

1. Grafi finiti

1.1 Definizioni

Def 1. Un grafo finito G è una coppia (X, U) , dove

- (i) X è un insieme finito di elementi $\{x_1, \dots, x_n\}$ detti vertici o nodi.
- (ii) U è un insieme finito di elementi $\{u_1, \dots, u_m\}$ appartenenti al prodotto cartesiano $X \times X$, detti archi.
- (iii) Un elemento $(x, y) \in X \times X$ può apparire più di una volta in U , ed in tal caso l'indice specifica quale arco si considera.

Intuitivamente, un grafo è un insieme di punti, ed una famiglia di archi orientati che li congiungono.

Non hanno importanza la posizione dei punti, né la forma degli archi, ma solo le relazioni di incidenza che vengono stabilite.

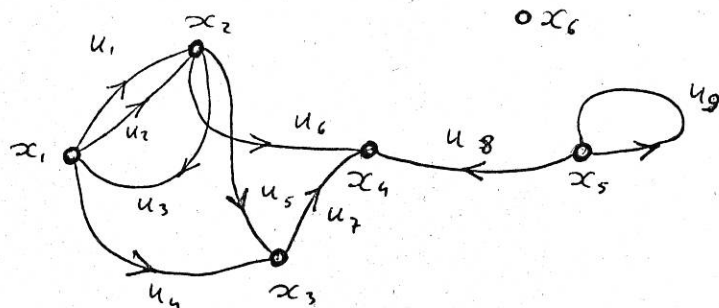


fig 1

Def 2. Il numero dei vertici si dice ordine del grafo G e si indica con $|G|$.

In fig 1, $|G| = 6$

Def 3. Se $u = (x, y)$ è un arco di G , x si dice origine, ed y termine dell'arco, ed x è antecedente di y , y successivo di x .

Gli archi del tipo (x, x) si dicono cappi.

Def 4. Una vertice si dice isolato se non è contenuto in nessun arco.

Spero non interessi l'orientazione degli archi: in tal caso
dice allora la definizione di multigrafo, o grafico non orientato

Def 5 Un multigrafo G è una coppia (X, L) , dove

- (i) X è un insieme finito di elementi $\{x_1, \dots, x_n\}$ detti vertici o nodi.
- (ii) L è un insieme finito di elementi $\{l_1, \dots, l_e\}$ detti lati, ciascuno dei quali è una coppia non ordinata di elementi di X
- (iii) tali coppie non ordinate possono figurare in L più d'una volta (distinte fra loro dall'indice)

Si estendono ai multigrafi le definizioni di ordine e di coppia.

Def 6 Un multigrafo è semplice se

- (i) non ha coppie
- (ii) ogni coppia di vertici è congiunta, al più, da un lato

Def 7 Il numero dei lati di un multigrafo che incidono in un vertice x è il grado di x .

Def 8 Due lati di un ^{mult}igrafo sono in serie se hanno in comune un vertice, e tale vertice è di grado 2; sono in parallelo se hanno per estremi gli stessi vertici.

Def 9 Un grafo $G' = (X', U')$ è sottografo di $G = (X, U)$ se $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$. Indicheremo questo fatto con $G' \leq G$.

Se U' è la totalità degli archi di U con origine e termine in X' , G' si dice sottografo di G generato da X' e si indica con $\langle X' \rangle$.

Se X' è la totalità dei vertici di X appartenenti a qualche arco di U' , G' si dice sottografo di G generato da U' , o grafo parziale generato da U' , e si indica con $\langle U' \rangle$.

Il complementare di $G' = (X', U')$ è $\langle U - U' \rangle$.

È' ovvio come far corrispondere in modo naturale ad un grafo 13
un multigrafo: basta "togliere" l'orientazione agli archi.

Non è univoco, invece, il passaggio da un multigrafo ad un grafo.

Def 10 In un multigrafo G , una catena μ è una sequenza di
lotti

$$\mu = (l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_q})$$

in cui ogni lotto ha un estremo in comune
col lotto precedente ~~mentre l'altro estremo~~
~~ha in comune col lotto successivo l'altro estremo.~~

q si dice lunghezza di μ .

Il numero di volte con cui il lotto l figura in μ
si dice molteplicità di l in μ .

Def 10' In un grafo G , una sequenza di archi è una catena
se tale è la corrispondente sequenza di lotti nel mul-
tigrafo associato.

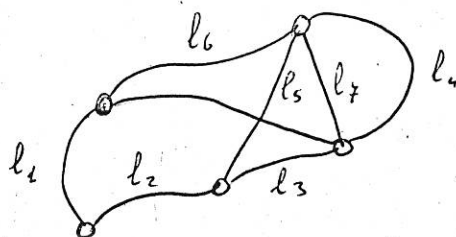


fig 2

$$\mu = (l_1, l_6, l_5, l_5, l_4, l_2, l_5)$$

Def 11 Una catena è semplice se ogni lotto che vi figura ha
molteplicità 1, è detta elementare se non "incontra"
lo stesso vertice più di una volta. Una catena
elementare sarà detta "cammino".

Def 12 Un ciclo è una catena

- (i) semplice
- (ii) con gli estremi coincidenti

Un ciclo elementare è talora detto "circolo"

Def 13 In ogni catenanga, e in ogni circuito diverso da un cappio, esistono
due "orientamenti". Se $\mu = (l_1, \dots, l_q)$ è un cammino, e se x_{i-1} ,
 x_{i+1} sono gli estremi di l_i , si hanno due orientamenti distinti:

~~Def 14. Siano $G = (X, U)$ e $G' = (X', U')$ due grafi~~

14

$$\vec{\mu}_1 = (x_{i_1} l_1 x_{i_2} l_2 x_{i_3} \dots x_{i_{q+1}}); \vec{\mu}_2 = (x_{i_{q+1}} l_q x_{i_q} \dots x_{i_1})$$

Def 14. Siano $G = (X, U)$, $G' = (X', U')$ due grafi
 G e G' si dicono isomorfi se esistono due biezioni

$$\varphi: X \rightarrow X', \quad \psi: U \rightarrow U'$$

taffatte che, se x è origine ed y termine di un generico
arco di G , risultano $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ rispettivamente origine e
termine di $\psi(u)$.

Due grafi isomorfi sono intuitivamente lo "stesso" grafo, perché contengono
lo stesso numero di archi, lo stesso numero di vertici, e ergono le
medesime relazioni di incidenza, presso un opportuno ordinamento di
vertici ed archi.

Def 15. Siano $G = (X, E)$, $G' = (X', E')$ due multigrafi
 G e G' si dicono isomorfi se esistono due biezioni

$$\varphi: X \rightarrow X', \quad \psi: E \rightarrow E'$$

taffatte che, se x, y sono gli estremi di un generico lato l ,
risultano $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$ estremi di $\psi(l)$.

E' ovvio che, se due grafi sono isomorfi, tali restano i multigrafi corri-
spondenti. Il viceversa - in generale - non vale.

Spero - d'ora in poi - si parlerà - differenziando di grafi e multigrafi,
in quanto si farà riferimento a questioni per cui l'orientamento degli
archi è irrilevante.

Con parleremo di "lati di un grafo" intendendo "lati del multigrafo
associato", etc. -

1 Def. Un grafo (od un multigrafo) G sono connessi se ogni coppia di vertici è "connesso" da almeno un ~~cammino~~ cammino!

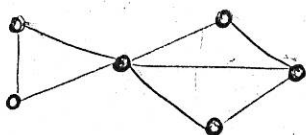
È ovvio che ogni catena di un grafo, in quanto sottografo, è connessa.

La relazione di connessione è una relazione di equivalenza sull'insieme dei vertici X , in quanto è riflessiva (si include ~~esso~~, fra ~~le~~ cammini, quel lo ~~moto~~), è simmetrica e transitiva.

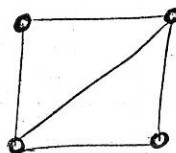
Pertanto esse ripartisce X in classi disgiunte $X_1, X_2, \dots, X_c$; i sotto-grafi generati da X_k ($k=1, 2, \dots, c$) sono connessi, e sono massimali, rispetto alla proprietà di essere connessi, nell'insieme dei sotto-grafi di G : essi vengono chiamati le componenti connessi di G .

2 Def. Un grafo G è non separabile se ogni suo grafo parziale proprio G' ha almeno due vertici in comune col complementare (cioè col grafo parziale generato dai lati che non sono in G').

È ovvio che i grafi non connessi ^{e privi di punti isolati} sono separabili: il viceversa non è vero, in generale.



connesso - separabile



connesso - non separabile

3 Def. Un vertice x è un vertice di taglio (cut-vertex) se esistono due grafi propri complementari non vuoti, di cui x sia l'unico vertice comune.

4 th. In un grafo connesso G , condizione sufficiente perché un vertice x sia di taglio è che ci siano due vertici y, z distinti da x , tali che ogni cammino fra y e z passi per x . La condizione è anche necessaria, se G è privo di cappi.

Prova. Se x è vertice di taglio, in G connesso e senza cappi, e G', G'' sono grafi propri complementari, aventi in comune solo il vertice x , sarà sufficiente scegliere y in G' e z in G'' .

Viene, se G_y il sottografo di G generato dal vertice y e dai vertici di G che si connettono ad y con un cammino che non passa per x .

Il grafo complementare G_2 contiene almeno ~~il~~ vertice z .
 Essi hanno in comune con G_y soltanto il vertice x . Se per assurdo $t \neq x$ fosse vertice di G_y e di G_2 , esisterebbe un lato $l \in G_2$ di estremi t, u : u non è vertice di G_y altrimenti $l \in G_y$, e ciò è impossibile perché G_y e G_2 sono complementari.

Tra u ed y esiste allora un cammino che non passa per x : ciò è assurdo, stante la costruzione di G_y . $\square$

5 Def Un grafo è ciclicamente connesso se ogni coppia di vertici è contenuta in qualche ~~subgrafo~~ circuito.

6 Th Se G un grafo contenente almeno due archi e privo di cappi.

Si equivalgono le seguenti proposizioni:

- (i) G è ciclicamente connesso
- (ii) G è non separabile e privo di punti isolati
- (iii) G non contiene vertici di taglio ed è connesso
- (iv) per ogni tripla di vertici x, y, z , esiste un cammino ~~tra~~ di estremi x e z , e di vertice intermedio y .

Prove (i) $\Rightarrow$ (ii) Se G fosse separabile, siano $G' = (X', U')$ e $G'' = (X'', U'')$ due grafi parziali complementari, per cui valgono le:

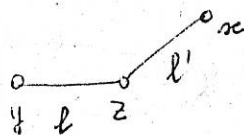
$$\begin{aligned} U' \cap U'' &= \emptyset & U' \cup U'' &= U & U', U'' &\neq \emptyset \\ |X' \cap X''| &\leq 1 & X' \cup X'' &= X & X', X'' &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Ogni cammino fra un vertice di X' ed uno di X'' ha un vertice in $X' \cap X''$ [se $x_1, x_2, \dots, x_k$ sono, in successione, i vertici di un cammino, con $x_1 \in X'$, $x_k \in X''$, e se x_j è il primo vertice ad essere in X'' , se $x_j \notin X'$, il lato $x_{j-1}x_j$ non sta in U' né in U'' : assurdo].

Allora $X' \cap X''$ consta di un solo vertice (di taglio) t , e G non è ciclicamente connesso perché tutti i cammini tra X' ed X'' passano per t .

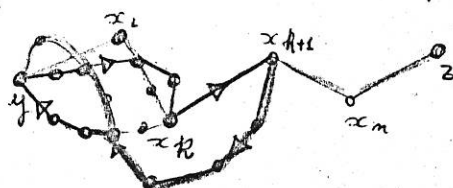
(ii) $\Rightarrow$ (iii) dalle def. 2 e 3

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se G non fosse ccl. connesso, sono y e z due suoi vertici che non possono far parte di alcun cammino di G .
Se y e z appartengono ad un lato l , e se l' è un altro lato del grafo, ~~non incidente~~ incidente in uno dei vertici y, z , ~~per~~ per



in z , allora z è vertice di taglio, come si vede usando il th. 4.

Se y e z non sono estremi di alcun lato del graf, ne $y, x_1, \dots, x_n, z$
 la sequenza dei vertici di un cammino ~~non può essere~~ che y e z

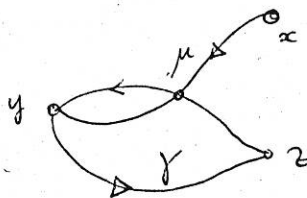


Se nessun circuito contiene y ed x_1 , il lemmma è già stato provato.

Altamente sia x_k l'ultimo vertice che può far parte di un ciclo contenente y : proviamo che ogni cammino fra y ed x_{k+1} passa per x_k - dopo di che la conclusione segue dal l. 4

Se - per assurdo - μ un cammino fis y ed x_{k+1} , non passante per x_k , e
 sia γ un ciclo passante per y ed x_k . Partendo da x_{k+1} , si segue μ
 finché non si esce γ per la prima volta, si prosegue lungo γ fino a
 raggiungere y e, se per lungo γ fino a raggiungere x_{k+1} : per aver descritto un
~~cammino~~ ciclo volte utilizzare il lato $[x_k x_{k+1}]$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Sia μ un cammino fra x ed y e γ un ciclo passante per y e z .



Alors, portés de z , ni presque l'age μ finis α - l'œuvre y par la première
valte: de qui, l'age y , n'va finis ni y e par ni z .

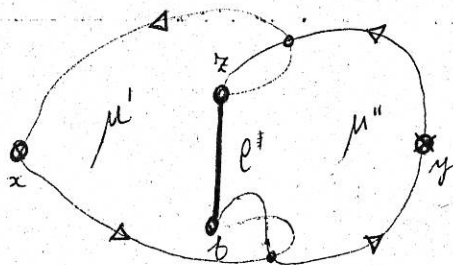
(iv) $\Rightarrow$ (i) *obvio.*

Esercizio: non è vero in generale - che in un grafo ciclicamente connesso due vertici arbitrari stiano in un ~~unico~~ cammino.

7 Def. Un grafo parziale $G' \subseteq G$ è una componente non separabile se non è separabile, ed è massimale rispetto a tale proprietà.

8 Th. Le componenti non separabili di un grafo sono prive di lotti in comune, e danno quindi una partizione disgiunta dell'insieme dei lotti del grafo.

Prove Siano G' e G'' due componenti non separabili distinte, e sia, per assurdo, il loro ℓ comune ad entrambe.
 Si vuol far vedere che il grafo parziale generato da G' e G'' è ciclicamente connesso, e quindi non separabile, ciò che contrasta con la massimalità di G' e G'' .



Se x, y sono due vertici di $\langle G', G'' \rangle$, la prova è immediata se entrambi sono contenuti in G' o in G'' .

Se $x \in G'$, $y \in G''$ sia μ' un cammino in G' da z ad x a t e sia μ'' un cammino in G'' da z ad y a t . È facile convenire, con ragionamenti simili a quelli del th. 6, che è possibile costruire un cammino percorso per x ed y . $\square$

9 Coroll. La decomposizione di un grafo $G = (X, \ell)$ in componenti non separabili è unica.

Prove Siano $\{G^{(1)}, \dots, G^{(n)}\}$ ed $\{H^{(1)}, \dots, H^{(m)}\}$ due decomposizioni, associate a due partizioni dei lotti $\{U^1, \dots, U^n\}$, $\{V^1, \dots, V^m\}$ e si considerino le intersezioni $U^j \cap V^k$ ($j = 1, 2, \dots, n$): una sola di esse non è vuota, e non è possibile supporre in verità oltre $U^1 \cap V^1$. Il th. 8 prova che $U^1 = V^1$. Ragionando analogamente su $U^2, \dots, U^n$, si perviene alla conclusione $\square$

È facile vedere che

10. Lemma

Le componenti non separabili ^{contenenti almeno due lati} di un grafo G sono grafi puziosi ciclicamente connessi, massimali, di G .

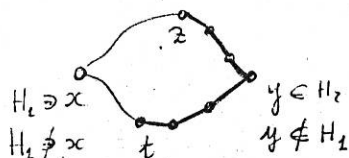
11. Proposizione

Due vertici x, y di un grafo G sono ciclicamente connessi

se e solo se sono contenuti nella stessa componente non separabile

Prova

Se x ed y appartengono ^{soltanto} a due componenti n.s. distinte, H_2 ed H_1 , rispettivamente, e se y è in ciclo per x ed y , siano z e t i primi vertici



in H_1 che, a partire da y , ne contiene lungo i due cammini di y : necessariamente $z, t \neq y$. L'addizione ad H_2 dei lati sul cammino $y \rightarrow z$ e $y \rightarrow t$ lascia ancora ciclicamente connessi H_1 : ciò è in conflitto colle sue massimalità

Terminabile nel prossimo capitolo che seguente.

Proposiz. 12

Un vertice non isolato x di un grafo G è vertice di taglio se e solo se i lati incidenti in x non sono contenuti in un'unica componente non separabile

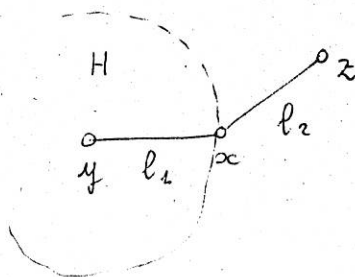
Prova.

Se x è vertice di taglio, esistono due grafi puziosi complementari G_1 e G_2 , aventi in comune il solo vertice x .

Esistono pertanto due lati l_1, l_2 , incidenti in x , il primo contenuto in G_1 , il secondo in G_2 .

Le componenti non separabili di G che contengono l_1 non possono contenere l_2 , altrimenti contenebbero x (che è vertice di taglio) e quindi sarebbero separabili.

Viceversa, se due lati l_1, l_2 , aventi in comune il vertice x , non sono contenuti nella stessa componente non separabile, x è di taglio. Siano infatti $y \neq z$ gli altri estremi di l_1 e



di l_2 , rispettivamente (se $y = z$, è facile provare che devono contenere le componenti non separabili di l_1 e di l_2): ogni cammino da z ad y passa per x , altrimenti z ed y sarebbero ciclicamente connessi. Basta allora applicare la prop. 11 per concludere

Operazione: la decomposizione di un grafo nelle sue componenti non separabili può "praticamente" ottenersi scomponendo il grafo in corrispondenza ai suoi vertici di taglio.

Nelle teorie delle reti elettriche di bipoli, si assume quasi sempre che il grafo delle rete sia non separabile; se è separabile, lo si può scomporre spezzando successivamente i vertici di taglio, onde che le tensioni e le correnti che interessano i singoli bipoli (comprendenti un lotto del grafo) non si modificano che tale tipo di operazione.

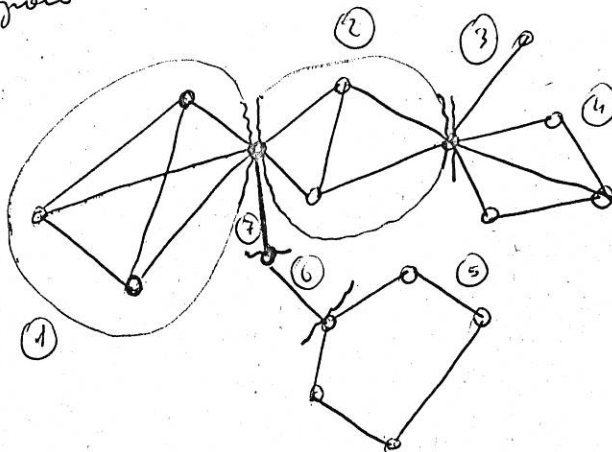


fig. 3

13 Def Nullità di un grafo G costituito da e lati, v vertici, c componenti connesse è, per definizione

$$v = e + c - v$$

[v viene anche detto, numero cicломattico, o primo numero di Betti]

Rango del grafo G è definito ~~dal~~ dalla

$$\rho = v - c$$

Si nota subito che

$$\rho + v = e$$

Def. 1. Un albero ~~completo~~ A di un grafo G è un sottografo

- (i) connesso
- (ii) privo di circuiti
- (iii) contenente tutti i vertici di G .

In molti testi, la definizione di albero fa riferimento solo ad (i) e (ii) mentre un albero per cui vale la (iii) viene detto completo. Noi, per semplicità (e poiché a meno delle reti servono sostanzialmente solo alberi completi), ci limiteremo alla def. 1.

~~Un albero completo di un grafo G è un albero A di G tale che A contiene tutti i vertici di G .~~

Th. 2. Un grafo è connesso se e solo se contiene un albero.

Prova Dalla def. 1 è immediato che se un grafo ha un albero, è connesso. Viceversa, se il grafo non è esso stesso un albero, contiene almeno un circuito. La rimozione di un lato di tale circuito lascia connesso il sottografo ottenuto, e dotato di tutti i vertici del grafo originario. Ripetendo un numero finito di volte tale operazione, si perviene ad un albero.

Prop. 3. Se un albero A contiene v vertici, contiene $v-1$ lati.

Prova Per induzione su v .

Se $v=2$, l'albero contiene un solo ~~completo~~ lato, altrimenti ci sarebbero due circuiti.

Se vale la prop. per $v=n$, e proviamola per $v=n+1$.

Supponiamo che l'albero contenga un vertice x di grado ≥ 2 , cioè un vertice cui fa capo soltanto un lato $[x, y]$. Rimuovendo ~~il lato~~ $[x, y]$ dall'albero, si ottiene un altro albero, per cui valgono le ipotesi induttive, e la conclusione è immediata. Il teorema sarà provato ~~per ipotesi~~ ~~induttiva~~ che ogni albero contiene almeno un vertice di grado 1: ~~questo è un fatto~~ o fatto di un facile esercizio [si veda la (ii) della def. 1].

Esercizio 3'. Se G è connesso, e se i lati di G sono e , i vertici sono al più $e+1$.

Def 4

Se G un graf con v vertici, e sia A un sottografo di G .

32

Si considerino le seguenti proposizioni:

- (i) A è connesso
- (ii) A non contiene cicli
- (iii) A contiene v vertici
- (iv) A contiene $v-1$ lati

Si possono assumere ad equivalenti definizioni di albero di G le seguenti: (i) (ii) (iii) oppure (i) (iii) (iv) oppure (ii) e (iv).

Prova

Se valgono (i) (iii) e (iv), A non contiene cicli. Se γ fosse ciclo di A , ~~contenerebbe~~ v vertici e v lati; aggiungendo necessariamente a γ i vertici mancanti di A e per ciascuno di essi un lato di A che lo congiunge al vertice in considerazione: tale lato esiste certamente, per la connessione. In tal modo si costruisce un sottografo di A , contenente v vertici e v lati: assurdo!

(ii) e (iv) $\Rightarrow$ (i) e (iii).

~~di A~~ Siano $A^{(1)} \dots A^{(c)}$ le ~~componenti~~ componenti connesse di A . Siano $v_1, \dots, v_c$ il numero dei vertici di $A^{(1)}, \dots, A^{(c)}$; è ovvio intanto che $\sum_{i=1}^c v_i = v$.

Inoltre, poiché A non contiene cicli, non ne contengono gli $A^{(i)}$ e quindi gli $A^{(i)}$ sono alberi di v_i vertici, e contengono $v_i - 1$ lati.

I lati di A sono allora $\sum_{i=1}^c (v_i - 1) = v - c$; assurdo se $c > 1$.

Allora A è albero di v vertici, e quindi contiene $v-1$ vertici, per le precedenti prop. 3. □

Def 5

Se A è un albero del graf G , il graf parziale complementare di A si dice coalbero.

Se aggiungiamo ad un albero A del graf G un lato del coalbero, il sottografo risultante non è più un albero: tale lato l , insieme al cammino (necessariamente unico!) che in A congiunge i vertici di l , dà luogo ad un circuito, ed anzi all'unico circuito del sottografo risultante.

Def 6

Se G è un graf connesso, ed A ne è un albero, si dice sistema fondamentale di circuiti quello ottenuto completando ciascun lato del coalbero di A col ~~rispettivo~~ cammino ~~unicamente determinato~~ di A che ha per estremi quelli di l .

~~Si può dimostrare che il numero di circuiti in un sistema fondamentale è uguale al numero di lati del coalbero di A .~~

... Sia $G = (X, U)$ un grafo connesso, e sia $|X| = v$, $|U| = e$

33

Sia $A = (X, V)$ un albero di G : e $|V| = v - 1$

Se $\tilde{A} = (X', U - V)$ è il coalbero di A , risulta $|U - V| = e - v + 1$, e tanti sono i componenti del sistema fondamentale di circuiti associato ad A . È ovvio che tale numero non dipende dalla particolare scelta di A .

Si noti che il numero dei circuiti ~~di un~~ sistema fondamentale è la nullità del grafo definita in § 1.2. ~~Il numero dei circuiti di un sistema fondamentale è la nullità del grafo.~~ Anche nel caso di grafi sconnessi è possibile interpretare la nullità in termini di sistemi fondamentali di circuiti.

Esercizio 7: dato un grafo G , sconnesso, si consideri un albero in ciascuna componente connessa di G : in tale insieme si definisce una "foresta" di G .

~~Per un grafo G si definisce la foresta di G come l'insieme di tutti i suoi circuiti.~~

- (i) ~~il numero dei lati di una foresta~~ il rango del grafo è il numero
(ii) ~~definire il concetto di sistema fondamentale di circuiti~~ definire il concetto di sistemi fondamentali di circuiti per il grafo sconnesso G
(iii) provare che la nullità ν di G è ancora la cardinalità di tale sistema.

Esercizio 8: un grafo G è una foresta se e solo se $\nu(G) = 0$

Esercizio 9: ~~qualunque sia G , $\nu(G) \geq 0$~~ qualunque sia G , $\nu(G) \geq 0$

Def 10 Un insieme di tagli (cut-set) in un grafo $G = (X, U)$ è un insieme di lati $Q \subseteq U$, ~~minimale rispetto a questa proprietà~~ per cui $\rho(X, U) = \rho(X, U - Q) + 1$, minimale rispetto a questa proprietà (con nessun sottoinsieme proprio di Q gode di questa proprietà).

Intuitivamente, un cut-set è — in un grafo connesso — un insieme di lati la cui soppressione provoca la sconnessione del grafo, mentre la soppressione soltanto di alcuni dei tali lati lascia il grafo connesso.

Esempio:

Esercizio 10: ogni cut-set è contenuto in un'unica componente connessa del grafo.

Teorema 11. In un graf. $G = (X, U)$

34

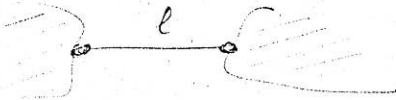
- (i) l'insieme dei lati incidenti in un vertice x è un cut set se e solo se tale vertice non è vertice di taglio.
- (ii) ~~un lato l appartiene ad un cut set se e solo se~~ un lato l appartiene ad un cut set se e solo se non è contenuto in alcun circuito.

Prova.

- (i) Se x non è di taglio, i lati incidenti sono contenuti in un'unica componente non separabile (cf. prop. 12, §42). È facile verificare che in una tale componente ~~la~~ la soppressione di tutti i lati incidenti in x non ne annulla la connessione, se si troncasse il vertice x che rimane isolato. La conclusione è immediata se ~~la~~ si tiene conto anche il vertice x , e si osserva che, lasciando anche un solo lato fra quelli incidenti in x , quest'ultimo rimane connesso alla propria componente d'origine.

Il viceversa è un facile esercizio (basta ~~osservare~~ ragionare sul numero delle componenti connesse ~~che~~ compari i vertici isolati).

- (ii) Se l non è contenuto in alcun circuito, la sua componente non separabile include soltanto l : se entrambi i ver-



tici di l appartengono ad altre componenti non separabili, sopprimendo l si aumenta di una unità il numero delle componenti connesse; negli altri casi si ottiene lo stesso risultato tenendo conto delle creazioni di vertici isolati.

Se l è contenuto in un circuito, è facile verificare che la soppressione di l non altera la connessione. □

Nella restante parte del paragrafo ci riferiremo ai graf. connessi, per cui si dà - com'è noto - la definizione di albero. Quanto si dirà può estendersi anche ai graf. non connessi, in modo spesso ovvio, tenendo conto del risultato dell'esercizio 10: occorrerà far riferimento alle foreste, anziché agli alberi.

Teorema 12. In un graf. connesso $G = (X, U)$, Q è cut set se e solo se è un insieme minimale che contiene almeno un lato di ogni albero di G .

Prove: Q sia minimale rispetto alla proprietà di contenere almeno un lato di ogni albero di G . 15

Il sotto ~~grafo~~ $(X, U-Q)$, non contiene alberi di G e quindi, ~~perché~~ ~~contiene~~ ~~tutti~~ ~~vertici~~ ~~di~~ ~~G~~ ~~non~~ ~~è~~ ~~connesso~~ ~~non~~ ~~è~~ ~~connesso~~.

~~non è connesso~~

È facile vedere che

$$\rho(X, U-Q) \leq \rho(G)$$

La minimalità di Q assicura che, riducendo Q di un lato, $U-Q$ conterrebbe un albero di G , $(X, U-Q)$ sarebbe connesso e di insieme di vertici X . Tanto basta a provare che Q è insieme di taglio.

Viceversa, se Q è cut-set, $(X, U-Q)$ non è connesso, e quindi Q contiene almeno un lato di ogni albero in G .

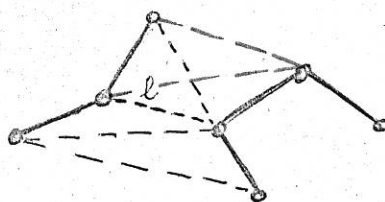
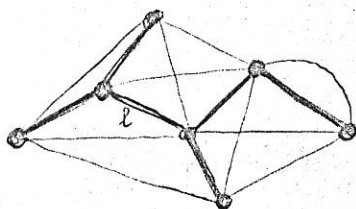
Se Q non fosse minimale rispetto a tale proprietà, si potrebbe considerare un insieme $Q' \subsetneq Q$, minimale: applicando la prima parte della prova, si arriva ad un assurdo. $\square$

In un grafo connesso $G=(X, U)$ un insieme di tagli Q partizione X in due insiemi Y_1 ed Y_2 , non vuoti e disgiunti: i vertici delle due componenti connesse del grafo $(X, U-Q)$. I lati di Q hanno un estremo in Y_1 , l'altro in Y_2 ; i lati di $U-Q$ hanno entrambi gli estremi in Y_1 oppure in Y_2 .

Viceversa se Y_1, Y_2 sono una partizione di X , tale che il sottografo generati da Y_1 e da Y_2 sono entrambi connessi, i lati di U che non entrano in nessuno dei due sottografi sono un cut-set: essi sono evidentemente i lati che hanno un estremo in Y_1 , l'altro in Y_2 .

Se A è un albero di $G=(X, U)$, e se l è un lato di A , $\{l\}$ è un cut-set di A , e partisce quindi X in due insiemi Y_1 ed Y_2 , nel senso ora detto.

I sottografi generati in G da Y_1 e da Y_2 sono connessi: un cut-set di G è perciò costituito da l e da tutti i lati del coalbero con un estremo in Y_1 e l'altro in Y_2 .



----- lati del cut-set

Def 13 Se G è un grafo connesso ed A è un albero di G , un sistema fondamentale di cut set è l'insieme dei cut set ottenuti aggiungendo ad un lato l di A i lati del coalbero che ripristinano ciascuna la connessione di $(X, A-l)$.

Ogni cut set ha almeno un lato in comune con A , un cut set del sistema fondamentale costruito a partire da A ha in comune con A solo un lato.

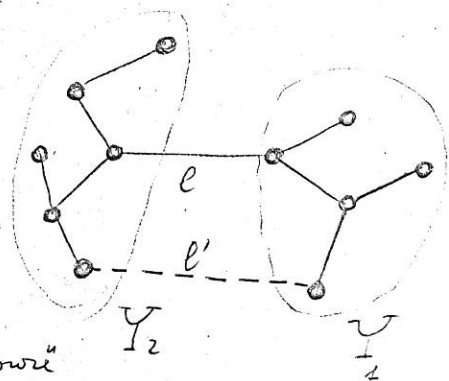
Analogamente, ogni circuito ha almeno un lato in comune col coalbero di A ; ogni circuito del sistema fondamentale costruito a partire da A ha in comune col coalbero solo un lato.

Se v sono i vertici di G , un sistema fondamentale di cut-set contiene $v-1$ cut-set, uno per ciascun ramo dell'albero cui ci si riferisce.

Lemma 14 Sia A un albero del grafo connesso G , e sia l un lato di A . Il cut set associato ad l è costituito, oltre che da l , dai lati del coalbero che includono circuiti contenenti l , nel sistema fondamentale di circuiti associato ad A .

Prova : È facile vedere che, se un lato l' del coalbero ed l appartengono allo stesso circuito del sistema fondamentale, l' ha un estremo in Ψ_1 e l'altro in Ψ_2 , ed è quindi contenuto nel cut-set.

Viceversa, se l' è nel cut-set, ha un estremo in Ψ_1 e l'altro in Ψ_2 : se $l' \neq l$, deve esserci un circuito (ogni lato del coalbero ne genera uno), e poiché l' fa "passare" da Ψ_2 ad Ψ_1 , proseguendo lungo il circuito si deve tornare ad Ψ_2 , ma ciò è possibile solo tramite l .



Esercizio 15 Un grafo parziale G' di un grafo connesso G fa parte di qualche albero se e solo se non contiene circuiti.

Esercizio 16 Un grafo parziale G' di un grafo connesso G fa parte di qualche coalbero se e solo se non contiene cut-sets.

Lemma 17

In ogni grafo G , un cut set e un ciclo hanno come un numero pari di lati.

Prova

E' sufficiente ragionare su grafi connessi, poichè cut-sets e cicli sono contenuti ciascuno in una sola componente connessa del grafo.

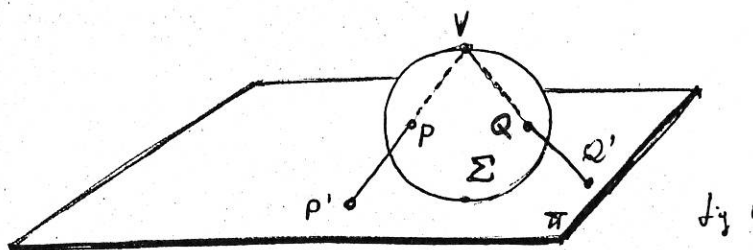
Sia γ un ciclo, Q un cut set di G , e diciamo $\{Y_1, Y_2\}$ la partizione dei vertici di G operata da Q , $(x_1, x_2, \dots, x_k = x_1)$ la sequenza ordinata di vertici che si incontra percorrendo γ .

E' noto che un lato di G è in Q se e solo se ha un estremo in Y_1 e l'altro in Y_2 : ~~osservazione~~ è lato di γ che stanno in Q sono quelli per i quali x_j, x_{j+1} , per cui x_j, x_{j+1} sono l'uno in Y_1 , l'altro in Y_2 , e il loro numero è necessariamente pari, poichè $x_k = x_1$. □

- 1 Def . Un grafo $G = (X, \mathcal{U})$ si dice rappresentabile in $\mathbb{R}^n$ se
- (i) esiste una mapeggiatura $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$
 - (ii) detto $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle curve semplici (nel senso usuale ed orientato) di $\mathbb{R}^n$, esiste una mapeggiatura $\psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$
 - ~~(iii) $\varphi(\text{estremi di } u_i) = \text{estremi di } \psi(u_i)$~~
 - ~~(iv) se $u_i \neq u_j$
 $\psi(u_i) \cap \psi(u_j) = \varphi(\text{estremi di } u_i) \cap \varphi(\text{estremi di } u_j)$~~

È intuitivo - ed è facile provarlo - che ogni grafo finito si rappresenta in $\mathbb{R}^3$: basta, per esempio, rappresentare i vertici come punti di una retta, ed ~~archi~~^{diversi} come curve appartenenti ~~ad~~^a piani diversi del fascio attraverso tale retta.

2 Def . Un grafo è detto planare - o piano - se è rappresentabile in $\mathbb{R}^2$.
Estendendo la definizione di rappresentabilità, in modo ovvio, si può porre anche il problema di rappresentare un grafo su di una sfera. Usando, per es., la proiezione stereografica della sfera sul piano π , è facile rendersi



conto che un grafo è planare se e solo se è rappresentabile su una sfera.

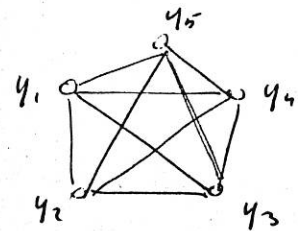
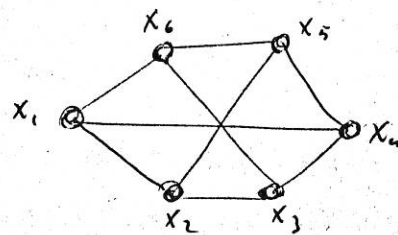
3 Def . Se il grafo ^{planare} contiene cicli, ciascuno di essi partisce il piano in due regioni, delle quali una (quella illustrata) è detta la regione esterna, l'altra la interna.

Nella rappresentazione sulla sfera tale distinzione viene ~~osservata~~^{osservata} e mantenuta, e

meno, di non finire a priori in punto V nella sfera (corrispondente - nella proiezione stereografica, alla retta impropria) e di distinguere fra loro le due regioni a seconda che includano o non tale punto.

Def. 4. Regioni elementari sono quelle che - nella rappresentazione prescelta - non contengono nel proprio interno lati del grafo.

Th 5 (Kuratowski) Condizione necessaria e sufficiente perché un grafo sia planare è che non contenga come sottografo, nessuno dei due seguenti:



né alcuno che da essi si ottenga sostituendo ad un lato una serie di lati. $\square$

$$p_1 + v_2 = (e_1 - v_1) + (e_2 - p_2) = (e_1 + e_2) - (p_2 + v_1) = \\ = E - R_2 = N_2 = R_1$$

14

Le prove dei due teoremi che seguono sono elaborate e non si riportano: l'importante è chiarire l'importanza degli enunciati: il primo stabilisce una identità fra i grafi dualizzabili e quelli planari, indicando come sia per una costruzione effettiva dei duali quella che permette attraverso la rappresentazione nel piano; il secondo fornisce un criterio operativo per eseguire tale costruzione nel caso di concreto interesse.

Th. 9: Un grafo è planare se e solo se ha duale. $\square$

Th. 10: Se G planare non separabile.

Nella nostra rappresentazione sulla sfera Σ , all'interno di ogni regione elementare R_j in cui G partiziona Σ si sceglie un punto x_j^* , e per ogni lato l_k di G , che separa R_{j_1}, R_{j_2} reg. elem. di Σ , si traccia un lato l_k^* che tagli soltanto il lato l_k congiungendo i punti $x_{j_1}^*, x_{j_2}^*$.

Allora $G^* = (\{x_i^*\}, \{l_k^*\})$ è il duale di G $\square$

Volendo riportare alla rappresentazione nel piano il procedimento adottato sulla sfera, occorre includere, fra le regioni ^{elementari} di partizione R_j anche quella contenuta la retta impropria.

