipo di fig 2 scegliendo opportunamente il rapporto di trasformazione t .

Con riferimento p.es. ad una coppia di poli coniugati, si ha

$$\begin{bmatrix} \hat{Z}_{11} & \hat{Z}_{12} \\ \hat{Z}_{12} & \hat{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{n}{n^2 + \omega_i^2} \begin{bmatrix} h_{11}^{(i)} & h_{12}^{(i)} \\ h_{12}^{(i)} & h_{22}^{(i)} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$Z_c = \left[t \ h_{12}^{(i)} \right] \frac{n}{n^2 + \omega_i^2}$$

$$Z_b = \left[t^2 h_{22}^{(i)} - t h_{12}^{(i)} \right] \frac{n}{n^2 + \omega_i^2}$$

(7.3)

$$Z_a = \left[h_{11}^{(i)} - t h_{12}^{(i)} \right] \frac{n}{n^2 + \omega_i^2}$$

L'unica condizione da imporre su t è che i coefficienti entro parentesi qualche in (7.3) siano tutti non negativi.

Il segno di t deve essere eguale a quello di $h_{12}^{(i)}$, per le (7.3.1). Si deve avere allora per (7.3.3)

$$h_{11}^{(i)} - |t| |h_{12}^{(i)}| \geq 0 \Rightarrow |t| \leq \frac{h_{11}^{(i)}}{|h_{12}^{(i)}|}$$

e per (7.3.2)

$$\begin{aligned} t^2 h_{22}^{(i)} - |t| |h_{12}^{(i)}| &\geq 0 \Rightarrow |t| \left(|t| h_{22}^{(i)} - |h_{12}^{(i)}| \right) \geq 0 \\ &\Rightarrow |t| \geq \frac{|h_{12}^{(i)}|}{h_{22}^{(i)}} \end{aligned}$$

In definitiva $|t|$ deve soddisfare le

$$\frac{|h_{12}^{(i)}|}{h_{22}^{(i)}} \leq |t| \leq \frac{h_{11}^{(i)}}{|h_{12}^{(i)}|} \quad (7.4)$$

e certamente ci sono valori di $|t|$ che soddisfanno (7.4) essendo

$$h_{11}^{(i)} h_{22}^{(i)} - h_{12}^{(i)^2} \geq 0$$

Un modo analogo si procede con riferimento agli eventuali poli all'infinito e nell'origine.

Si perviene a doppi bipoli aventi strutture di fig 3.

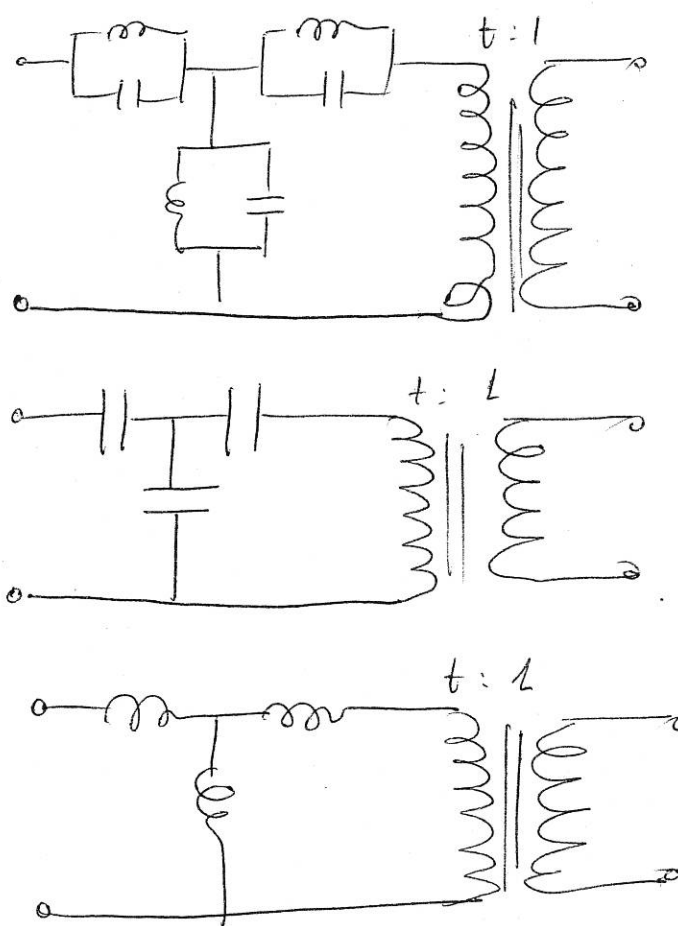


Fig 3

E' interessante notare che queste sintesi non impiegano trasformatori multi-ports, ma non è - in generale - canonica, perché impiega un numero di componenti reattivi superiore al grado di McMillan di $Z(s)$.

B) SINTESI DI UN DOPPIO BIPOLO REATTIVO DI CUI SI IMPONE $Z_{12}(s)$.

(4)

Spesso, nei problemi di sintesi, non viene specificata completamente la matrice $Z(s)$, ma vengono assegnati soltanto alcuni suoi elementi, gli altri restandoli arbitrari e quindi fissabili a piacere. Un caso piuttosto frequente (sul quale torneremo nelle sintesi delle cosiddette funzioni di trasferimento - cap. XIV) è quello in cui del doppio bipolo (reciproco) si ne assegnano soltanto la funzione $Z_{12}(s)$ e $Z_{12}(s) \in \mathcal{R}(s)$ ha tutti i poli immaginari e semplici: la sintesi si può portare a termine con una rete reattiva. Infatti, si consideri lo sviluppo in frazioni parziali di $Z_{12}(s)$:

$$Z_{12}(s) = d_1 s + \frac{R_0}{s} + \sum_{i=1}^v \frac{s h_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (7.5)$$

I numeri d_1, R_0, h_i , $i = 1, 2, \dots, v$, sono necessariamente reali, ma non necessariamente tutti positivi. Se indichiamo con $Z_+(s)$ la somma dei termini che in (7.5) hanno coefficiente positivo e con $Z_-(s)$ l'opposto della somma dei termini che in (7.5) hanno segno negativo, si ottiene

$$Z_{12}(s) = Z_+(s) - Z_-(s)$$

e sia Z_+ che Z_- sono funzioni L.P.R., e quindi sintetizzabili come bipoli reattivi.

La rete di fig. 4 (a "traliccio") soddisfa allora al

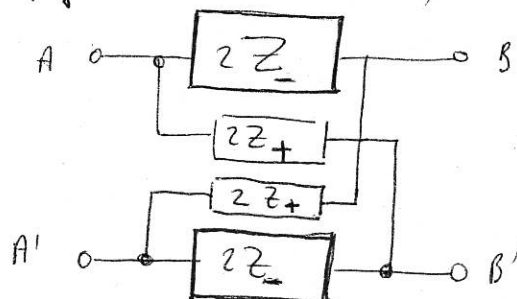


fig 4

problema proposto.

(44)

Osservazione. Se nello sviluppo (7.5) è presente anche un
termine costante d_0 , a seconda che esso sia positivo o negativo
verrà inglobato in Z_+ o in Z_- : ovviamente la serie di
 Z_+ (o di Z_-) conterrà la serie di un bipolo resistivo e di
una resistenza di valore $|d_0|$.