

1. Introduzione.

In questo capitolo attribuiremo al termine "funzione di trasferimento" un significato più restrittivo di quello che finora gli abbiamo attribuito mutuandolo sostanzialmente dalla teoria dei sistemi.

Quando si considera un m -bipolo lineare come un sistema lineare con m ingressi ed m uscite, la "funzione di trasferimento" associata è la matrice immittenza che connette, alle L -trasformate, le grandezze che abbiamo assunto ad ingressi con le grandezze che abbiamo assunto ad uscite. In generale, come abbiamo visto, ogni porta è interessata da una grandezza d'ingresso e da una d'uscita (se la prima è una corrente, la seconda è una tensione, e viceversa), e la matrice dell'immittenza, che abbiamo studiato nei capitoli precedenti, ha come punto di partenza appunto una specifica completa del legame fra m grandezze elettriche delle m porte e le m grandezze elettriche duali.

Spesso, peraltro, dato un m -bipolo N , non ci è tanto interessato all'analisi delle sue matrici immittenza, quanto allo studio

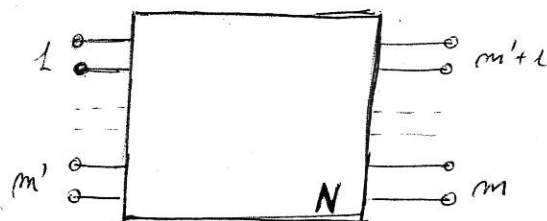


fig. 1

del legame intercorrente fra m' grandezze elettriche, applicate ad $m' < m$ porte della rete N , ed $m - m'$ grandezze elettriche relative alle $m - m'$ porte rimanenti, quando le $m - m'$ grandezze duali sono supposte nulle (o, comunque, vincolate alle precedenti).

Per fare un esempio, se N ha la matrice impedenza $Z(s)$, e se $Z(s)$ viene partizionata nelle forme

$$Z(s) = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{matrix} \} m' \\ \} m - m' \end{matrix} \quad (1.1)$$

la matrice $Z_{21}(s)$ lega, alle L -trasformate, le correnti impresse (e quindi considerate come ingressi) alle prime m' porte con le tensioni conseguenti alle residue $m-m'$ porte, quando queste ultime sono "aperte", cioè quando sono alimentate da correnti nulle.

In questo capitolo chiameremo "funzioni di trasferimento" di un m -lipo N non già le possibili matrici immettense (impedenze, ammettense o ibride) bensì i loro sottoblocchi di indice (2,1) che si possono ricavare, eventualmente riordinando le porte, con la partizione descritta. Le funzioni di trasferimento perciò legano alle L -trasformate un insieme di m' grandezze (correnti e/o tensioni) applicate ad m' porte della rete, ad $m-m'$ grandezze che si ottengono come "risposte" alle rimanenti porte, sotto la condizione che le $m-m'$ grandezze dualizzino nulle.

La funzione di trasferimento è espressa da una matrice $T'(s)$, di dimensioni $(m-m') \times m'$, i cui elementi sono funzioni razionali a coefficienti reali nella variabile complessa s (N si suppone lineare, a costanti concentrate!). Essa $\neq$ parte di una matrice immettense, ed anzi la natura delle grandezze assunte come sollecitazioni e come risposte (correnti o tensioni) individua quale matrice immettense dell' m -lipo N contenga come sottomatrice $T'(s)$.

Il problema della sintesi della funzione di trasferimento utilizzando metodologie delle variabili di stato non ha ancora raggiunto soluzioni completamente soddisfacenti, sebbene siano state sviluppate delle tecniche sistematiche di sintesi, e sebbene alcuni avvicinino, la minimalità del numero di componenti (almeno resistivi) impiegati.

Noi qui accenneremo ad alcune di queste tecniche, e concluderemo il capitolo riportando per completezza, e per la loro utilità nelle applicazioni, alcune procedure classiche di sintesi che prescindono dall'uso delle variabili di stato.

Per semplificare il formalismo di quanto esporremo, ma senza ledere la generalità, supponiamo che la funzione di trasferimento $T(\omega)$ abbia come variabili di ingresso delle correnti e come variabili di uscita delle tensioni.

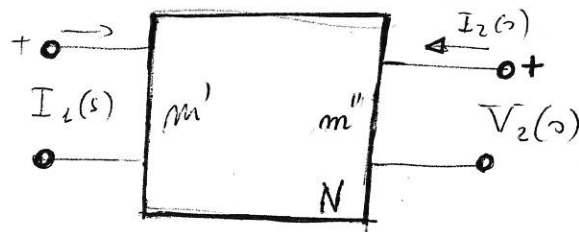


fig. 1.

Con riferimento alle fig. 1, avremo cioè

$$V_2(\omega) = T(\omega) I_1(\omega) \quad (2.1)$$

$m'' \times m'$

L'equazione (2.1) è intesa valere quando le m' porte di "uscita" sono collegate da corrente nulla ($I_2(\omega) \equiv 0$) e, naturalmente, quando per $t=0$ le variabili di stato dell'ipotetico m'' -polo N che stabilisce il legame $T(\omega)$ sono tutte nulle.

Il punto fondamentale nella procedura di intesi sta nell'interpretare $T(\omega)$ come sottomatrice di una matrice impedenza positiva reale e più precisamente come sottomatrice $Z_{21}(\omega)$ della matrice $(m' + m'') \times (m' + m'')$ $Z(\omega)$:

$$Z(\omega) = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La scelta di una matrice $Z(\omega)$ P.R. il cui blocco $Z_{12}(\omega)$ coincida con $T(\omega)$ è in larga misura arbitraria, purché $T(\omega)$ soddisfi una condizione sui poli che fra breve enunceremo.

Torna utile premettere il seguente

Lemma 1. Se i poli della matrice $W(\omega)$ regolare all'infinito hanno parte reale non positiva e se i poli immaginari sono semplici, allora esiste sempre una realizzazione minima (A, B, C, D_0) di $W(\omega)$ per cui $A + A^T$ è semidefinita negativa.

prova. Si spezza $W(s)$ nella somma di due matrici $W_I(s) + W_N(s)$, (6.1)
 prima relative ai poli di $W(s)$ sull'asse immaginario, la seconda relative
 ai poli di $W(s)$ che hanno parte reale negativa.

Se (A_N, B_N, C_N, D_0) è una realizzazione minima di $W_N(s)$, per i legami
 che conosciamo dal cap II fra poli della matrice $W(s)$ e autore-
 lori della matrice A_N , risulta $\text{Re} \lambda(A_N) < 0$ ed il lemma 3 di III. 7
 consente di determinare, per ogni matrice quadrata Q_N avente le stesse di-
 mensioni di A_N , un'unica matrice K_N che soddisfa la relazione

$$K_N A_N + A_N^T K_N = -Q_N \quad (2.3)$$

È anche facile vedere che se Q_N è definita positiva, tale è la matrice
 K_N (se si pone $Q_N = N^T N$, la coppia (A_N, N) è osservabile ed è applicabile
 il lemma di Lyapunov).

Se M_N è una matrice invertibile tale che

$$K_N = M_N^T M_N,$$

la realizzazione $\hat{\Sigma}_N = (\hat{A}_N, \hat{B}_N, \hat{C}, D_0) = (M_N A_N M_N^{-1}, M_N B_N, C_N M_N^{-1}, D_0)$ di
 $W_N(s)$ soddisfa la condizione

$$\hat{A}_N + \hat{A}_N^T = -(M_N^T)^{-1} Q_N M_N^{-1} < 0 \quad (2.4)$$

La matrice $W_I(s)$ si può sviluppare in frazioni parziali:

$$W_I(s) = \frac{K_0}{s} + \sum_{i=1}^v \left(\frac{K_i}{s - j\omega_i} + \frac{\check{K}_i}{s + j\omega_i} \right) \quad (2.5)$$

In accordo con quanto detto in II. 6, essendo semplici tutti i poli di
 $W_I(s)$ una realizzazione (complessa) minima di $W_I(s)$ si ottiene
 - fattorizzando K_i nella forma

$$K_i = C_i B_i$$

con $C_i \in \mathbb{C}^{m' \times \mu_i}$, $B_i \in \mathbb{C}^{\mu_i \times m''}$, $\mu_i = \text{rank } K_i$

- ponendo $A_0 = \mathbb{O}_{\mu_0}$, $A_i = j\omega_i \mathbb{I}_{\mu_i}$

- costruendo le matrici

$$A_I = \text{diag} \{ A_0, A_1, \check{A}_1, A_2, \check{A}_2, \dots, A_v, \check{A}_v \} \quad (2.6)$$

$$C_I = [C_0 | C_1 | \check{C}_1 | \dots | C_v | \check{C}_v]$$

$$B_I = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_\nu \\ B_\nu \end{bmatrix}$$

(62)

È possibile che (2.6) ottenere una realizzazione reale minima per $W_I(s)$ operando sulla realizza. (2.6) la trasformazione di similitudine indotta dalla matrice

$$M_I = \text{diag} \left\{ 1_{\mu_0}, \left[\begin{array}{c|c} 1_{\mu_1} & i 1_{\mu_1} \\ \hline i 1_{\mu_1} & 1_{\mu_1} \end{array} \right] \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \left[\begin{array}{c|c} 1_{\mu_\nu} & i 1_{\mu_\nu} \\ \hline i 1_{\mu_\nu} & 1_{\mu_\nu} \end{array} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

La realizzazione che si ottiene: $\hat{\Sigma}_I = (\hat{A}_I, \hat{B}_I, \hat{C}_I, 0) = (M_I A_I M_I^{-1}, M_I B_I, C_I M_I^{-1})$ ha la matrice $\hat{A}_I$ antisimmetrica reale.

Concludendo, la realizzazione minima di $W(s)$

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A}_N & 0 \\ 0 & \hat{A}_I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \hat{B}_N \\ \hat{B}_I \end{bmatrix}, \quad C = [\hat{C}_N, \hat{C}_I], \quad D_0$$

soddisfa la condizione $A + A^T \leq 0$

□

Teor. 1 Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $T(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m'}$ si possa considerare sottomatrice $Z_{21}(s)$ di una matrice P.R. $Z(s) \in \mathbb{R}(s)^{(m'+m) \times (m'+m)}$ è che i poli di $T(s)$ abbiano parte reale non positiva e che quelli immaginari (incluso il polo all'infinito) siano semplici.

prova. La condizione è ovviamente necessaria. Per provarne la sufficienza, si scrive $T(s)$ nella forma

$$T(s) = D_1 s + D_0 + C(sI - A)^{-1} B$$

con (A, B, C, D_0) realizzazione minima della parte regolare di $T(s)$ soddisfacente la condizione

$$A + A^T \leq 0$$

La matrice D_1 si può sempre pensare come il blocco Δ_{21}

di una matrice semidefinita positiva $\Delta \in \mathbb{R}^{(m'+m'') \times (m'+m'')} \quad (63)$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix}$$

e Δ si può conferire in modo che il suo rango coincida col rango di D_1 . Infatti, se poniamo $D_1 = r$, esistono matrici invertibili $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ per cui è

$$D_1 = \mathcal{E} \operatorname{diag} \left\{ \underbrace{1 \ 1 \dots 1}_r \right\}_{m' \times m'} \mathcal{F}$$

e la matrice

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^T & 0 \\ 0 & \mathcal{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{diag} \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_r \right\}_{m' \times m'} & \operatorname{diag} \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_r \right\}_{m' \times m''} \\ \operatorname{diag} \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_r \right\}_{m'' \times m'} & \operatorname{diag} \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_r \right\}_{m'' \times m''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{F} & 0 \\ 0 & \mathcal{E}^T \end{bmatrix}$$

ha rango r , è semidefinita positiva, ed il suo blocco Δ_{21} coincide con D_1 .

Allora la matrice

$$Z(s) = s\Delta + \begin{bmatrix} 0 & -D_0^T \\ D_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{matrix} m' \\ m'' \end{matrix} \left\{ \begin{bmatrix} B^T \\ C \end{bmatrix} \right\} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B & C^T \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

è P.R. perché

1. $\Delta \geq 0$
2. Le matrici $(A, [B \mid C^T], \begin{bmatrix} B^T \\ C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -D_0^T \\ D_0 & 0 \end{bmatrix})$ sono una realizzazione minima delle sue porte realizzabili e soddisfanno il lemma P.R. con $P = I, J = 0$:

$$A + A^T = -LL^T \quad (\text{essendo } A + A^T \leq 0)$$

$$[B \mid C^T] = \begin{bmatrix} B^T \\ C \end{bmatrix}^T \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -D_0^T \\ D_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -D_0^T \\ D_0 & 0 \end{bmatrix}^T = 0$$

È evidente che $Z_{21}(s)$ coincide con $T(s)$. $\square$

La dimostrazione fatta prova anche il seguente importante

Coroll. 1. Nelle ipotesi del teor. 1, la matrice $Z(s)$ P.R. che contiene $T(s)$ si può sempre assumere abbia lo stesso grado di Mc Millan di $T(s)$. $\square$

Quanto abbiamo detto è sufficiente per fornire direttamente una tesi non reciproca di $T(s)$ senza neppure ricorrere alla soluzione del lemma P.R.

Dato infatti $T(s)$ soddisfacente le condizioni del teor. 1,

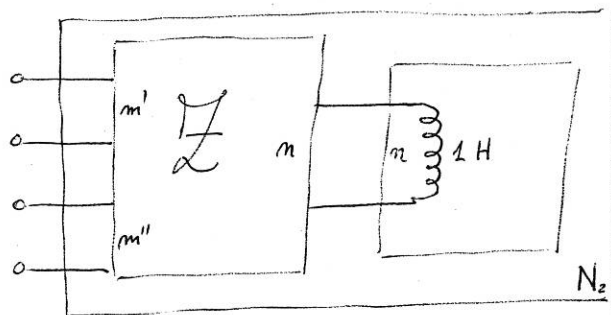
- si costruisce una realizzazione minima (A, B, C, D_0) per la parte realizzabile di $T(s)$, scegliendole in modo che sia $A + A^T \leq 0$
- si costruisce la matrice semidefinita positiva Δ e si sintetizza l'impedenza Δ con un $(m' + m'')$ -bipolo N_1
- si sintetizza l'impedenza

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & -D_0^T \\ \hline D_0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} B^T \\ C \end{array} \right] (sI - A)^{-1} \left[\begin{array}{c|c} B & C^T \end{array} \right] \quad (2.9)$$

osservando che essa è già nelle forme per applicare la procedura di estrazione di reattanze: si costruisce la matrice $(m' + m'' + n) \times (m' + m'' + n)$ (con n dimensione di A):

$$\mathcal{Z} = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & -D_0^T & -B^T \\ \hline D_0 & 0 & -C \\ \hline B & C^T & -A \end{array} \right]$$

che è un'impedenza di rete non dinamica per la (2.8), e si chiudono le ultime n porte su induttanze unitarie



- si pongono in serie gli $(m' + m'')$ -bipoli N_1 ed N_2 .

4. Sintesi in presenza di carichi alle porte di uscita.

In generale il problema della sintesi della funzione di trasferimento è complicato più di quanto non appaia dai precedenti paragrafi perché non è sempre conveniente riferirsi ad una situazione con porte d'uscita aperte (o, nella sintesi duale con $T(s) = Y(s)$, con porte in corto circuito) né è possibile supporre che i generatori di tensione (o di corrente) applicati siano privi di impedenza interne.

Due casi abbastanza comuni sono quelli in cui $T(s)$ rappresenta il

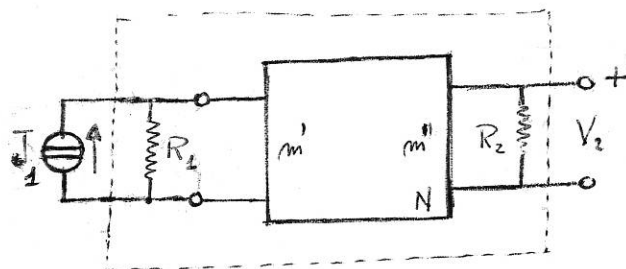


Fig. 1

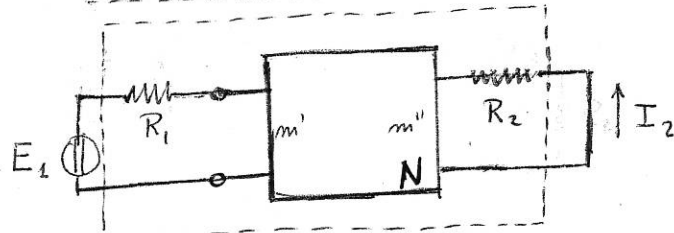


Fig. 2

legame fra le m' correnti J_i di m' generatori, dotati di resistenza interne R_i (R_i si può pensare come matrice diagonale $m' \times m'$: l'elemento di posto (i, i) rappresenta la resistenza dell' i -esimo generatore) e le m'' tensioni V_2 delle porte d'uscita caricate da resistenza R_2 (anche R_2 si pensa come matrice diagonale, etc -)

$$T(s) J(s) = V_2(s) \quad (4.1)$$

ed il suo duale, in cui $T(s)$ lega le m' tensioni E_i di m' generatori dotati di resistenza interne R_i e le m'' correnti I_2 delle porte d'uscita caricate da resistenza R_2 :

$$T(s) E(s) = I_2(s) \quad (4.2)$$

Il problema della sintesi di $T(s)$ è qui quello di costruire la rete N che, "aumentata" con R_i ed R_2 , presenti rispettivamente Z_{21} ed Y_{21} eguale alle $T(s)$ assegnate.

In questo paragrafo considereremo un caso semplificato: quello in cui le porte di ingresso sono alimentate da generatori ideali ed il carico è quindi presente solo in uscita (fig. 3).

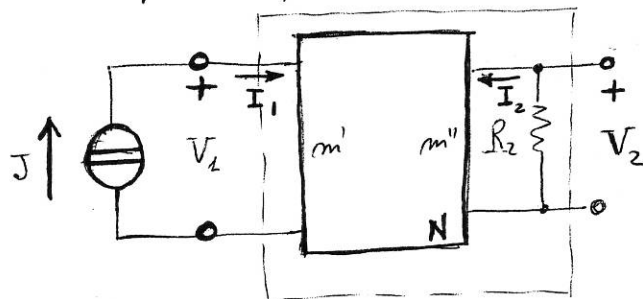


fig. 3

Supponiamo che la matrice R_2 sia invertibile e che $T(s)$ per cui è

$$T(s) J(s) = V_2(s)$$

sia priva di poli per $\text{Re } s \geq 0$ e all' ∞ : l'esclusione dei poli immaginari è giustificabile in base a considerazioni di dissipatività, poiché le porte di uscita sono caricate, ma su ciò non insistiamo.

Come già in altri casi, cercheremo un suggerimento sulle vie da seguire per la sintesi da considerazioni di analisi su una ipotetica rete che abbia realizzato le sintesi stesse. Non è irragionevole supporre, in mancanza di ipotesi, che N sia descrivibile in termini di impedenza da una matrice $Z(s)$ e che essa ammetta una realizzazione con matrici, aventi le strutture considerate in (2.8), corrispondenti per N le equazioni

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \hat{A}x + [\hat{B} | \hat{C}^T] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}^T \\ \hat{C} \end{bmatrix} x + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\hat{D}_0^T \\ \hline \hat{D}_0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.3)$$

Poiché (cf fig. 3) è $V_2 = -R_2 I_2$, si ottiene

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}^T \\ \hat{C} \end{bmatrix} x + \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\hat{D}_0^T \\ \hline \hat{D}_0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ -R_2^{-1} V_2 \end{bmatrix} \\ \frac{dx}{dt} = \hat{A}x + [\hat{B} | \hat{C}^T] \begin{bmatrix} I_1 \\ -R_2^{-1} V_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

e quindi anche

(67)

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x + [\hat{B} \mid \hat{C}^T] \begin{bmatrix} I_1 \\ -R_2^{-1}(\hat{C}x + \hat{D}_0 I_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\hat{A} - \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{C})x + (\hat{B} - \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{D}_0) I_1 \\ V_2 = \hat{C}x + \hat{D}_0 I_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Se perciò la rete N caricata da R_2 deve stabilire la funzione di trasferimento $T(s)$ fra $I = I_1$ e V_2 , deve anche essere

$$T(s) = \hat{D}_0 + \hat{C} (sI - \hat{A} + \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{C})^{-1} (\hat{B} - \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{D}_0) \quad (4.5)$$

Normiamo ora al problema di sintesi e supponiamo che $T(s)$ abbia la realizzazione minima $\Sigma = (A, B, C, D_0)$. Se è possibile determinare quattro matrici $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}_0$ tali che sia

$$\begin{aligned} \hat{D}_0 &= D_0 \\ \hat{C} &= C \\ \hat{A} - \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{C} &= A \\ \hat{B} - \hat{C}^T R_2^{-1} \hat{D}_0 &= B \\ \hat{A} + \hat{A}^T &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

allora:

1. il sistema

$$\Sigma = \left(\hat{A}, [\hat{B} \mid \hat{C}^T], \begin{bmatrix} \hat{B}^T \\ \hat{C} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -\hat{D}_0^T \\ \hat{D}_0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

soddisfa il lemma P.R., e quindi la sua funzione di trasferimento è realizzabile come impedenza di un $(m' + m'')$ -bipolo

2. tale $(m' + m'')$ -bipolo, chiudendo le m'' porte su R_2 , dà allora luogo alla funzione di trasferimento (4.5) e quindi a $T(s)$.

Soddisfare le prime quattro relazioni in (4.6) è immediato, ponendo $\hat{A} = A + C^T R_2^{-1} C$ e $\hat{B} = B + C^T R_2^{-1} D_0$. Rimane solo

da scegliere la realizzazione Σ di $T(s)$ in modo tale che sia (68)

$$\hat{A} + \hat{A}^T = A + A^T + 2C^T R_2^{-1} C \leq 0 \quad (4.7)$$

Se consideriamo l'equazione in K

$$KA + A^T K = -2C^T R_2^{-1} C - Q \quad (4.8)$$

ed osserviamo che, per l'ipotesi fatte sui poli di $T(s)$, $\operatorname{Re} \lambda(A') < 0$, per il lemma 3 di III.7 (4.8) ammette un'unica soluzione, qualunque sia Q , e per $Q > 0$ tale soluzione è certamente definita positiva per il lemma di Lyapunov.

Detta P la soluzione definita positiva, si pone

$$P = M^T M$$

con M invertibile, e si costruiscono le matrici

$$A' = M A M^{-1}, \quad B' = M B, \quad C' = C M^{-1}.$$

È immediato verificare che la realizzazione $\Sigma' = (A', B', C', D_0)$ di $T(s)$ soddisfa la

$$A' + A'^T + 2C'^T R_2^{-1} C' \leq 0$$

così che basterebbe, per soddisfare la (4.6) partire dalla realizzazione Σ' .

7. Il lemma di Darlington.

In questo paragrafo proveremo una fondamentale procedura "classica" di sintesi di funzioni P.R., dovuta a Darlington, che ha carattere di lemma nei riguardi delle sintesi dei filtri.

Occorrerà tuttavia premettere alcune considerazioni complementari sulle strutture delle funzioni positive reali che torneranno utili nel corso della dimostrazione.

Def. 1. Date una funzione

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definita in tutto il piano di Gauss ad eccezione, eventualmente, di un numero finito di punti, si pone

$$\begin{aligned} \text{Ev } f(s) &= \frac{1}{2} (f(s) + f(-s)) \\ \text{Od } f(s) &= \frac{1}{2} (f(s) - f(-s)) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Ev f ed Od f sono dette rispettivamente la parte pari e la parte dispari di f .

Se f è un polinomio, la sua parte pari è la somma dei monomi di grado pari, la sua parte dispari è la somma dei monomi di grado dispari.

Se f è una funzione razionale, la si scrive separando parte pari e parte dispari del numeratore e del denominatore

$$f(s) = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} \quad (7.2)$$

con m_1, m_2 polinomi pari ed n_1, n_2 polinomi dispari.

Allora si ottiene

$$\begin{aligned} \text{Ev } f(s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)} + \frac{m_1(-s) + n_1(-s)}{m_2(-s) + n_2(-s)} \right) = \\ &= \frac{m_1(s)m_2(s) - n_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)} \\ \text{Od } f(s) &= \frac{m_2(s)n_1(s) - m_1(s)n_2(s)}{m_2^2(s) - n_2^2(s)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

osservando che $\bar{m}_i(s) = m_i(-s)$, $m_i(s) = -m_i(-s)$.

(70)

In particolare, se la funzione razionale f ha coefficienti reali, per $s = j\omega$ $\text{Ev } f$ è reale ed $\text{Od } f$ è puramente immaginario, così che

$$\begin{aligned} \text{Re } f(j\omega) &= \text{Ev } f(j\omega) = \frac{m_1(j\omega)m_2(j\omega) - m_1(j\omega)m_2(j\omega)}{m_1^2(j\omega) - m_2^2(j\omega)} \\ j \text{Im } f(j\omega) &= \text{Od } f(j\omega) = \frac{m_2(j\omega)m_1(j\omega) - m_1(j\omega)m_2(j\omega)}{m_1^2(j\omega) - m_2^2(j\omega)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

e dalle (7.4) si vede che il segno di $\text{Re } f(j\omega)$ e di $\text{Im } f(j\omega)$ dipende soltanto dal numeratore delle (7.4), essendo il denominatore sempre non negativo:

$$\begin{aligned} m_1^2(j\omega) - m_2^2(j\omega) &= [m_1(j\omega) - m_2(j\omega)][m_1(j\omega) + m_2(j\omega)] = \\ &= [m_1(j\omega)^* + m_2(j\omega)^*][m_1(j\omega) + m_2(j\omega)] = \\ &= |m_1(j\omega) + m_2(j\omega)|^2. \end{aligned}$$

E' immediata la prova della seguente proposizione

Prop. 1. Se $f(s)$ è una funzione positiva reale e se si esprime come in (7.2). Per ogni ω reale si ha allora

$$m_1(j\omega)m_2(j\omega) - m_1(j\omega)m_2(j\omega) \geq 0 \quad \square$$

Esercizio 1. Se $f(s)$ è funzione P.R., allora gli zeri immaginari di $m_1, m_2 - m_1 m_2$ hanno molteplicità pari.

Def. 2. Un polinomio $p(s)$ ^{monico} a coefficienti reali è detto **strettamente** di Hurwitz se i suoi zeri hanno tutti parte reale negativa.

Se $p(s)$ ha anche zeri immaginari semplici, esso viene detto polinomio di Hurwitz.

Se indichiamo con

- δ_i gli zeri reali negativi di $p(s)$
- $\alpha_j \pm j\beta_j$ gli zeri complessi con parte reale negativa di $p(s)$
- $\pm j\omega_k$ gli zeri immaginari (semplici) di $p(s)$

$p(s)$ ha la fattorizzazione

(7.5)

$$p(s) = \prod_{i,j,k} (s + \delta_i)^{\mu_i} (s^2 + 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\nu_j} (s^2 + \bar{\omega}_k^2) \quad (7.5)$$

oppure, se $p(s)$ ha anche lo zero nell'origine,

$$p(s) = \prod_{i,j,k} (s + \delta_i)^{\mu_i} (s^2 + 2\alpha_j s + \alpha_j^2 + \beta_j^2)^{\nu_j} (s^2 + \bar{\omega}_k^2) s \quad (7.6)$$

È allora facile concludere, tenuto conto che δ_i ed α_j sono numeri positivi, che

1. Se $p(s)$ ha almeno uno zero con parte reale negativa, allora tutti i suoi coefficienti sono positivi eccetto eventual-

mente il termine costante, che è nullo quando $p(s)$ ha uno zero nell'origine

2. Se $p(s)$ ha tutti gli zeri sull'asse immaginario, allora $p(s)$ è un polinomio pari o un polinomio dispari a seconda che non sia oppure sia presente lo zero nell'origine

Prop. 2 Se $W(s)$ è una funzione P.R., allora il numeratore e il denominatore, una volta eliminati i fattori comuni, sono polinomi di Hurwitz.

Se $W(s)$ è L.P.R., numeratore e denominatore sono l'uno un polinomio pari, l'altro un polinomio dispari completi⁽⁰⁾.

Se $W(s)$ è di minima fase, numeratore e denominatore sono entrambi polinomi completi

prova. Ricordando che $W(s)$ e $W'(s)$ sono entrambe P.R., è chiaro che numeratore e denominatore sono hurwitziani.

Se $W(s)$ è L.P.R., lo è anche $W'(s)$ e quindi i poli dell'una e dell'altra sono immaginari. Ne segue che numeratore e deno-

⁽⁰⁾ Un polinomio p di grado n è completo se tutti i suoi $n+1$ coefficienti sono non nulli. Un polinomio pari (dispari) di grado n è completo se sono non nulli tutti i coefficienti dei monomi pari (dispari)

minima o sia pari o dispari, e poiché $w(\infty)$ è nulla oppure infinita si ha che se l'uno è pari, l'altro è necessariamente dispari. La completezza è ovvia.

Se $W(s)$ è di minima fase, numeratore e denominatore hanno gli zeri per $\text{Re } s < 0$ e quindi sono entrambi completi. $\square$

Esercizio 1. Qual è la struttura del numeratore e del denominatore di $W(s)$ P.R. quando esso non è di minima fase e non è L.P.R.?

Prop. 3 Se $p(s)$ è un polinomio di Hurwitz e se m ed n designano le sue parte pari e la sua parte dispari, m/n (per $n \neq 0$) ed n/m (per $m \neq 0$) sono L.P.R.

prova. Basta limitarsi a provare la proposizione per m/n . Per la definizione di m ed n abbiamo

$$\frac{m}{n} = \frac{p(s) + p(-s)}{p(s) - p(-s)} = \frac{\frac{p(s)}{p(-s)} + 1}{\frac{p(s)}{p(-s)} - 1} \quad (7.7)$$

Dalla (7.5) (e analogamente si può ragionare per (7.6)) si trae:

$$|p(s)| = \prod_{i=1}^{\mu} |s + \delta_i|^{\mu_i} |s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2|^{\nu_i} |s^2 + \bar{\omega}_k^2|$$

$$|p(-s)| = \prod_{i=1}^{\mu} |-s + \delta_i|^{\mu_i} |s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2|^{\nu_i} |s^2 + \bar{\omega}_k^2|$$

È chiaro che risulta (ricordando che $\delta_i > 0$)

$$|s + \delta_i| > |-s + \delta_i| \quad \text{per } \text{Re } s > 0$$

$$|s + \delta_i| = |-s + \delta_i| \quad \text{per } \text{Re } s = 0$$

$$|s + \delta_i| < |-s + \delta_i| \quad \text{per } \text{Re } s < 0$$

Quindi, posto $s = \sigma + j\omega$,

$$|s^2 \pm 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2|^2 =$$

$$(\sigma^2 - \omega^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2 \pm 2\alpha_i \sigma)^2 + (2\sigma\omega \pm 2\alpha_i \omega)^2 =$$

$$= ((\sigma \pm \alpha_i)^2 + \beta_i^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 (\sigma \pm \alpha_i)^2 =$$

$$= (\sigma \pm \alpha_i)^4 + (\beta_i^2 - \omega^2)^2 + 2\beta_i^2 (\sigma \pm \alpha_i)^2 + 2\omega^2 (\sigma \pm \alpha_i)^2$$

dal che è evidente che $|s^2 + 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2|$ è maggiore, minore o eguale a $|s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2|$ a seconda che sia $\text{Re } s$ maggiore,

minore o eguale a zero.

Si conclude che per $\operatorname{Re} s > 0$ è

$$\left| \frac{p(s)}{p(-s)} \right| > 1$$

per $\operatorname{Re} s < 0$ è

$$\left| \frac{p(s)}{p(-s)} \right| < 1$$

ed infine per $\operatorname{Re} s = 0$ è

$$\left| \frac{p(s)}{p(-s)} \right| = 1$$

È evidente allora che gli unici punti in cui $\frac{m}{n}$ può avere un polo sono i punti dell'asse immaginario, in quanto in ogni altro punto (7.7) ha valore finito.

Posto poi $p(s)/p(-s) = u(s) + jv(s)$ (u e v funzioni reali di variabile complessa), si ha

$$\operatorname{Re} \frac{m(s)}{n(s)} = \operatorname{Re} \frac{u(s) + jv(s) + 1}{u(s) + jv(s) - 1} = \frac{u^2(s) + v^2(s) - 1}{(u^2(s) - 1)^2 + v^2(s)} \quad (7.8)$$

e poiché il denominatore dell'ultimo membro di (7.8) è non negativo, e per $\operatorname{Re} s > 0$ è $u^2(s) + v^2(s) = |p(s)/p(-s)|^2 > 1$, è verificata anche la condizione $\operatorname{Re} (m/n) \geq 0$ per $\operatorname{Re} s > 0$, che assicura che m/n sia P.R. È poi ovvio che m/n è senza perdite. $\square$

Prop. 4. Se $W(s)$ è una funzione positiva reale

$$W(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

e se i polinomi $m_1 + n_1$ ed $m_2 + n_2$ hanno al più come fattore comune un polinomio strettamente Hurwitziano, allora sono L.P.R.

$$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_1}{n_2}, \frac{m_2}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$$

(e ovviamente le inverse)

Per le funzioni $\frac{m_1}{n_1}$ ed $\frac{m_2}{n_2}$ la prova segue direttamente dalle

prop. 2 e 3. Per le altre funzioni la dimostrazione, non ovvia, è lasciata come esercizio (si veda, per es., Weinberg [We, 1]).

Teor. 5 (LEMMA DI DARLINGTON). Ogni funzione P.K. $Z(s)$ è sintetizzabile mediante un doppio bipolo reattivo reciproco in cascata con una resistenza di valore che può essere prefissato a piacere.

prova. Non è restrittivo supporre che $Z(s)$ sia di minima fase: infatti se non lo fosse, si potrà applicare il preambolo di Foster fino ad "avere" un doppio bipolo reattivo, in cascata al quale si collegherà un bipolo che sintetizzi una impedenza di minima fase. È chiaro che se $Z_H(s)$ è sintetizzabile con le procedure di Darlington, anche $Z(s)$ lo è. (in fig 1 N' è ottenuto col preambolo di Foster, N'' con le reti di Darlington, ed N unite =

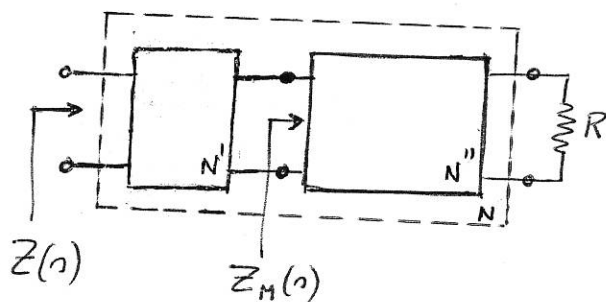


fig 1

l'asse allora $Z(s)$)

Allora, se $Z(s)$ non è una costante positiva (nel quel caso il problema è banale) e se indichiamo con m_1 ed n_1 (m_2 ed n_2) le parte pari e la parte dispari del numeratore (del denominatore), m_1, m_2, n_1, n_2 sono tutti polinomi non nulli, ed è

$$Z(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \quad (7.11)$$

Consideriamo inoltre un generico polinomio strettamente Hurwitziano (i.e. avente tutti gli zeri in $\text{Re } s < 0$) $Q(s) \in \mathbb{R}[s]$ che decomporremo ancora in parte pari e parte dispari:

$$Q(s) = m_0 + n_0 \quad (7.12)$$

L'impedenza $Z(s)$ si potrà scrivere allora nella forma

$$Z(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2} \frac{m_0 + n_0}{m_0 + n_0} = \frac{m'_1 + n'_1}{m'_2 + n'_2} \quad (7.13)$$

dove m'_1 ed m'_2 sono pari ed n'_1 ed n'_2 sono dispari:

$$m_1' = m_1 m_0 + n_1 m_0$$

$$m_2' = m_2 m_0 + n_2 m_0$$

$$n_1' = m_1 m_0 + n_1 m_0$$

$$n_2' = m_2 m_0 + n_2 m_0$$

(+5)

Si noti che m_1', m_2', n_1', n_2' sono tutti diversi da zero.

Supponiamo ora di aver sintetizzato $Z(s)$ con un doppio bipolo reattivo di matrice impedenze

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{12}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix}$$

chiuso su una resistenza di valore R (fig. 2)

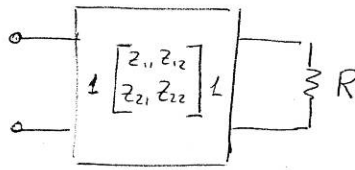


fig. 2

Avremo allora

$$Z(s) = Z_{11}(s) - Z_{12}(s) (Z_{22}(s) + R)^{-1} Z_{12}(s)$$

che può anche essere scritta nella forma

$$Z = Z_{11} \frac{1 + \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{11} R}}{1 + \frac{Z_{22}}{R}} \quad (7.14)$$

Se torniamo alla espressione (7.13) dell'impedenza da sintetizzare, si ha

$$Z(s) = \frac{m_1' + n_1'}{m_2' + n_2'} = \frac{m_1'}{m_2'} \frac{1 + \frac{n_1'}{m_1'}}{1 + \frac{n_2'}{m_2'}} = \frac{m_1'}{m_2'} \frac{1 + \frac{m_1'}{n_1'}}{1 + \frac{m_2'}{n_2'}} \quad (7.15)$$

Vediamo allora che se esiste un doppio bipolo reattivo reciproco la cui matrice impedenza soddisfa le relazioni (caso 1)

$$Z_{11} = \frac{m_1'}{n_2'} \quad , \quad Z_{22} = R \frac{m_2'}{n_2'} \quad , \quad \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{11}} = \frac{m_1'}{m_2'} R \quad (7.16)$$

oppure le relazioni (caso 2)

$$Z_{11} = \frac{n_1'}{m_2'} \quad , \quad Z_{22} = R \frac{m_2'}{m_2'} \quad , \quad \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2}{Z_{11}} = \frac{m_1'}{m_2'} R \quad (7.17)$$

questo doppio li può risolvere il problema, e le sue radici può (76)
essere eseguite con una delle tecniche esposte nel cap. X.

A) Osserviamo intanto che **nel caso 1** si ricave

$$Z_{12}^2 = R^2 \frac{m_1' m_2' - m_1' m_2'}{m_2'^2} \quad (7.18)$$

e **nel caso 2** si ricave invece

$$Z_{12}^2 = R^2 \frac{m_1' m_2' - m_1' m_2'}{m_2'^2} \quad (7.19)$$

Poiché la funzione $Z_{12}(s)$ deve essere razionale, i numeratori di (7.18) (o di (7.19)) devono essere quadrati di polinomi. Noi stabiliremo che è sempre possibile scegliere il polinomio strettamente Hurwitziano $Q(s)$ in modo che o

$$m_1' m_2' - m_1' m_2' \quad (7.20)$$

sia il quadrato di un polinomio pari a coefficienti reali o

$$m_1' m_2' - m_1' m_2' \quad (7.21)$$

o il quadrato di un polinomio dispari a coefficienti reali. Cominciamo con l'operare che risulta

$$m_1' m_2' - m_1' m_2' = (m_1 m_2 - m_1 m_2) (m_0^2 - m_0^2) \quad (7.22)$$

ed esaminiamo la struttura degli zeri di

$$m_1 m_2 - m_1 m_2 \quad (7.23)$$

Questi zeri possono essere di quattro tipi:

1. complessi: in questo caso, se p è uno zero, sono zeri anche $\bar{p}$, $-p$, $-\bar{p}$. Tali zeri possono avere molteplicità qualsiasi.
2. reali non nulli: se p è uno zero, anche $-p$ è uno zero. Nulla si può dire sulla molteplicità.
3. immaginari non nulli: se p è uno zero, anche $\bar{p}$ è uno zero. Essi hanno molteplicità pari per l'esercizio 1.
4. l'origine può essere uno zero, ovviamente di molteplicità pari.

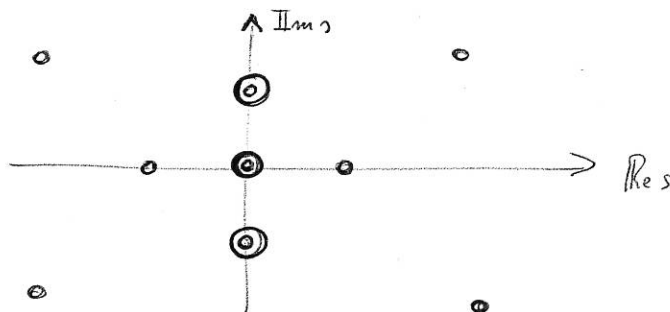


fig. 3

Costruiamo allora $Q(s) = m_0 + n_0$ strettamente orizzontale, imponendogli di avere tutte le radici semplici, e coincidenti con le radici di moltiplicità dispari di $m, m_2 - n, n_2$ che sono situate in $\text{Re}(s) < 0$.

È chiaro che $(m_0 - n_0)$ possiede radici semplici, coincidenti con le radici di moltiplicità dispari di $m, m_2 - n, n_2$ situate in $\text{Re}(s) > 0$ e che di conseguenza il polinomio (a coefficienti reali)

$$(m, m_2 - n, n_2) (m_0 - n_0) (m_0 + n_0) = (m', m'_2 - n', n'_2) \quad (7.24)$$

ha esclusivamente radici di moltiplicità pari e può essere scritto nella forma:

$$K \prod_j (s - p_j)^{2j} = m'_2 m'_2 - n'_2 n'_2 \quad (7.25)$$

Utilizzando $(n_0 - m_0)$ anziché $(m_0 - n_0)$ si ottiene invece

$$-K \prod_j (s - p_j)^{2j} = n'_2 n'_2 - m'_2 m'_2 \quad (7.26)$$

È chiaro che uno fra i polinomi (7.25) e (7.26) è quadrato di un polinomio a coefficienti reali: (7.25) se K è positivo, (7.26) se K è negativo. Il criterio di scelta fra l'applicazione del "caso 1" o del "caso 2" può essere allora quello di verificare il segno di K .

Si può peraltro osservare che se nel polinomio $m, m_2 - n, n_2$ l'origine ha moltiplicità multipla di 4, ψ è necessariamente polinomio pari (basta considerare la struttura delle sue radici) mentre se l'origine ha moltiplicità $4n+2$ (n intero), allora ψ è polinomio dispari. Poiché il coefficiente del monomio di grado massimo in ψ^2 proviene da $m'_2 m'_2$ o da $n'_2 n'_2$ a seconda che ψ sia pari o dispari e poiché $m'_2 m'_2$ ed $n'_2 n'_2$ hanno coefficienti non negativi, si conclude che ψ è radice di (7.25) o di

pure di (7.26), e che si ricade nel "caso 1" o nel "caso 2" a seconda della molteplicità dell'origine nel polinomio $m_1 m_2 - n_1 n_2$ (7.28)

B) Ci resta da verificare che le funzioni

$$Z_{11} = \frac{m_1'}{m_2'} ; \quad Z_{12} = R \frac{\sqrt{m_1' m_2' - n_1' n_2'}}{n_2'} ; \quad Z_{22} = R \frac{m_2'}{m_1'} \quad (7.27)$$

nel caso 1, oppure le funzioni

$$Z_{11} = \frac{n_1'}{m_2'} ; \quad Z_{12} = R \frac{\sqrt{n_1' m_2' - m_1' n_2'}}{m_2'} ; \quad Z_{22} = R \frac{m_2'}{n_1'} \quad (7.28)$$

nel caso 2, danno luogo ad una matrice L.P.R.

Limitiamoci al "caso 1", il "caso 2" provandosi in modo analogo.

Per la prop. 4, Z_{11} e Z_{22} sono L.P.R.: quindi hanno poli in $\mathbb{C}$ semplici.

Quanto a Z_{12} , da $Z_{12}^2 = \left(Z_{22} - \frac{1}{Y_{22}} \right) Z_{11}$, si vede facilmente che

i poli di Z_{12} non ricercati fra quelli di Z_{11} e fra quelli di $\left(Z_{22} - \frac{1}{Y_{22}} \right)$. Dalla $Y_{22} = \frac{m_1'}{m_2'}$, anch'esse L.P.R. per la prop. 4, si vede che i poli di Z_{12} sono immaginari. Poiché i poli di Z_{11} sono semplici e così pure quelli della differenza $Z_{22} - \frac{1}{Y_{22}}$ (esercizio), i poli di Z_{12}^2 non possono superare la molteplicità 2, e quelli di Z_{12} sono semplici.

Queste considerazioni provano che i poli della matrice $Z(s)$ sono tutti semplici ed immaginari.

E' anche facile verificare, tenendo conto delle parità e delle disparità dei polinomi, che $Z(s) + Z^T(-s) = 0$.

Per concludere che $Z(s)$ è L.P.R., ci resta da dimostrare che sussiste la condizione sui residui, ossia che nel generico polo $j\bar{\omega}$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{m_1'(j\bar{\omega})}{\frac{d}{ds}(m_2'(j\bar{\omega}))} \cdot \frac{m_2'(j\bar{\omega})}{\frac{d}{ds}(m_2'(j\bar{\omega}))} - \frac{m_1'(j\bar{\omega})m_2'(j\bar{\omega}) - n_1'(j\bar{\omega})n_2'(j\bar{\omega})}{\left[\frac{d}{ds}(m_2'(j\bar{\omega})) \right]^2} = \\ & = \frac{n_1'(j\bar{\omega})n_2'(j\bar{\omega})}{\left[\frac{d}{ds}(m_2'(j\bar{\omega})) \right]^2} \geq 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Le (7.9.9) è soddisfatta come eguaglianza in quanto $j\bar{\omega}$ è polo della matrice $Z(s)$ ed è uno zero del polinomio m_2 . (79)

8 Inten di alcune funzioni di trasferimento di doppi bipoli.

(80)

Considereremo ora alcune classiche procedure di ^{reciproca} inten per la funzione di trasferimento di un doppio bipolo.

L'ingresso può presentarsi sotto forme diverse: generatore di tensione I_1 senza impedenze sensa, generatore di corrente E_1 senza ammettente parallelo, generatore di tensione con impedenza serie (0, il che è lo stesso, generatore di corrente con ammettente parallelo). In quest'ultimo caso, l'impedenza del generatore è di solito supposta resistiva.

Quanto all'uscita, essa può essere chiusa in corto circuito, aperta, chiusa su una resistenza di utilizzazione non nulla. Denotando con V_2 ed I_2 la tensione e la corrente sulla porta di utilizzazione, la funzione di trasferimento $T(s)$ sarà, a seconda dei casi, uno dei seguenti rapporti:

$$\frac{V_2(s)}{E_1(s)}, \frac{I_2(s)}{E_1(s)}, \frac{V_2(s)}{I_1(s)}, \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$

A) GENERATORE IDEALE E ASSENZA DI CARICO IN USCITA

$$A1. \quad T(s) = V_2(s) / I_1(s)$$

L'ingresso è un generatore di corrente privo di ammettente parallelo, e si assume come uscita la tensione $V_2(s)$ quando la porta 2 è aperta.



Se $Z_{12} = Z_{21}$ designa l'elemento non diagonale della matrice simmetrica Z del doppio bipolo N da utilizzare, deve essere $T(s) = Z_{12}(s)$.

Le inten, quando $T(s)$ ha tutti poli immaginari semplici, si può compiere con un traliccio (cf X. 7).

$$A.2 \quad T(s) = V_2(s)/E_1(s)$$

(81)

L'ingresso è un generatore ideale di tensione, privo di impedenza serie, e l'uscita la tensione $V_2(s)$ con la porta 2 aperta.

Faremo vedere che $T(s)$ è realizzabile con un doppio bipolo reciproco reattivo se e solo se, scritto $T(s)$ nella forma

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (8.1)$$

con N e D polinomi a coefficienti reali, primi fra loro,

- a. $D(s)$ è hurwitziano
- b. $N(s)$ e $D(s)$ sono pari
- c. $\deg N \leq \deg D$

Diamo per scontato il risultato intuitivo (che proveremo nelle porte dedicate all'analisi delle reti) che le matrici ibride di reti reattive sono L.P.R. ed indichiamo con $H(s)$ la matrice ibride del doppio bipolo N da sintetizzare (ingresso E_1 e J_2).

Poiché $T(s)$ coincide con $H_{21}(s)$, è ovvio che $D(s)$ ha solo zeri immaginari, e quindi D è pari oppure disperso, hurwitziano. Inoltre, da $-H_{12} = H_{21}$ si ha nei poli le matrici hermitiane semidefinite positive dei residui hanno struttura

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Quindi, H_{21} non può avere poli nell'origine e all'infinito, perché le corrispondenti matrici dei residui ^{ai} sono reali e simmetriche: si deduce che $\deg N \leq \deg D$ e che $D(s)$ è pari. Nei poli non reali in fine H_{21} ha residui immaginari: in corrispondenza alle coppie di poli $\pm j\bar{\omega}_i$ nello sviluppo in frazioni parziali di H_{21} si incontra

$$\frac{j|\gamma|}{s - j\bar{\omega}_i} + \frac{-j|\gamma|}{s + j\bar{\omega}_i} = \frac{-2\bar{\omega}_i |\gamma|}{s^2 + \bar{\omega}_i^2}$$

e quindi si ottiene che $N(s)$ è polinomio pari. Quindi a. b. c. sono verificate.

Supponiamo viceversa nostre a. b. c., e costruiamo un polino: (82)
 mio dispari di Hurwitz $Q(s)$ per cui D/Q sia L.P.R.

Se $\pm j\omega_1, \pm j\omega_2, \dots, \pm j\omega_n$ sono le radici di $D(s)$, con

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_n,$$

si definisce Q tramite le sue radici $0, \pm j\omega'_1, \dots, \pm j\omega'_{n-1}, (\pm j\omega'_n)$,

con

$$\omega_1 < \omega'_1 < \omega_2 < \dots$$

Ricordando X.4 probl. 2, si ha subito che D/Q è L.P.R.

Se riusciamo a costruire un doppio bipolo reattivo reciproco

con $Z_{11} = D/Q$ e $Z_{12} = N/Q$, le sintesi sono complete.

Poiché Z_{11} è L.P.R. e Z_{12} ha gli stessi poli di Z_{11} , se gli zeri di N sono immaginari le sintesi si può compiere con reti a

scala. In ogni caso è facile verificare che i residui di Z_{12} nei poli immaginari sono reali (oltre che nell'origine e all'infinito) e quindi le matrici

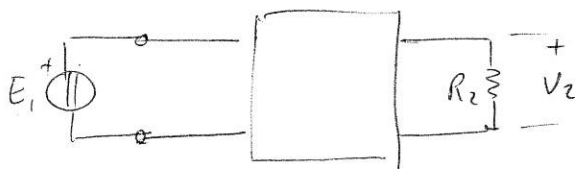
dei residui possono essere sempre completate con l'elemento di posto (2,2) in modo da risultare semi-definite positive. Si costruisce allora Z_{22} a partire dalle componenti di posto (2,2) nelle matrici dei residui. Le sintesi si

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix}$$

si compie con uno dei metodi già noti ⊗

B) GENERATORE IDEALE E PRESENZA DI CARICO

Si dà un generatore ideale di tensione E , ed una resistenza di utilizzazione R_L . Si domanda di inserire fra il generatore e la resistenza un doppio bipolo reattivo reciproco che realizzi la funzione di trasferimento assegnata $T(s)$, con $T(s) = V_L/E$,



Non cercheremo, per semplicità, di stabilire condizioni per cui il problema ammetta soluzione: faremo l'ipotesi che i dati non siano contraddittori e la sintesi sia possibile.

Un metodo impiegato è quello di considerare la matrice ammettenza del doppio bipolo:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

Si ha allora

$$\mathbf{I}_2 = Y_{12} \mathbf{E}_1 + Y_{22} \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_2 = -R_2 \mathbf{I}_2$$

da cui

$$\mathbf{V}_2 / \mathbf{E}_1 = T = Y_{12} / (Y_{22} + R_2^{-1})$$

Se R_2 è unitaria (e ciò si può sempre ridurre normalizzando gli elementi di $\bar{Y}$ rispetto ad R_2^{-1}) si ha

$$T(s) = \frac{-Y_{12}(s)}{Y_{22}(s) + 1}$$

Se $T(s)$ è $N(s)/D(s)$, con N e D privi di fattori comuni, e se decomponiamo $D(s)$ come $m(s) + n(s)$ (m pari e n dispari), si ottiene

$$T(s) = \frac{N/n}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{N/m}{1 + \frac{n}{m}} = \frac{-Y_{12}}{1 + Y_{22}}$$

Il problema sarà risolto se si può costruire un doppio bipolo reciproco per cui sia

$$Y_{22} = m/n, \quad Y_{12} = -N/n$$

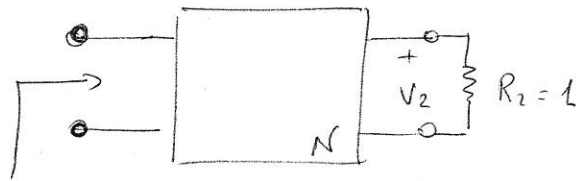
oppure

$$Y_{22} = \frac{n}{m}, \quad Y_{12} = -N/m$$

Esempi saranno dati in sede di esercitazioni

Spesso il problema proposto non ha come specifico di partenza l'assegnazione diretta della funzione $T(s)$, bensì della funzione $|T(j\omega)|^2$. (84)

Se indichiamo con $Y_1(s)$ l'ammettenza di ingresso del doppio bipolo cercato, caricato su $R_2 = 1$, la potenza ^{reale} entrante



$$T = V_2 / E_1$$

$$Y_1(s)$$

attraverso la porta 1 in regime sinusoidale permanente è

$$E_1^2 \operatorname{Re} Y_1(j\omega)$$

mentre quella uscente dalla porta 2 vale, sempre in regime sinusoidale permanente, è

$$|V_2(j\omega)|^2$$

e poiché N è bipolo reattivo deve essere

$$E_1^2 \operatorname{Re} Y_1(j\omega) = |V_2(j\omega)|^2$$

Si legge quindi l'ammettenza Y_1 alla funzione T :

$$|T(j\omega)|^2 = \operatorname{Re} Y_1(j\omega) \quad (8.4)$$

Il problema sarà risolto costruendo un doppio bipolo reattivo chiuso su una resistenza unitaria, la cui ammettenza di ingresso Y_1 soddisfi la condizione (8.4).

I passi da compiere sono dunque i seguenti:

1. Ricavare da (8.4) la struttura di $Y_1(s)$
2. Sintetizzare col metodo di Darlington l'impedenza $Z_1(s) = 1/Y_1(s)$.

In questo modo risulta individuata una via per realizzare un doppio bipolo reattivo a partire dalle sue caratteristiche di trasferimento (cioè in sostanza a partire dalle

le caratteristiche filtranti) non appena si sia determinate (85)
una procedura per ricavare $\mathcal{I}_1(s)$ dalla sua parte reale.

Il problema che allora affrontiamo è quello di individuare condizioni necessarie e sufficienti perché una funzione razionale di ω si possa interpretare come parte reale di una funzione P.R.

Supponiamo che $W(s)$ sia P.R., e la scriviamo al solito nella forma

$$W(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

Si ha allora

$$\mathcal{E}_0 W(s) = \frac{1}{2} (W(s) + W(-s)) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}$$

ed, in particolare

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \mathcal{E}_0 W(j\omega)$$

Si noti che, quando si siano estratti i poli immaginari di $W(s)$, ponendo

$$W(s) = W_I(s) + W_N(s)$$

(W_I si riferisce ai poli immaginari, W_N ha poli con parte reale negativa), risulta

$$\operatorname{Re} W(j\omega) = \operatorname{Re} W_N(j\omega)$$

Quindi $\mathcal{E}_0 W(s) = \mathcal{E}_0 W_N(s)$ e in definitiva $\mathcal{E}_0 W(s)$ non può avere poli immaginari. Abbiamo così provato la prima parte del

Teor. 1. Se $W(s)$ è P.R., $\operatorname{Re} W(j\omega)$ soddisfa le condizioni seguenti:

$$1. \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \dots + \alpha_{2n} \omega^{2n}}{\beta_0 + \beta_2 \omega^2 + \dots + \beta_{2n} \omega^{2n}}$$

$$2. \operatorname{Re} W(j\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \text{ reale}$$

$$3. \operatorname{Re} W(j\omega), \text{ continuata come funzione analitica ponendo}$$

$$s = j\omega, \text{ non ha poli immaginari}$$

Viceversa, se $R(\omega)$ è una funzione che soddisfa 1. 2. 3., allora esiste $W(s)$ P.R. tale che $R(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$

$$R(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$$

(8.5) (86)

prova della seconda parte (metodo di Brune Gewertz). Costruiremo una funzione P.R. $W(s)$ priva di poli sull'asse immaginario e tale da soddisfare (8.5).
Se è

$$R(\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \dots + \alpha_{2n} \omega^{2n}}{\beta_0 + \beta_2 \omega^2 + \dots + \beta_{2n} \omega^{2n}} = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}$$

si deve avere $n \leq 1$ per l'ipotesi 3.

La funzione incognita $W(s)$, scritta sotto la forma

$$\frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n} = \frac{m_1(s) + n_1(s)}{m_2(s) + n_2(s)}$$

sono determinate quando si siano calcolati i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$.

Dalle $B(\omega^2)$ si ottiene $B(-s^2)$ per continuazione analitica, e poiché è

$$B(\omega^2) = [m_2(j\omega) + n_2(j\omega)][m_2(j\omega) - n_2(j\omega)]$$

si ha

$$B(-s^2) = [m_2(s) + n_2(s)][m_2(s) - n_2(s)] \quad (8.6)$$

Il polinomio $(m_2 + n_2)$ ha per radici quelle per $\operatorname{Re} s < 0$: se designiamo con $p_1, p_2, \dots, p_r$ le radici di $B(-s^2)$, scriveremo ^(o)

$$m_2 + n_2 = \prod_{\operatorname{Re} p_i < 0} (p - p_i) \quad (8.7)$$

$$m_2 - n_2 = \prod_{\operatorname{Re} p_i > 0} (p - p_i) \quad (8.8)$$

(8.7) determina allora il denominatore di $W(s)$ come polinomio hurwitziano in senso stretto.

I coefficienti del numeratore si determinano col metodo dei coefficienti indeterminati, identificando la funzione assegnata $R(\omega)$ con la funzione

(o) pensato come polinomio in s .

$$\operatorname{Re} \frac{a_0 + j\omega a_1 + \dots + (j\omega)^s a_s}{b_0 + j\omega b_1 + \dots + (j\omega)^s b_s}$$

(87)

La funzione razionale $W(s)$ che così si ottiene ha tutti poli con parte reale negativa, ed inoltre $\operatorname{Re} F(j\omega) = R(\omega) \geq 0$. Dunque $W(s)$ è P.R. $\square$

Esercizio 1. Si provi che se $\bar{W}(s)$ è un'altra funzione P.R. che soddisfa la condizione $\operatorname{Re} \bar{W}(j\omega) = R(\omega)$, allora la funzione

$$\Delta(s) = \bar{W}(s) - W(s)$$

è L.P.R. Di conseguenza si otterranno tutte le funzioni P.R. aventi parte reale assegnata sull'asse immaginario aggiungendo alla funzione $W(s)$ ottenuta nel teor 1 una generica funzione L.P.R.

9. Applicazioni alle sintesi dei filtri

88

Con riferimento all'inserzione di un doppio bipolo tra un generatore ed un utilizzatore, si presenta spesso il problema di trasferire potenza dall'ingresso all'uscita senza attenuazione in una certa gamma di frequenze, volendo che nella gamma complementare il trasferimento sia trascurabile.

Il filtro è allora un doppio bipolo per il quale si fissano certe condizioni sul comportamento del modulo della funzione di trasferimento $T(s)$ (relative a predeterminate condizioni di inserzione) sull'asse immaginario, senza formulare condizioni alcuna sullo sfasamento corrispondente.

Di solito la gamma di frequenze in cui vi è trasferimento è costituita da uno o più intervalli, denominati bande passanti, mentre gli intervalli complementari si dicono bande oscure. Gli estremi delle bande passanti si dicono frequenze di taglio.

I tipi di filtri di uso corrente sono

- i filtri passa basso: la banda passante è un intervallo $[0, \omega_s]$, $\omega_s \neq \infty$.

- i filtri passa alto: la banda passante è un intervallo $[\omega_i, +\infty)$, $\omega_i \neq 0$ [sono i "duali" dei precedenti]

- i filtri passa banda: la banda passante è un intervallo $[\omega_i, \omega_s]$, $\omega_i \neq 0$, $\omega_s \neq \infty$

- i filtri elimina banda: la banda passante è composta di due intervalli: $[0, \omega_i]$ ed $[\omega_s, +\infty)$ con $0 < \omega_i < \omega_s < \infty$. [sono i "duali" dei precedenti].

Nella fig 1 sono riportate, nell'ordine, le caratteristiche "ideali" di tali filtri. In realtà, esse non corrispondono ad alcun filtro "reale" dato che nessuna funzione razionale ha un andamento eguale a quello delle caratteristiche stesse.

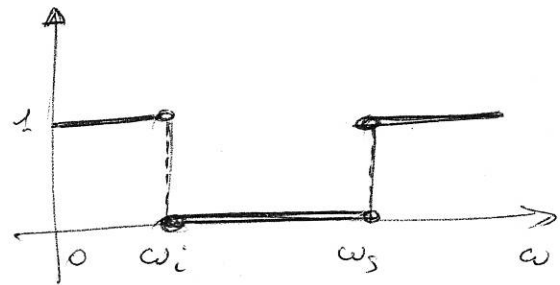
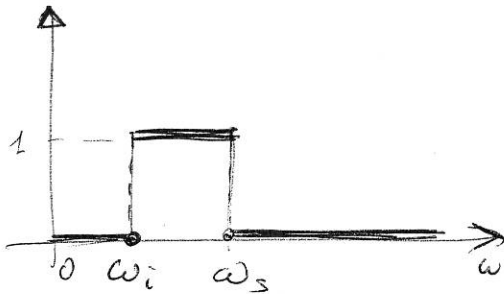
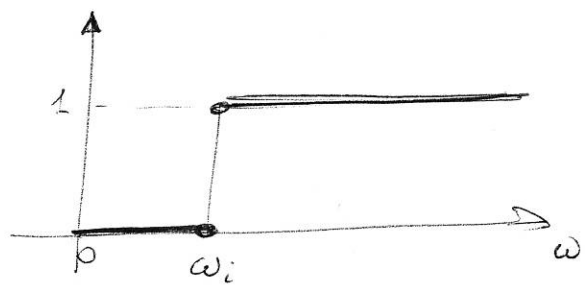
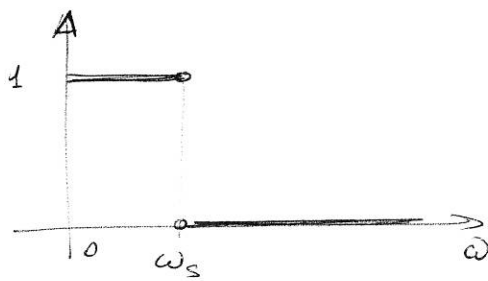


fig 1.

Il problema di approssimare con funzioni regolari gli andamenti di fig 1 può essere affrontato in vari modi, a seconda del criterio che si assume per valutare la bontà dell'approssimazione.

A) FILTRI PASSABASSO NORMALIZZATI DI BUTTERWORTH

Approssimiamo le curve del passabasso ideale, e si dicono

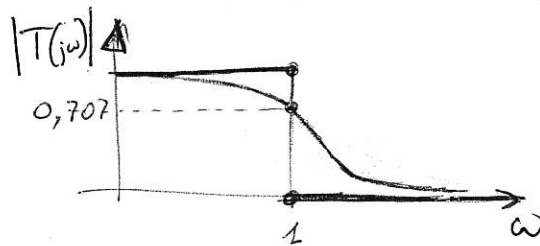


fig 2

normalizzati perché si assume $\omega_s = 1$. La funzione $|T(j\omega)|^2$ ha la struttura

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.1)$$

della funzione di Butterworth. Al variare di n , si ottengono le funzioni di Butterworth del primo, del secondo, - - ordine.

Val la pena osservare che

$$1. \text{ per ogni } n \quad |T(0)| = 1, \quad |T(1)| = 0.707, \quad |T(\infty)| = 0$$

2. $|T(j\omega)|$ decresce comunque al crescere di ω .

3. Al crescere di n , cresce il numero delle derivate di (9.1) nulle nell'origine e cresce la pendenza della curva per $\omega=1$ (al divergere di n , le curve tendono alle "maschere" del paraboleso ideale)

Per sintetizzare il filtro, si dovrà ricavare $T(s)$ da $|T(j\omega)|^2$ e poi procedere con la tecnica di Darlington.

Dato la particolare struttura della funzione, l'ottenimento di $T(s)$ è piuttosto facile: dal denominatore $1 + \omega^{2n} = B(\omega^2)$, si ottiene $B(-s^2) = 1 + (-s^2)^n$. Gli zeri di $1 + (-s^2)^n$ sono

$$p_k = e^{j \frac{2k-1}{n} \frac{\pi}{2}} \quad \text{se } n \text{ è pari}$$

$$p_k = e^{j \frac{2k}{n} \frac{\pi}{2}} \quad \text{se } n \text{ è dispari}$$

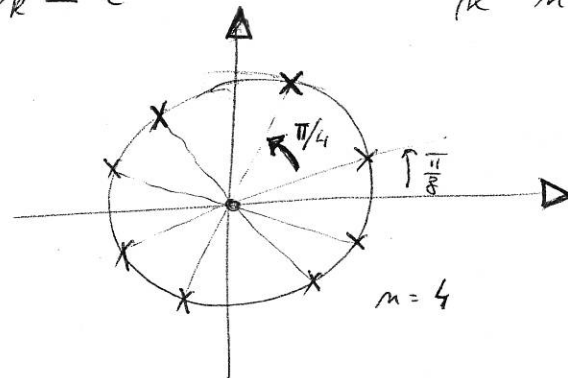
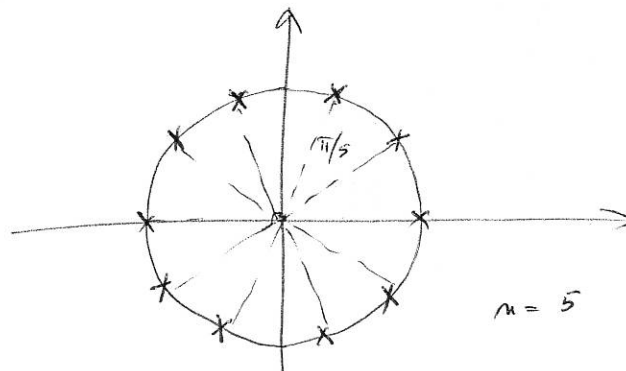


fig. 3

n pari

Questi zeri sono dislocati sul cerchio unitario, sono separati da $\frac{\pi}{n}$ radianti, e per n pari il primo ha una fase di $\pi/2n$, per n dispari una fase nulla.

Inoltre sono sempre simmetrici rispetto all'asse immaginario.



n dispari

fig. 4

nono e nessuno zero è sull'asse immaginario.

È evidente che $|T(j\omega)|^2$ è parte reale di qualche funzione P.R.

3) FILTRI PASSABASSO NORMALIZZATI DI CEBICHEFF (91)

Un'altra funzione che è usata per approssimare le caratteristiche ideali del passabasso normalizzato ha la struttura seguente

$$|T'(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (9.2)$$

dove $C_n(\omega)$ è il polinomio di Cebicheff di ordine n ed ε è una costante positiva compresa fra zero ed uno: $0 < \varepsilon < 1$.

I polinomi di Cebicheff sono definiti dalla relazione di ricorrenza

$$C_{n+1}(z) - 2z C_n(z) + C_{n-1}(z) = 0 \quad (9.3)$$

e dall'assegnamento iniziale $C_0 = 1$, $C_1 = z$

Senza entrare nei dettagli della teoria dei polinomi di Cebicheff, ne ricordiamo alcune notevoli proprietà

1. Gli zeri di $C_n(z)$ sono tutti reali, distinti, compresi fra -1 e $+1$.
2. Sull'intervallo $[-1, +1]$

$$|C_n(z)| \leq 1$$

Risultando

$$C_n(1) = 1 \quad \forall n$$

$$C_n(-1) = (-1)^n$$

I valori $+1$ e -1 sono complessivamente raggiunti da C_n ($n+1$) volte sull'intervallo $[-1, 1]$

3. Fuori dall'intervallo $[-1, 1]$ è $|C_n(z)| > 1$, ed è

$$\lim_{z \rightarrow \infty} C_n(z) = \infty$$

In tav. 1 è riportato l'andamento di $C_n(z)$ per $n = 2, 3, 4, 5$.

Se consideriamo ora come i polinomi $C_n(z)$ giocano nelle (9.2), l'andamento delle $|T(j\omega)|^2$ è quello di fig 5

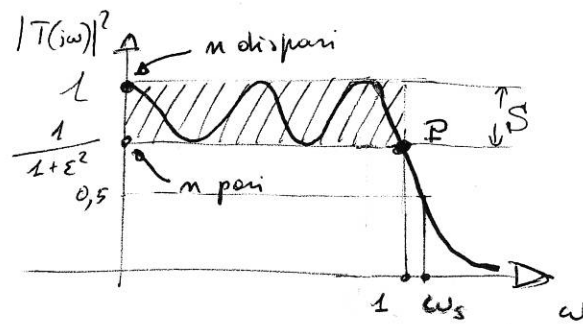


fig. 5

Si noti che

1. Il massimo valore di $|T(j\omega)|^2$ è l'unità e si ha nei punti dove $C_n(\omega)$ si annulla.
In particolare, per $\omega = 0$, se n è dispari è $C_n(0) = 0$.
2. Il minimo valore di $|T(j\omega)|^2$ nell'intervallo $[0, 1]$ è $1/(1+\varepsilon^2)$.
Esso viene raggiunto per quei valori di ω per cui $|C_n(\omega)| = 1$.
In particolare, per $\omega = 0$, se n è pari è $|C_n(0)| = 1$ e qualunque sia n è $C_n(1) = 1$. Quindi tutte le curve passano per il punto P e restano confinate nelle strisce S per ω compreso fra 0 ed 1.
3. Per $\omega > 1$ le curve $|T(j\omega)|^2$ decresce, e tende a zero per $\omega \rightarrow \infty$ come $\varepsilon^2 C_n^2(\omega)$.
4. Per $\varepsilon \ll 1$, $|T(j\omega)|^2 = 0,5$ si ha per $\omega \approx \cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Quindi, per n fissato, quanto più piccolo si fine ε tanto più piccola è l'oscillazione nelle bande passanti, ma ciò si paga a spese del taglio alle alte frequenze, che risulta meno netto.

Per passare alle sintesi del filtro, occorre determinare una funzione P.R. di cui $|T(j\omega)|^2$ sia parte reale.

La teoria dei polinomi di Chebyshev consente di stabilire che la funzione analitica $1/(1+\varepsilon^2 C_n^2(-js))$, continuazione analitica di $|T(j\omega)|^2$ ha i poli disposti su un'ellisse i cui assi sono

sull'asse reale e sull'asse immaginario del piano di Gauss

(93)

Il semiasse maggiore, appoggiato all'asse immaginario, ha lunghezza $\cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$, il semiasse minore, appoggiato all'asse reale, ha lunghezza $\sinh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$.

I fuochi sono per $\omega = \pm 1$.

Se normalizziamo la frequenza del filtro di Cebiceff per il fattore $\cosh\left(\frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\epsilon}\right)$, cosicché la frequenza di taglio si ha per $\omega = 1$, è possibile dimostrare che i poli di $1/(1+\epsilon^2 C^2(j\omega))$ si ricorrono da quelli della funzione di Butterworth secondo la costruzione di figura

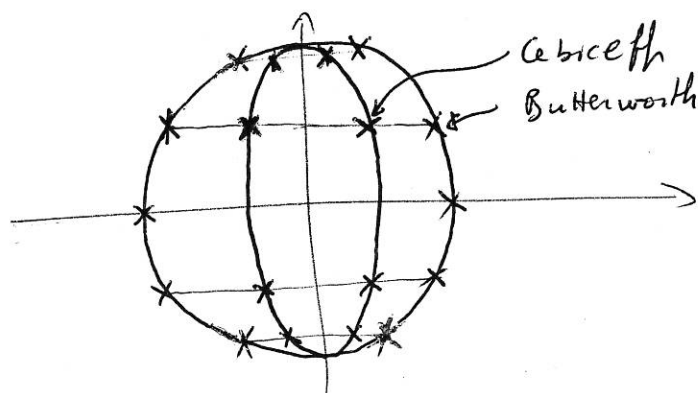


fig 6

Quindi $1/(1+\epsilon^2 C^2(-j\omega))$ non ha poli immaginari, e $|T(j\omega)|^2$ è parte reale di una funzione P.R.

C) SINTESI DEI FILTRI DI BUTTERWORTH E CEBICEFF.

- Con i metodi descritti nel par. 8, da $|T(j\omega)|^2$ si ricava

$$B(-s^2) = 1 + (-s^2)^n \quad (\text{Butterworth})$$

$$B(-s^2) = 1 + \epsilon^2 C_n^2(-j\omega) \quad (\text{Cebiceff})$$

- Si fattorizza $B(-s^2)$ nelle forme

$$B(-s^2) = [m_1 + n_1][m_2 - n_2]$$

dove $m_1 + n_1$ include i poli con parte reale negativa, $m_2 - n_2$ quelli con parte reale positiva.

(La struttura di $m_1 + m_2$, per vari valori di ε ed n , è tabulata in 94 numeri test.).

- Si ricava il numeratore col metodo dei coefficienti indeterminati e si ottiene con la funzione

$$Y_1(s) = \frac{m_1 + n_1}{m_2 + n_2}$$

- Si mettezza $Z_1(s) = 1/Y_1(s)$ col metodo di Serlington.

11. Trasformazioni di frequenza.

(95)

È possibile ricondurre il calcolo di un filtro qualsiasi al calcolo di un filtro passabasso normalizzato usando una operazione detta "trasformazione di frequenza".

La teoria della trasformazione di frequenza si fonda sul seguente

Teor. 1 Se $W(s)$ e $H(s)$ sono funzioni positive reali, allora

$U(s) = W(H(s))$ è ancora funzione P.R.

Se $W(s)$ è sintetizzata come impedenza del bipolo N ,

$W(H(s))$ si può sintetizzare come impedenza sostituendo in N alle induttanze di valore L bipoli di impedenza $LH(s)$ e alle capacità di valore C bipoli di ammettenza $CH(s)$.

La prova è lasciata come esercizio. □

Diremo che abbiamo effettuato una "trasformazione di frequenza" definita dalle relazioni

$$s \mapsto H(s) \quad (11.1)$$

Esercizio 1. Se W ed H sono L.P.R., $W(H(s))$ è L.P.R.

A) FILTRO PASSABASSO NON NORMALIZZATO

Se adottiamo la trasformazione

$$s \mapsto Ks \quad K \in \mathbb{R}_+$$

le induttanze del filtro sono moltiplicate per K , e così pure le capacità:

$$\begin{aligned} L &\mapsto KL \\ C &\mapsto KC \end{aligned}$$

Se quindi il filtro da cui partiamo è un filtro p.b. normalizzato,

La banda passante del nuovo filtro è divisa per K , in quanto (96)
il valore della funzione di trasferimento in ω nel vecchio
filtro ora si ottiene per ω/K .

B) FILTRO PASSAALTO.

Si consideri la trasformazione

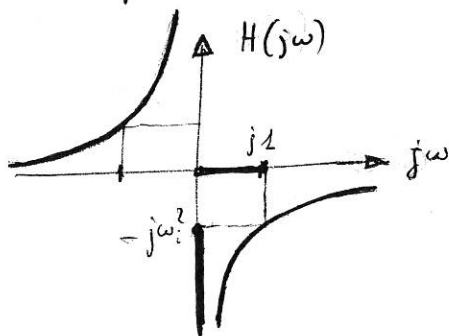
$$s \mapsto \frac{A^2}{s}$$

Un'induttanza di impedenza sL diventa un polo
di impedenza $\frac{L A^2}{s}$, ed una capacità di impedenza
 $1/sC$ diventa una impedenza di valore $s/C A^2$. Quindi
all'induttanza L si sostituisce un condensatore di valore
 $1/L A^2$ e al condensatore C un'induttanza di valore
 $1/C A^2$.

Se è $s = j\omega$, la trasformazione opera nel modo seguente

$$H : j\omega \mapsto -j \frac{A^2}{\omega}$$

così che ai punti dell'asse immaginario fra 0 e $j1$ corri-



ispondono i punti dell'asse immaginario fra $-jA^2$ e $-j\infty$, ed i
valori assunti da $T(j\omega)$ per $\omega \in [0, 1]$ sono i valori
assunti dalla funzione di trasferimento per pulsazioni fra
 A^2 e $+\infty$: in particolare, le pulsazioni di taglio si
fra in A^2 (se il filtro da cui si parte è p.b. normalizzato).

c) FILTRO PASSABANDA

(97)

Si consideri la trasformazione

$$H: s \mapsto A^2 s + \frac{B^2}{s}$$

Si verifichi facilmente che $H(\cdot)$ è PR: un'induttanza L viene trasformata in un circuito risonante serie, e una capacità C in un circuito antirisonante secondo le relazioni

$$L \rightarrow L A^2 + \frac{L B^2}{s} = Z_L$$

$$C \rightarrow C \frac{A^2}{s} + \frac{C B^2}{s} = Y_C$$

Osserviamo che sull'asse immaginario si ha

$$H: j\omega \mapsto A^2 j\omega + \frac{B^2}{j\omega} = j \left(A^2 \omega - \frac{B^2}{\omega} \right)$$

Si osservi che si cerchiamo qual è l'intervallo di frequenze in cui $|A^2 \omega - B^2/\omega|$ è minore di 1, abbiamo trovato la banda del nuovo filtro. Da

$$-1 \leq A^2 \omega - \frac{B^2}{\omega} \leq 1$$

si ottiene, per $\omega > 0$

$$\omega^2 - \frac{B^2}{A^2} - \frac{\omega}{A^2} \leq 0$$

$$\omega^2 - \frac{B^2}{A^2} + \frac{\omega}{A^2} \geq 0$$

Le soluzioni sono l'intervallo $\left[\frac{-\frac{1}{A^2} + \sqrt{\frac{1}{A^4} + \frac{4B^2}{A^2}}}{2}, \frac{\frac{1}{A^2} + \sqrt{\frac{1}{A^4} + \frac{4B^2}{A^2}}}{2} \right]$

da cui, se $[\omega_i, \omega_s]$ denota l'intervallo di trasmissione, si ricavano A^2 e B^2 a partire da ω_i ed ω_s :

$$\omega_s - \omega_i = \frac{1}{A^2}$$

$$\omega_i \omega_s = \frac{B^2}{A^2} = B^2 (\omega_s - \omega_i)$$

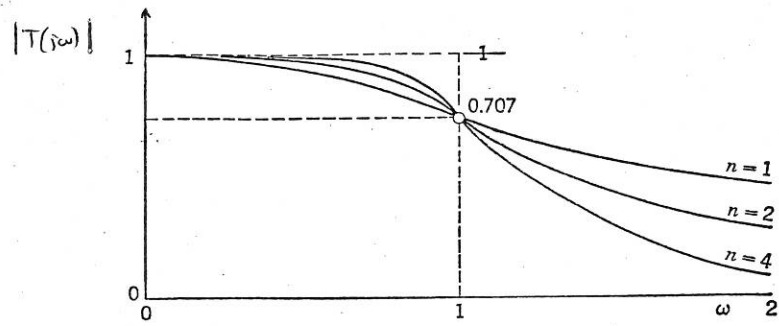
Per cui, si verifica che la trasformazione $H: s \mapsto \frac{2A^2 s}{s^2 + \omega^2}$ consente di ottenere da un filtro p.b. normalizzato un filtro elimina banda.

98

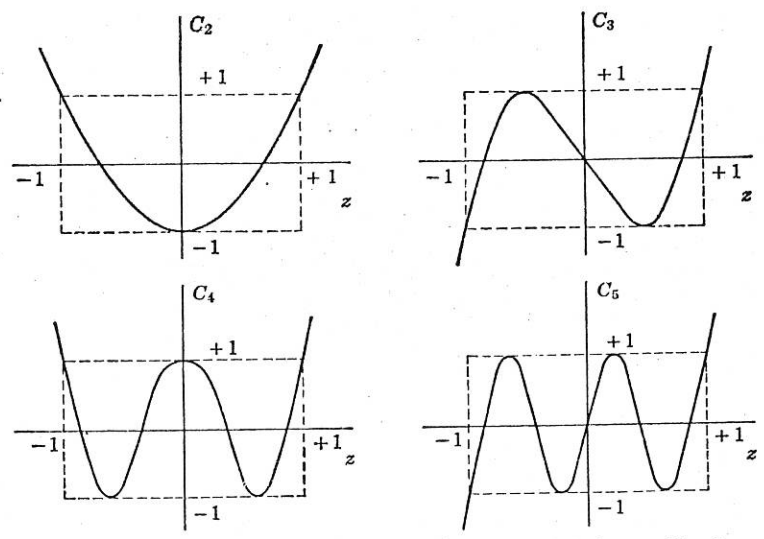
Si determini come dipende la banda passante del filtro dai parametri A^2 ed ω^2

D) CAMBIAMENTO D'IMPEDENZA D'USCITA.

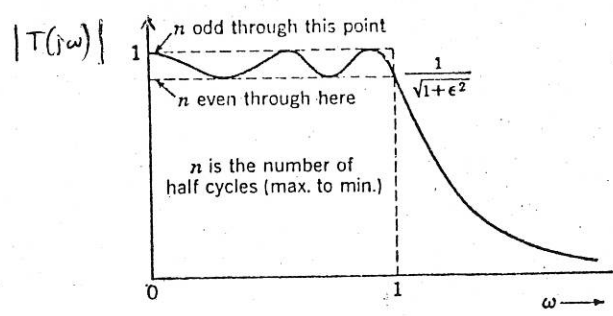
Se in sostituzione di $R_2 = 1\Omega$ si introduce R_2 generico, vanno moltiplicate per R_2 tutte le reattanze del precedente manovellato, (esercizio).



The form of the Butterworth response for $n = 1$, $n = 2$, and $n = 4$. All curves have the value 1 at $\omega = 0$, and 0.707 at $\omega = 1$.



Plots of the behavior of Chebyshev polynomials for small values of $|z|$. Four orders of polynomials are shown.



Several identifying features of the Chebyshev magnitude response are shown.