

XI. SINTESI NON RECIPROCA DELL' IMMETTENZA.

1. Introduzione

Proseguendo nella via intrapresa nel precedente capitolo, faremo vedere che ogni matrice positiva reale può essere interpretata come immettenza di una rete passiva.

Ci limiteremo qui alla sintesi dell' impedenza e dell' immettenza, (accennando alla fine alle matrici ibride, per le quali il problema si risolve in modo analogo, senza sostanziali complicazioni) e considereremo disponibili in ogni caso i giratori. Come si vedrà, le procedure descritte porteranno a costruire reti di sintesi contenenti giratori anche quando l'impedenza da sintetizzare è simmetrica: nel capitolo successivo proveremo che effettivamente è sempre possibile una sintesi reciproca (i.e. senza giratori) per una impedenza simmetrica positiva reale.

Considereremo due diversi approcci: quello della estrazione di resistenze e quello della estrazione di reattanza, che definiremo e svilupperemo nei paragrafi 3 e 4 rispettivamente. Prima di entrare nel merito dei due procedimenti, conviene estendere alcune tecniche descritte nel capitolo precedente, in modo conseguire una semplificazione preliminare, e talvolta assai notevole, sulla struttura delle matrici P.R. da sintetizzare.

2. Preambolo (generalizzato) di Foster.

Dallo sviluppo in frazioni parziali della matrice P.R. $W(s)$, è evidente che $W(s)$ può sempre porsi nella forma

$$W(s) = sD_1 + D_0 + W_p(s) \tag{2.1}$$

dove sD_1 è la parte principale relativa al polo all' infinito, e $W_p(s)$ denota la parte propria di $W(s)$

Inoltre D_1 è semidefinita positiva, e con pure la parte simmetrica $\frac{D_0 + D_0^T}{2}$ di D_0

nell'impedenza (ammettenza) $W'(s)$ secondo le procedure descritte (K. B.)
nelle sintesi di Cauer generalizzate

se $W'(\infty)$ ($W_1(\infty)$ nel caso che $W_1(s)$ sia invertibile su $\mathbb{R}(s)$) ha rango non completo, la matrice P.R.

$$\bar{W}_2(s) = [W'(s)]^{-1}$$

ha un polo all'infinito, ed è interpretabile come ammettenza (impedenza) di un m-lipolo se $W'(s)$ era una impedenza (ammettenza).
Chiaro che su $\bar{W}_2(s)$, che ha lo stesso grado di McMillan di $W'(s)$, si possono eseguire le stesse procedure di semplificazione fin qui descritte, ricominciando dalla estrazione del polo all'infinito.

Poiché con l'estrazione del polo il grado di Mc-Millan si altera, e con gli altri procedimenti esso non viene alterato, si dovrà ottenere una matrice nulla (se $W(s)$ è L.P.R.) oppure una matrice $\hat{W}(s)$ che

- è priva di poli all'infinito
- è simmetrica e non singolare all'infinito

La procedura è schematizzata in fig. 1. Vale peraltro la pena di notare che, con i metodi descritti nel precedente capitolo, è possibile spesso semplificare ulteriormente $\hat{W}(s) \neq 0$ cui siamo pervenuti, senza alterare le proprietà a. e b. elencate. Infatti, se la $\hat{W}(s)$ cui siamo pervenuti ha dei poli sull'asse immaginario:

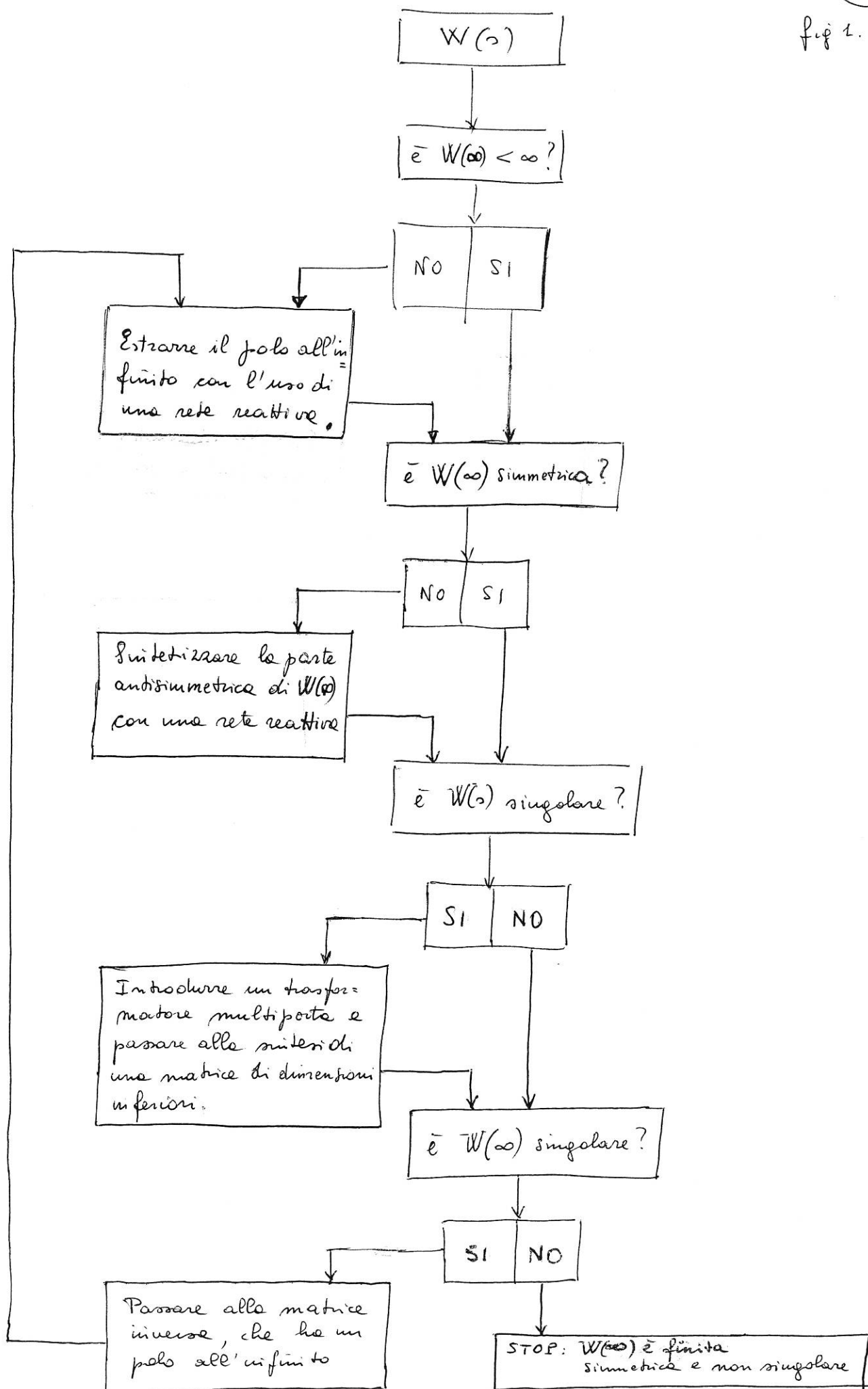
$$\hat{W}(s) = \sum_{i=1}^{v_1} \left(\frac{K_i}{s+j\hat{\omega}_i} + \frac{\check{K}_i}{s-j\hat{\omega}_i} \right) + \frac{K_0}{s} + \hat{W}_1(s)$$

la matrice $\hat{W}_1(s)$ è P.R. regolare sull'asse immaginario e soddisfa a. e b.

Poiché

$$\sum_{i=1}^{v_1} \left(\frac{K_i}{s+j\hat{\omega}_i} + \frac{\check{K}_i}{s-j\hat{\omega}_i} \right) + \frac{K_0}{s}$$

è realizzabile con una rete reattiva (usando uno dei metodi esposti in cap. X) il problema della sintesi si riduce a quello di $\hat{W}_1(s)$, che



ha un grado di Mc Millan minore di quello di $\hat{W}(s)$. (U.S.)
 Considerata poi $\hat{W}_2(s) = \hat{W}_1^{-1}(s)$, essa soddisfa a. e b.: se si evidenziano i suoi poli immaginari (quando ne esistono)

$$\hat{W}_2(s) = \sum_{i=1}^{v_2} \left(\frac{H_i}{s + j\bar{\omega}_i} + \frac{\bar{H}_i}{s + j\omega_i} \right) + \frac{H_0}{s} + \hat{W}_3(s)$$

e si sintetizza $\hat{W}_2(s) - \hat{W}_3(s)$ con i metodi del capitolo precedente, $\hat{W}_3(s)$ è P.R., soddisfa a e b ed ha grado di Mc Millan ulteriormente ridotto. La procedura può ripetersi su $\hat{W}_3^{-1}(s) = \hat{W}_4(s)$ etc... Essa converge (poiché il grado di Mc Millan decresce) verso una $\tilde{W}(s)$ che soddisfa a. e b. e che è regolare insieme con la sua inversa sull'asse immaginario. La sintesi si potrà allora eseguire su tale $\tilde{W}(s)$.

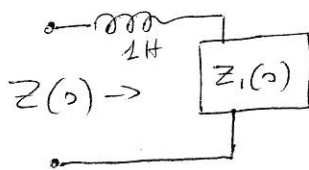
Esempio 1 Date la funzione P.R.

$$Z(s) = \frac{s^4 + 10s^3 + 3s^2 + 10s + 1}{s^3 + 10s^2 + 2s + 10}$$

che ha un polo all'infinito, con residuo 1:

$$Z(s) = s + \frac{s^2 + 1}{s^3 + 10s^2 + 2s + 10} = s + Z_1(s)$$

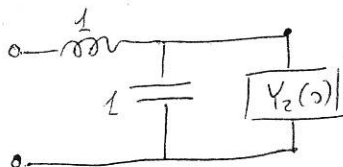
Il polo può essere "estratto" utilizzando un'induttanza unitaria



$Z_1(\infty)$ è nullo e quindi considereremo

$$Y_1(s) = Z_1^{-1}(s) = \frac{s^3 + 10s^2 + 2s + 10}{s^2 + 1} = s + \frac{10s^2 + s + 10}{s^2 + 1}$$

Il polo viene estratto usando un condensatore unitario, e resta da sintetizzare un'ammettenza $Y_2(s) = (10s^2 + s + 10)/(s^2 + 1)$.

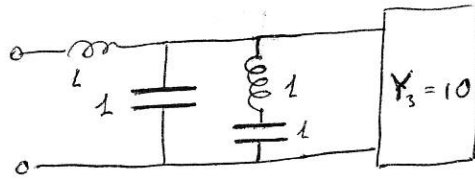


A questo punto le procedure della fig. 1 può dirsi esaurite. Tuttavia è possibile ridurre ulteriormente la complessità della funzione da sintetizzare osservando che $Y_2(s)$ presenta una coppia di poli immaginari in $\pm j$.

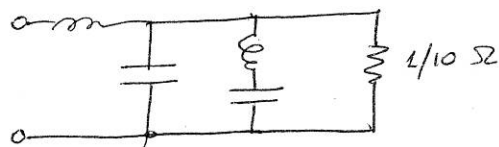
Risulta pertanto

$$Y_2(s) = \frac{s}{s^2+1} + 10$$

che si sintetizza con una serie LC, in parallelo ad una ammettenza di valore 10.



È chiaro che la rete, in questo caso, si completa facilmente con una resistenza di $1/10 \Omega$.



Esempio 2. Si consideri la matrice P.R.

$$Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2+s+1}{s+1} & \frac{s+2}{s+1} \\ \frac{-s}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Adottando le procedure della fig. 1, potremo

$$Z(s) = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s+2}{s+1} \\ \frac{-s}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + Z_1(s)$$

e sintetizzeremo separatamente

$$s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con il doppio bipolo di fig. 2

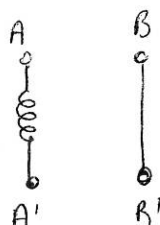


fig 2

Poiché $Z_1(\infty) \neq Z_1^T(\infty)$, porremo

$$Z_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + Z_2(s)$$

e sintetizzeremo la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

con il doppio bipolo di fig 3

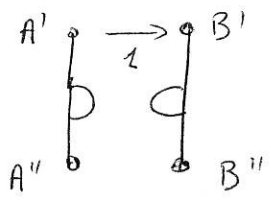


fig. 3

$Z_2(s)$ è singolare, e può essere scritta come

$$Z_2(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Potuto allora $Z_3(s) = \frac{1}{s+1}$, $Z_2(s)$ si sintetizza come in fig 4

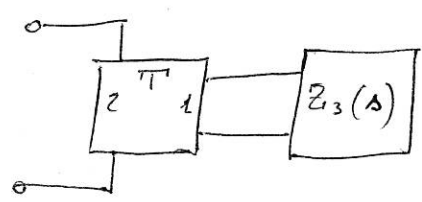


fig 4

con $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

A questo punto $Z_3(s)$ è simmetrica, finita e non singolare e quindi la procedura di fig 1 termina. Anche qui, come nell'esercizio precedente, $Z_3(s)$ è sintetizzabile agevolmente come parallelo di un condensatore e di una resistenza unitari.

Le procedure di "estrazione" schematizzate in fig. 1 e le ulteriori estrazioni dei poli nell'asse immaginario sono una generalizzazione al caso matriciale di una tecnica inizialmente messa a punto per funzioni P.R. che va sotto il nome di "preambolo di Foster".
 Riassumendo i risultati fin qui ottenuti possiamo enunciare il

Teor. 1 (PREAMBOLO DI FOSTER) Data una matrice $W(s)$ P.R. che si interpreta come matrice impedenza o come matrice ammettanza, è sempre possibile ridurre il problema di sintesi a quello di una matrice P.R. $\tilde{W}(s)$ per cui i punti seguenti:

- 1) $\delta[W] \geq \delta[\tilde{W}]$
- 2) $\tilde{W}(s)$ è regolare e simmetrica insieme con la sua inversa per $s = \infty$
- 3) $\tilde{W}(s)$ è regolare insieme con la sua inversa su tutto l'asse immaginario.

Le funzioni P.R. cui non è ulteriormente applicabile il preambolo di Foster sono chiamate "di minima fase".

3. Sintesi per estrazione di reattanza.

Supponiamo che, data una matrice impedenza P.R. $Z(s)$, con $Z(\infty) < \infty$, l'm-bipolo N ne sia una sintesi (in altre parole, supponiamo di aver già in qualche modo risolto il problema della sintesi)

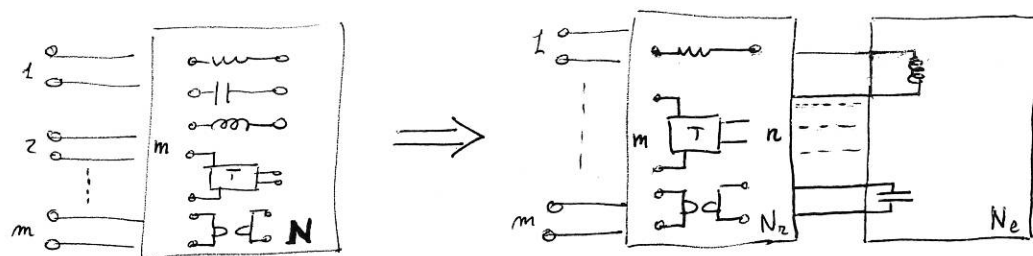
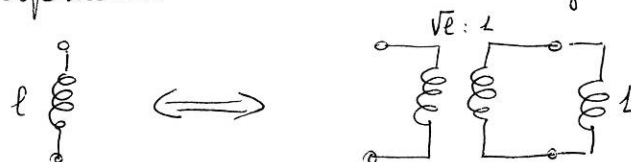


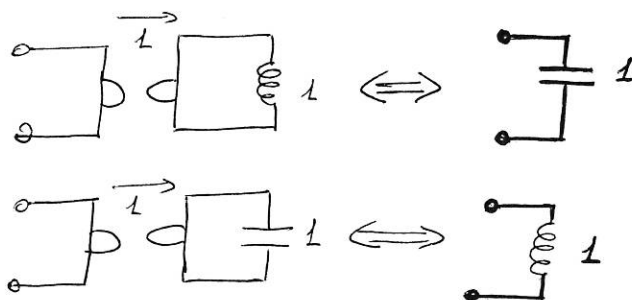
fig 1

N può essere visto in modo naturale come l'interconnessione di due sottoreti $N_e + N_z$, la prima contenente tutti e soli gli elementi reattivi di N , la seconda contenente gli elementi "non dinamici" (resistenze, trasformatori, giroscopi).

Inoltre, poiché ogni induttanza di 1 Henry può essere ottenuta con un trasformatore ed una induttanza unitaria:



ed analogamente ogni condensatore di 1 Farad può ottenersi con un trasformatore e una capacità unitaria, e poiché si hanno le equivalenze



è sempre possibile modificare N in modo tale che la rete dinamica N_e contenga soltanto induttanze (o soltanto condensatori) unitarie. La interconnessione di fig 1 si semplifica allora nella seguente; cui d'ora in poi ci riferiremo:

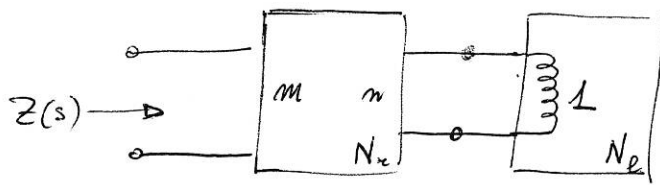


fig. 4

Se l' $(m+n)$ -lipo non dinamico N_z è dotato di una matrice impedenza Z , questa gode delle seguenti proprietà:

1. Z è reale costante
2. Z è positiva reale (in quanto ottenuta dalla connessione di elementi dissipativi: l'argomento sarà oggetto di uno studio più dettagliato nell'analisi delle reti)

In generale non è detto che N_z ammetta necessariamente una matrice impedenza (anche se si può provare che ammette necessariamente qualche matrice ibrida): poiché le considerazioni che svolgiamo hanno soltanto valore euristico, e poiché a posteriori verifichiamo che esiste almeno una sintesi di $Z(s)$ per la quale la rete non dinamica di fig. 4 ammette matrice impedenza, supponiamo che Z esista.

Partizionando Z nella forma

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

con Z_{11} $m \times m$, Z_{22} $n \times n$ etc, per quanto abbiamo detto nel cap. IX e poiché l'impedenza di N_e in fig. 4 è $s\mathbb{I}_n$, possiamo esprimere $Z(s)$ nella forma

$$Z(s) = Z_{11} - Z_{12} (s\mathbb{I}_n + Z_{22})^{-1} Z_{21} \quad (3.2)$$

È allora evidente che, se Z esiste, le sottomatrici $(-Z_{22}, Z_{21}, -Z_{12}, Z_{11})$ costituiscono una realizzazione di $Z(s)$, ossia ogni qualvolta la rete non dinamica di sintesi N_z ammette matrice impedenza Z , a partire da Z si ha una realizzazione della funzione di trasferimento $Z(s)$.

Quanto visto finora suggerisce almeno le linee sulle quali impostare una procedura di sintesi. 515

Si suppone infatti che, assegnate $Z(s)$ P.R., con $Z(\infty) < \infty$, si possa disporre di una sua realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ tale che la matrice $(m+n) \times (m+n)$

$$\mathcal{Z} = \left[\begin{array}{c|c} D_0 & -C \\ \hline B & -A \end{array} \right] \quad (3.3)$$

sia la matrice impedenza di una rete non dinamica N_e . Allora l'impedenza vista alle prime m porte di N_e , quando le restanti sono chiuse su induttanze unitarie, è

$$D_0 - (-C)(sI_m - (-A))^{-1}B$$

e quindi è proprio la $Z(s)$ assegnata.

Il problema è quindi ridotto alla ricerca di una realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D)$ per cui (3.3) è impedenza di rete non dinamica, ed alla costruzione effettiva di tale rete non dinamica.

Una ulteriore "riduzione" si ottiene applicando il seguente

Lemma 1 Una matrice costante $\overset{m \times m}{\mathcal{Z}}$ positiva reale è sempre sintetizzabile come impedenza di rete non dinamica.

prova. Basterà scomporre $\mathcal{Z}$ nelle sue parti simmetriche $\mathcal{Z}_S$ e nelle parti antisimmetriche $\mathcal{Z}_A$, ed osservare che $\mathcal{Z}_S$ è semidefinita positiva, perché per le proprietà delle matrici P.R.

$$\mathcal{Z} + \mathcal{Z}^T = \mathcal{Z} + \mathcal{Z}^T = 2\mathcal{Z}_S \geq 0 \quad (3.4)$$

Allora $\mathcal{Z}_S$ è fattorizzabile nella forma

$$\mathcal{Z}_S = T^T T \quad (3.5)$$

con T matrice costante $v \times m$ ($v = \text{rank } \mathcal{Z}_S$), e sintetizzabile come impedenza di un trasformatore multiparte chiuso su v resistenze unitarie (fig 5)

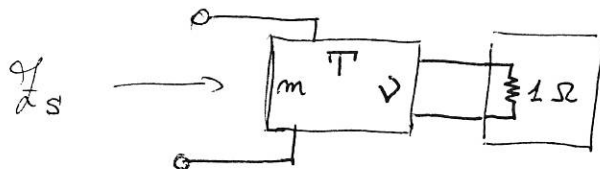


fig. 5

mentre Z_A è sempre sintetizzabile con un trasformatore multi-⁽⁵⁶⁾
 porte e con giratori (cf. cap. X, par. 3). $\square$

Le matrici costanti P.R. sono tutte e sole quelle per cui è semi-
 definita positiva la parte simmetrica, ossia tutte le matrici M
 per cui risulta $M + M^T \geq 0$. Il problema delle sintesi, in vista
 del lemma 1, si riduce al seguente:

Determinare una realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ di $Z(s)$ per cui
 sia semidefinita positiva la matrice

$$Y + Y^T = \left[\begin{array}{c|c} D_0 + D_0^T & B^T - C \\ \hline B - C^T & -A - A^T \end{array} \right] \quad (3.6)$$

La soluzione è conseguenza del lemma positivo reale. Infatti,
 poiché $Z(s)$ è P.R., e per l'esercizio 1 di VII par. 2, esistono
 realizzazioni minime di $Z(s)$, $\Sigma = (A, B, C, D_0)$, che soddisfano le
 relazioni

$$\begin{aligned} A + A^T &= -L L^T \\ B &= C^T - L J \\ D_0 + D_0^T &= J^T J \end{aligned} \quad (3.7)$$

per matrici L e J opportune, e quindi risulta

$$Y + Y^T = \left[\begin{array}{c|c} J^T J & -L J \\ \hline -J^T L & L L^T \end{array} \right] = \begin{bmatrix} J^T \\ -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J & -L^T \end{bmatrix} \geq 0$$

Basterà allora procurarsi una di queste realizzazioni, costruire
 la matrice Z , sintetizzarla come impedenza di rete non
 dinamica, chiudere opportune porte delle rete non dinamiche
 su resistenze unitarie. Si otterrà, alle restanti m porte,
 una sintesi della assegnata $Z(s)$.

(1717)

Se un punto di vista computazionale, l'ottenimento di una relazione che soddisfi (3.7) richiede la risoluzione delle equazioni del lemma P.R. (ed ulteriori semplici fattorizzazioni della matrice P , come indicato nel citato esercizio di VII.2).

E' noto che la soluzione del lemma P.R. equivale a risolvere un'equazione di Riccati quando $D_0 + D_0^T$ non è singolare. Il preambolo descritto nel paragrafo precedente ci assicura che in ogni caso la sintesi di $Z(s)$ può essere ricondotta a quella di una matrice P.R. per cui $D_0 + D_0^T$ non è singolare.

Si lascia come esercizio le prove del seguente

Teor. 1. Se $Z(s)$ è una matrice P.R. e se $\delta[Z(s)] = n$, esiste una sintesi di $Z(s)$ come impedenza di n -polo che utilizza n componenti reattivi (capacità e/o induttanze).

Esercizio 1. Si dualizzino le procedure esposte alle sintesi delle matrici ammettenza.