

2. Rappresentazione matriciale dei grafi non orientati.

11

2.1 Ricordo sul corpo di due elementi e sugli spazi vettoriali.

Ricordiamo che un corpo F è un insieme sul quale sono definite due operazioni binarie, l'addizione e la moltiplicazione, e valgono le

- (i) rispetto all'addizione F è un gruppo abeliano
- (ii) se 0 è l'elemento neutro dell'addizione, $F - \{0\}$ è un gruppo abeliano rispetto alla moltiplicazione
- (iii) la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione.

Gli esempi più comuni di corpo sono $\mathbb{Q}$ (numeri razionali), $\mathbb{R}$ (numeri reali), $\mathbb{C}$ (numeri complessi): tutti tre questi corpi sono infiniti.

Esistono peraltro corpi finiti, e si può anzi provare che, per ogni ^{potenza n-esima di} ~~numero~~ $p > 1$, esiste uno ed un solo corpo finito di p^n elementi.

Il corpo di due elementi, sovente indicato come $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (corpo degli interi modulo 2) non è altro che l'anello booleano sull'insieme $\{0, 1\}$, già noto da altri corsi. È infatti immediato verificare che le operazioni

Addizione

	0	1
0	0	1
1	1	0

Moltiplicazione

	0	1
0	0	0
1	0	1

definite dalle due precedenti tabelle abbeverano l'insieme $\{0, 1\}$ a corpo, nel senso che sono verificate tutte le proprietà formali di cui una tale struttura deve essere dotata.

Osservazioni: sul corpo di 2 elementi ogni elemento coincide col proprio opposto additivo; perciò il segno di sottrazione può sempre essere sostituito con quello di addizione.

Ricordiamo che ^{un insieme} ~~un insieme~~ V ~~è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{F}$ se~~ V è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{F}$ se

- (i) V è dotato di un'operazione ~~lineare~~ ^{lineare}, detta addizione, rispetto alla quale è un gruppo abeliano: si porrà

$$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

(ii) $V \times \mathbb{F}$ è dotato di una applicazione in V , detta prodotto scalare 12
 $(v, \alpha) \longrightarrow \alpha v \quad \alpha \in \mathbb{F}, v \in V$

per le quali valgono le

$$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \quad \forall v_1, v_2, v, \alpha, \beta$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$$

$$(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) = \beta(\alpha v)$$

$$1 \cdot v = v$$

L'esempio più ovvio di spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ è $\mathbb{F}^n$, come l'insieme delle n -uple di $\mathbb{F}$: le operazioni sono definite dalle

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} ; \quad \gamma \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma \alpha_n \end{bmatrix}$$

Def 1 Un insieme B di elementi di V è un insieme di generatori se ogni altro elemento di V è combinazione lineare su $\mathbb{F}$ di elementi di B :

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_t b_t \quad \begin{matrix} b_1, \dots, b_t \in B \\ \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{F} \end{matrix}$$

Se inoltre B è tale che nessun suo sottoinsieme proprio è un insieme di generatori, allora B è una base per V .

Si provano i fatti seguenti:

- (i) tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità, detta dimensione dello spazio.
- (ii) da ogni insieme di generatori si può estrarre una base
- (iii) ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è contenuto in qualche base.

Esempio Lo spazio delle n -uple di $\mathbb{F}$ ha dimensione n .

Una base (non la base !!) è costituita dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

La detta base sarà detta, per brevit , la base canonica di $\mathbb{F}^n$.

Def 2 Se M è una matrice ad elementi in un corpo $\mathbb{F}$, il rango della matrice può definirsi in modo equivalente come

13

- (i) l'ordine massimo dei minori non nulli di M
- (ii) la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle righe di M come il massimo numero di righe linearmente indipendenti di M
- (iii) la dimensione dello spazio vett. generato dalle colonne di M , come il massimo numero di col. l. i. di M . $\square$

Def 3 Se V e W sono due spazi vettoriali su $\mathbb{F}$, un'applicazione

$$\varphi: V \rightarrow W$$

è una trasformazione lineare se:

- (i) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- (ii) $\alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V$

Def 4 Se V, W, U sono spazi vettoriali su $\mathbb{F}$, un'applicazione

$$\psi: V \times U \rightarrow W$$

è bilineare se è lineare su ciascuna delle componenti del prodotto cartesiano:

- (i) $\psi(v_1 + v_2, u_1) = \psi(v_1, u_1) + \psi(v_2, u_1)$
 - (ii) $\psi(\alpha v_1, u_1) = \alpha \psi(v_1, u_1)$
 - (iii) $\psi(v_1, u_1 + u_2) = \psi(v_1, u_1) + \psi(v_1, u_2)$
 - (iv) $\psi(v_1, \alpha u_1) = \alpha \psi(v_1, u_1)$
- $\left. \begin{array}{l} \forall v_1, v_2 \in V \\ \forall u_1, u_2 \in U \\ \forall \alpha \in \mathbb{F} \end{array} \right\}$

Def 5 Se φ è una trasformazione lineare da V in W

$$\varphi: V \rightarrow W$$

si pone:

$$\text{Ker } \varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

$$\varphi(V) = \{w \in W \mid w = \varphi(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Valgono i seguenti fatti, che qui si riportano senza prove (si suppone $\dim < \infty$)

- (i) $\text{Ker } \varphi$ è un sottospazio di V , detto nucleo di φ
- (ii) se $\text{Ker } \varphi = 0$, φ è iniettiva, cioè mappa vettori distinti di V in vettori distinti di W

- (iii) $\varphi(V)$, ~~immagine~~ immagine di V tramite φ , ~~è~~ è un sotto-spazio di W . 14
- (iv) Se $\varphi(V) = W$, φ è ^{detta} suriettiva, cioè ogni vettore dello spazio W è immagine di qualche elemento di V .
- (v) ~~Supponiamo~~ Se φ è iniettiva e suriettiva, V si dice isomorfo a W : in tal caso si può definire la mappa inversa $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$, che è una trasformazione lineare.
- (vi) Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ di dimensione n , esso è isomorfo ad $\mathbb{F}^n$.
- (vii) $\dim(\text{Ker } \varphi) + \dim \varphi(V) = \dim V$ qualunque sia la t.l. φ .

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{F}$, W uno s.v. di dimensione m su $\mathbb{F}$, e se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ è una base per V , $\{f_1, \dots, f_m\}$ una base per W , con riferimento a tali basi prefissate, una trasformazione lineare $\varphi: V \rightarrow W$ si rappresenta con una matrice $M_\varphi \in \mathbb{F}^{m \times n}$, secondo la convenzione seguente:

~~Si pone~~

(i) si pone $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m m_{ij} f_i \quad j=1, 2, \dots, n$

(ii) si rappresenta il generico vettore $V \ni v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$ con la matrice colonna

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

e il generico $W \in W$, $w = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i$ con la matrice colonna

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

Allora la matrice rappresentativa di $\varphi(v)$ si ottiene, com'è facile verificare, dal prodotto matriciale

$$m \begin{bmatrix} m_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_m$$

Valgono i fatti seguenti:

(i) $\text{rank } M_\varphi = \dim \varphi(V)$; (ii) $m - \text{rank } M_\varphi = \dim(\text{Ker } \varphi)$

(iii) M_φ quadrata non singolare $\iff \varphi$ è isomorfismo

Def 6 Una trasformazione lineare di V in $\mathbb{F}$ (considerato come s.v. su se stesso) si dice un funzionale lineare.

I funzionali lineari di V si associano a spazio vettoriale, detto duale di V , e indicato con V^* . Si prova che, se V è di dimensione finita, $\dim V^* = \dim V$.

Def Una applicazione bilineare $\psi: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ (ogni corpo $\mathbb{F}$ è spazio vettoriale su se stesso) è un prodotto interno se è simmetrica:

$$\psi(v, w) = \psi(w, v) \quad v, w \in V$$

Per comodità potremo $\psi(v, w) = v \times w$.

Con riferimento ad un assegnato prodotto interno

i) due vettori v, w sono ortogonali se

$$v \times w = 0$$

ii) un vettore v si dice isotropo se

$$v \times v = 0$$

iii) il prodotto si dice degenere se esiste $v \neq 0$ ortogonale a tutto lo spazio V :

$$v \times w = 0 \quad \forall w \in V$$

iv) i vettori degenere, più lo zero, costituiscono uno spazio vettoriale di V , detto nucleo del prodotto interno.

v) un prodotto interno non degenere si dice una norma

vi) i vettori ortogonali ad un assegnato insieme $\mathcal{H}$ di vettori sono ortogonali al sottospazio $\langle \mathcal{H} \rangle$ generato da $\mathcal{H}$, e costituiscono essi stessi uno spazio vettoriale che sarà indicato con $\langle \mathcal{H} \rangle^\perp$

Esempio: In $\mathbb{F}^n$ si definisce il prodotto interno fra due vettori A, B

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i = \bar{A}^T B \quad (T = \text{trasposto})$$

Il prodotto è non degenere, per ogni $\mathbb{F}$.

Se $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non ci sono vettori isotropi ma nulli in $\mathbb{F}^n$.

Si verifica che, se $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ed $n > 1$, esistono vettori isotropi non nulli.

vii) se W è sottospazio di V ,

$$\dim V \leq \dim W + \dim W^\perp$$

~~Il prodotto interno è non degenere, per ogni $\mathbb{F}$.~~
~~Se $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, non ci sono vettori isotropi ma nulli in $\mathbb{F}^n$.~~
~~Si verifica che, se $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ed $n > 1$, esistono vettori isotropi non nulli.~~

Diamo a meno delle prove per la vii)

Per ogni $v \in V$, si definisce un funzionale lineare t_v su W : 16

$$t_v: w \longrightarrow v \times w$$

Allora $t_v \in W^*$, che è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$, ed è una trasformazione lineare la applicazione

$$\psi: v \longmapsto t_v$$

che mappa V in W^* .

Si noti che $\text{Ker } \psi = W^\perp$.

Ricordando che

$$\dim(\text{Ker } \psi) = \dim V - \dim \psi(V)$$

e che

$$\dim W = \dim W^* \geq \dim \psi(V)$$

poiché $\psi(V) \subseteq W^*$, si trae subito che

$$\dim W^\perp = \dim(\text{Ker } \psi) \geq \dim V - \dim W.$$

viii) se il prodotto scalare è una norma, per ogni sottospazio W di V si ha:

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$$

Sarà sufficiente provare che ogni funzionale di $W^\perp$ è contenuto in $\psi(V)$.

Si infatti

$$\lambda: W \rightarrow \mathbb{F}$$

un qualsiasi funzionale di $W^\perp$, non nullo, almeno la prova è banale.

Sia $\{v_1, \dots, v_{m-1}, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ una base per V , tale che $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = W$, $\langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle = \text{Ker } \lambda$ (È noto che $\text{Ker } \lambda$ ha per dimensione quella di W diminuita di un'unità), e si definisce un funzionale $\lambda_e: V \rightarrow \mathbb{F}$ ponendo $\lambda_e = \lambda$ su W , e λ_e nullo su $v_{m+1}, \dots, v_n$. Per la proposizione precedente,

$$N = \langle v_1, \dots, v_{m-1}, v_{m+1}, \dots, v_n \rangle^\perp$$

ha dimensione almeno 1, e se $w \in N$, $w \neq 0$, allora $\lambda_e(v_i) = w \times v_i$ per $i=1, \dots, m-1, m+1, \dots, n$. È chiaro che $w \times v_m \neq 0$, senza w sarebbe ortogonale a tutto V , contro l'ipotesi che λ è una norma. Posto allora $u = w \cdot \lambda_e(v_m) / w \times v_m$ si ha che t_u coincide con λ su tutto W e quindi $\lambda = t_u$.

Dimostrazione: in generale, non è detto che $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp$ (che lo spazio "generato" da un sottospazio e dal suo ortogonale) sia tutto $\mathbb{V}$.

È noto - per - che, nel $\mathbb{R}^4$.

$$\mathbb{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \dim \mathbb{W} = 2$$

$$\mathbb{W}^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \dim \mathbb{W}^\perp = 2$$

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \dim(\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp) = 3$$

(x) $\mathbb{W} = (\mathbb{W}^\perp)^\perp$ quando il prodotto è una norma.

Porta ragione sulle dimensioni.

(x) $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}^\perp = 0$ quando $\mathbb{V}$ è pieno di vettori isotropi.

In questo caso $\mathbb{W}$ e $\mathbb{W}^\perp$ sono complementari, nel senso che $\langle \mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp \rangle = \mathbb{V}$.

[Quanto segue vale ~~anche~~ ^{anche} per i grafi orientati, quando ed anzi in
esso il multigrafo corrispondente].

Def 1. Sia $G = (X, U)$ un grafo, e sia $|X| = v$, $|U| = e$.

Si considerino le sequenze ordinate dei vertici che i lati:

$(x_1, x_2, \dots, x_v)$

$(l_1, l_2, \dots, l_e)$

La matrice di incidenza di G , con riferimento alle due sequenze ordinate, è una matrice booleana ~~matrice~~ di v righe ed e colonne, nella quale l'elemento di posto (i, j) è 1 oppure 0 a seconda che in G il vertice ~~incidenza~~ x_i sia o non un estremo di l_j .

Indicheremo con M_G tale matrice.

Esempio ■

Osservazioni: è facile controllare che ogni colonna delle matrici contiene al più due elementi non nulli, in accordo col fatto che un lato incide al più in due vertici distinti. Se c'è un solo elemento $\neq 0$ nella colonna j esima, ciò significa che l_j è un cospicuo.

Se una riga è tutta nulla, rappresenta un vertice isolato; se essa contiene r elementi diversi da 0, il grado del vertice corrispondente è r .

Def 2

Siano $G = (X, U)$, $G' = (X', U')$ due grafi non orientati.
 G e G' si dicono isomorfi se ~~esistono due~~ ^{esistono due} ~~funzioni~~ ^{funzioni} ~~iniettive~~ ^{iniettive} ~~suriettive~~ ^{suriettive} ~~per cui~~ ^{per cui}, se x, y sono gli estremi di l in G , $\varphi(x)$ e $\varphi(y)$

Def. 2

Una matrice booleana è una matrice di $\{0,1\}$ di n righe e n colonne, se e solo se le sue colonne contengono uno o due elementi non nulli.

Due graf G e G' hanno matrice di $\{0,1\}$ che differiscono per una permutazione sulle righe ed una sulle colonne se e solo se sono isomorfi. $\square$

Si stabilisce in tal modo una corrispondenza biunivoca fra le matrici booleane a colonne con uno o due elementi non nulli, identificate rispetto alla permutazione delle righe e delle colonne, e i graf non orientati, identificate rispetto all'isomorfismo.

Quindi tutte le funzioni strutturali sul graf sono contenute nella matrice di $\{0,1\}$ associata, e lo scopo del presente paragrafo è proprio quello di tradurre in termini matriciali le principali proprietà dei graf esaminate in precedenza.

Lemmma 3 In un graf G , siano $H_1, H_2, \dots, H_c$ le componenti connesse, e si ordinino i vertici di G , in modo che i vertici di H_1 precedano quelli di $H_2, \dots$ precedano quelli di H_n ; analogamente per i lati. La matrice M_G risulta allora partizionata in modo ~~quasi~~ diagonale a blocchi.

	lati di H_1			lati di H_c		
vertici di H_1				0	0	0
				0		0
				0	0	
vertici di H_c	0	0	0			
	0	0	0			
	0	0	0			

Lemmma 4 Se la matrice M_G può essere partizionata nella forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

con A e D matrici non vuote, allora G non è connesso

Prova

Infatti i vertici delle righe appartenenti ad A e quelli delle righe appartenenti a D non sono uniti da alcun lato di G . $\square$

Proposizione 5 In un pref. comune G , di ordine v , $(v-1)$ righe di M_G sono sempre indipendenti.

28

Prova. Se - per assurdo - ci fossero $v-1$ righe l.d., se ne potrebbero scegliere π , con $2 \leq \pi \leq v-1$, che indicheremo con

$$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_\pi, \text{ tali che } \sum_{i=1}^{\pi} \vec{f}_i = 0$$

Nella matrice

$$R = \begin{bmatrix} \vec{f}_1 \\ \vdots \\ \vec{f}_\pi \end{bmatrix}$$

ogni colonna contiene 2 elementi unitari, oppure nessuno. Si effettui ~~una~~ una permutazione sulle righe di M_G , in modo che $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_\pi$ diventino le prime π righe, ed una permutazione sulle colonne ^{di M_G} in modo che ~~permutando~~ in R la colonna ~~con~~ con due elementi unitari precedano le altre. M_G risulta con partizione:

$$M_G = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & 0 \\ \hline 0 & M_{22} \end{array} \right] \begin{array}{l} \pi \text{ righe} \\ v-\pi \text{ righe} \end{array}$$

M_{22} non è la matrice nullo, altrimenti $\square$ i vertici relativi alle ultime $v-\pi$ righe sarebbero isolati. Il lemma 4 porge la conclusione $\square$

Osservazione: la ~~prova non è valida~~ prova non è valida per $\pi = v$: in tal caso ~~non~~ non sarebbe $\square$ possibile riportare le colonne di R in due classi ^{perché} tutte contengono due elementi unitari!

Teorema 6 In un pref. G ~~senza~~ senza coppie, di ordine v , il rango di M_G è $v-c$, se c è il numero delle componenti connesse di G : quindi il rango di M_G coincide col rango del graf di G .

Prova. Supponiamo dapprima che G sia connesso.

M_G è costituita da almeno $v-1$ colonne, poiché G ha almeno $v-1$ lati.

Se sommiamo all'ultima riga di M_G tutte le altre, otteniamo una matrice $M_G^\dagger$ la cui ultima riga è nulla (perché ogni colonna di M_G contiene ~~due~~ 2 elementi non nulli). Ma:

$$\text{rank } M_G = \text{rank } M_G^\dagger \leq v-1$$

D'altra parte la prop. 5 assicura che

$$\text{rank } M_G \geq v-1$$

Se G ha c componenti connesse, si costruisce M_G nella forma indicata dal lemma 3. 24

Siano H_i , di ordine v_i ($i=1, 2, \dots, c$) le componenti connesse di G .

$$M_G = \begin{bmatrix} \text{diagonali} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{diagonali} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{diagonali} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{diagonali} \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_c \end{matrix}$$

Il rango di M_G è la dimensione dello spazio generato dalle righe. Stante la struttura di M_G , tale spazio è somma diretta dei sotto spazi generati dalle righe appartenenti alle componenti connesse.

Il genere di tali spazi ha dimensioni $v_i - 1$ [si pensi alle componenti H_i !]

Allora

$$\text{rank } M_G = \sum_{i=1}^c (v_i - 1) = \left(\sum v_i \right) - c = p \quad \square$$

Lemma 7

~~Se M_G è la matrice di incidenza di un grafo G di ordine v , connesso, senza cappi.~~
 Sia M_G matrice di incidenza di un grafo G di ordine v , connesso, senza cappi.

Una sottomatrice quadrata dt di M_G , di ordine $v-1$, è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono ai lati di un albero di G .

Prova

Si consideri il sottografo A , associato alle colonne di M_G interessate dalla sottomatrice dt .

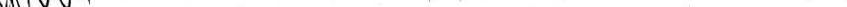
$$M_G = \left[\begin{array}{c} \text{matrice } dt \\ \hline \text{colonne rimanenti} \end{array} \right] \begin{matrix} v-1 \\ v \end{matrix}$$

Tale sottografo è di ordine v , e contiene $v-1$ lati.

Inoltre il rango della sua matrice di incidenza è $v-1$, e ciò implica, per il lemma 6, che A non è connesso.

Le conclusioni (i) (iii) e (iv) del teorema 4 di § 1.4 sono pertanto verificate, ed A è un albero.

Viceversa, se A è un albero di G , si consideri la sottomatrice dt di M_G relativa ai $v-1$ lati di A . Il rango di tale matrice è $v-1$.

per la parte b.  

~~XX~~

Se G é comutativo e sem torsão, indicaremos com M_G^{st} aqui subálgebra de M_G constituída das $p = r-1$ linhas, necessariamente independentes.

C'è un poligono l'univoco fra gli albero di G e le subalberi quodati
no singolari di ordine p di M_G^*

È immediato osservare che, in un grafo finito G , i circuiti distinti sono in numero finito.

Def 1. Sia $G = (X, U)$ un grafo finito, e si considerino in sequenze ordinate sia i circuiti che i lati:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, \dots, z_q) \\ (l_1, l_2, \dots, l_e) \end{aligned}$$

La matrice dei circuiti di G , con riferimento alle due sequenze ordinate, è una matrice booleana di q righe ed e colonne, nella quale l'elemento di posto (i, j) è 1 oppure 0 a seconda che in G il circuito z_i contiene o non il lato l_j .

Indicheremo tale matrice con K_G .

Esempio

Osservazioni. Se una colonna è nulla, il lato corrispondente non appartiene ad alcun circuito e viceversa.

Una riga non può essere nulla; se contiene soltanto un elemento non nullo, il circuito relativo è un coppia.

In generale, le informazioni strutturali sul grafo G fornite da K_G sono incomplete (a differenza di quelle fornite da M_G , che caratterizza completamente il grafo): ~~non~~ i vertici isolati non sono individuabili, ~~non~~ i lati che ~~non~~ non entrano in qualche circuito non sono caratterizzabili da relazioni di incidenza, etc.

Se G è connesso, è dotato almeno di un albero A ; associati ad ogni albero ci sono un coalbero ed un insieme fondamentale di circuiti, ~~denominato~~ costituito da $v = e - v + 1$ circuiti.

Si riferisce ad un albero $A \leq G$ arbitrario, costruiamo una sotto matrice $Z_{G/A}$ di Z_G , di v righe ed e colonne, nel modo seguente: i cicanti corrispondenti alle v righe sono quelli del sistema fondamentale generato dall'albero A ; i lati sono poi numerati in modo che, per $i \leq v$, la colonna i -esima si riferisce al lato dell'albero che fa parte del cicante i -esimo; per $i > v$ le colonne si riferiscono ai lati dell'albero. Allora $Z_{G/A}$ ha la forma

$$Z_{G/A} = \begin{matrix} & \overbrace{\hspace{2cm}}^v & \overbrace{\hspace{2cm}}^{e-v} \\ v \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right. & \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|c} U & W \end{array} \right]$$

con U matrice identità di ordine v .

Esempio:

Proposizione 2. Siano M_G e Z_G le matrici di incidenza e dei cicanti di un grafo G senza cappi.

Se le colonne di M_G e Z_G sono ordinate in modo che ad egual indice corrisponde eguale lato di G , si ha

$$M_G Z_G^T = 0$$

$$Z_G M_G^T = 0$$

Prova. Si considerino la i -esima riga di M_G e la j -esima ^{riga} di Z_G : sono rispettivamente

$$\begin{matrix} m_{i1} & \dots & m_{ie} \\ z_{j1} & \dots & z_{je} \end{matrix}$$

m_{ik} e z_{jk} sono entrambi non nulli se ~~non nulli~~ il lato k appartiene al cicante j e incide nel vertice x_i . Ma allora z_j è un cicante passante per x_i . Poiché in un cicante tutti i vertici sono

di grado 2, c'è un solo altro lato $l_k \neq l_k$ per cui sono contemporaneamente non nulli m_{ik} e z_{jk} . Allora il prodotto interno delle due righe è nullo, e ciò vale $\forall i, j$ $\square$

Lemma 3 (Sylvester) Siano M ed N matrici su $\mathbb{F}$, e siano M di dimensioni $(h \times e)$, N di dimensioni $(e \times t)$.

Se $MN = 0$, allora $\text{rank } M + \text{rank } N \leq e$

Prova. Nello spazio $\mathbb{F}^e$, dotato dell'usuale prodotto interno, si considerino i sottospazi S_M , generato dalle righe di M , ed S_N , generato dalle colonne di N . S_N risulta essere contenuto in $S_M^\perp$, e quindi

$$e = \dim S_M + \dim S_M^\perp \geq \dim S_M + \dim S_N = \text{rank } M + \text{rank } N$$

Teorema 4 In un graf G senza cappi $\text{rank } L_G = v$.

Prova.

~~Si consideri il graf G e si costruisca la matrice M_G di dimensioni $(v \times e)$ la cui i -esima riga è il vettore $\mathbf{m}_i$ di cui si è parlato nel paragrafo precedente.~~

Da proposizione 2, unitamente al lemma 3, si ottiene che

$$\text{rank } M_G + \text{rank } L_G \leq e$$

Ricordando che $\text{rank } M_G = v - c$, si trae

$$\text{rank } L_G \leq e - v + c = v$$

D'altra parte, se G è connesso, esso contiene un qualche albero A ; allora da quanto è stato detto in precedenza

$$\text{rank } L_G \geq \text{rank } L_{G/A} = v$$

Se G non è connesso, e se H_i ($i=1, 2, \dots, c$) ne sono le componenti connesse, è possibile effettuare una partizione di L_G analoga a quella operata nel th. 6 di § 2.2 per M_G .

$$L_G = \begin{bmatrix} L_G^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_G^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_G^{(c)} \end{bmatrix}$$

Procedendo in modo analogo, si ha

34

$$\text{rank } Z_G = \sum_{i=1}^c \text{rank } Z_G^{(i)} = \sum_{i=1}^c (e_i - v_i + 1)$$

dove e_i e v_i sono i lati e i vertici, che - formano lo spazio vettoriale H_i . Ma

$$\sum_{i=1}^c (e_i - v_i + 1) = \sum e_i - \sum v_i + c = e - v + c = v \quad \square$$

Quindi, per ogni graf G senza cappi connesso (non connesso) il rango di Z_G è la cardinalità di un sistema fondamentale di circuiti, ottenuto a partire da qualsiasi albero (coloreto) di G ; tale sistema fondamentale si configura come "base vettoriale" dello spazio vettoriale generato dai circuiti di G .
È noto che nel corso del precedente teorema si è provata anche la seguente

Proposizione 5 : Per ogni graf privo di cappi, $\text{rank } M_G + \text{rank } Z_G \leq$ minore o eguale al numero dei lati. $\square$

Teorema 6 : Sia Z_G la matrice dei circuiti di un graf G connesso e senza cappi, e sia Z_G^* una sottomatrice di Z_G relativa a v circuiti indipendenti.

Una sottomatrice quadrata Z_G^* di Z_G , di ordine v , è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono ai lati di un coalbero di G .

Prova.

Supponiamo che le colonne di Z_G^* e di M_G di egual indice si riferiscano ai medesimi lati di G (perché tale ipotesi si verifica facilmente rinumerando le colonne).

È noto che - in queste ipotesi:

$$Z_G^* M_G^T = 0$$

cioè le righe delle due matrici appartengono a sotto-spazi ortogonali; Ogni $(v-1)$ righe di M_G (che sono sempre indipendenti) generano l'ortogonale dello spazio generato da Z_G^* .
Indichiamo con M_G^* una sottomatrice di M_G composta di $(v-1)$ righe.

Si ha $M_G^* Z_G^* = 0$ non singolare; ma è risultato supporre che nei vertici delle prime v colonne di Z_G^* : si vuol provare che le ultime $v-1$ colonne di M_G^* sono indipendenti (basta basta perché esse corrispondano ai lati di un albero).

$$Z_G^* = \left[\begin{array}{c|c} C & B \end{array} \right] \begin{matrix} v \\ v-1 \end{matrix}$$

$$M_G^* = \left[\begin{array}{c|c} D & A \end{array} \right] \begin{matrix} v \\ v-1 \end{matrix}$$

Supponiamo che siano linearmente dipendenti le righe di C : allora esiste un vettore $\bar{h}$ di $\mathbb{F}^{v-1}$ che non dipende linearmente da esse, ed ogni vettore di $\mathbb{F}^v$ del tipo $R \oplus \bar{h}$, con R arbitrario in $\mathbb{F}^v$, non appartiene allo spazio generato dalle righe di M_G^* .

Il sistema lineare

$$C X = - \begin{bmatrix} \bar{h} \times b_1 \\ \vdots \\ \bar{h} \times b_{v-1} \end{bmatrix}$$

con $b_1, b_2, \dots, b_{v-1}$ righe di B ha una soluzione $R \in \mathbb{F}^v$, e risulta, per quanto detto, $R \oplus \bar{h}$ ~~non appartenente allo spazio generato dalle righe~~ di M_G^* .

D'altra parte $R \oplus \bar{h}$ è ortogonale a Z_G^* , per costruzione, e quindi deve appartenere allo spazio generato dalle righe di M_G^* , perché esse generano tutto l'ortogonale di Z_G^* . Dunque l'assurdo.

Ovvero, se le v colonne di C corrispondono a loti di un coalbero, le $v-1$ colonne di C sono indipendenti.

Basta allora dualizzare il ragionamento fatto, sostituendo C a B e D a A , per provare che C è non singolare. $\square$

Il Th. 6 stabilisce una corrispondenza biunivoca fra ~~gli~~ ⁿwalkers di G , rapporto comune e nuge coppi, e le matrici non singolari di ordine ~~matrici~~ $v \times v$ contenute in Z_G^* .

2.4. Matrice di cut-set di un grafo non orientato.

In un grafo finito G i cut-set sono in numero finito.

1 Def Sia $(X, U) = G$ un grafo finito, e si considerino in sequenza ordinate i cut-set e i lati:

$$\begin{pmatrix} Q_1 & \dots & Q_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_e \end{pmatrix}$$

La matrice di cut-set di G , con riferimento alle due sequenze ordinate, è una matrice booleana di k righe ed e colonne, nella quale l'elemento di posto (i, j) è 1 oppure 0, a seconda che in G il cut-set Q_i contenga o non il lato l_j .

Indicheremo tale matrice con Z_G .

Esempio

Osservazioni: una colonna non può essere nulla ^{a meno che il suo lato non sia un cappio} $\sqrt{}$ altrimenti il lato corrispondente non farebbe parte di alcun cut-set: ciò è imponibile, visto l'esercizio 15 del §2 che assicura che ogni lato fa parte di qualche albero (evidentemente, il risultato si applica direttamente ai graf connessi, ma può estendersi con facilità al caso generale).

E' ovvio che una riga non può essere nulla.

Esercizio 2: quali proprietà strutturali ha G se una riga contiene soltanto un elemento non nullo?

Tenendo conto del 2.4 di §3, è immediata la soluzione del seguente

Esercizio 3: se G è non separabile, la sua matrice Z_G contiene la matrice di incidenza M_G .

ed è facile provare, ragionando sulle proprietà di ciascun vertice (di essere o non di taglio) ~~ovvero, per ogni vertice v , se v è di taglio, allora la matrice M_G ha una riga non nulla, e viceversa~~:

Esercizio 4: se G è ~~non separabile~~ ^{non c'è}, le righe di M_G sono combinazioni lineari, su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, delle righe di Z_G .

Proposizione 5. In un grafo ~~non commutato~~ G , siano le colonne di Z_G e di L_G ordinate in modo che ad ogni vertice corrisponda il medesimo lotto di G . Allora

$$Z_G Z_G^T = 0 \text{ ; } Z_G L_G^T = 0$$

Prova. È immediata quando si ricorda che ogni cut-set ha come vertice un numero pari di lati, e che il corpo in cui operiamo è quello dei due elementi. $\square$

Se G è connesso, è dotato di almeno un albero A ; associato ad esso c'è un sistema fondamentale di cut-set, di cardinalità $p = v - 1$.

Costruiamo allora una matrice $Z_{G/A}$, di p righe ed e colonne: le p righe fanno riferimento ai cut-set del sistema fondamentale dell'albero A ; per $i \leq p$, la colonna i -esima è quella del lotto di A che fa parte dell' i -esimo cut-set; per $i > p$ le colonne si riferiscono ai lati del coalbero.

$Z_{G/A}$ ha la forma

$$Z_{G/A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}^p & \overbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}}^{e-p} \end{bmatrix} = \left[U \mid W \right]$$

con U matrice identità di ordine p

Lemma 6: In un grafo G , $\text{rank } Z_G = p$ se G è senza cappi.

Prova: il lemma di Sylvester ci assicura che

$$\text{rank } Z_G + \text{rank } L_G \leq e$$

Ma, se G è senza cappi, $\text{rank } L_G = v$, onde

$$\text{rank } Z_G \leq e - v = p$$

Se G è connesso, quanto detto sopra $Z_{G/A}$ basta per concludere.

Se G non è connesso, è possibile partizionare Z_G in una matrice diagonale e blocchi, per di ordinare i lati di G e i cut-set in modo analogo a quanto fatto nel th 4 di §2.3 per lati e vertici. Un procedimento di calcolo del tipo simile a quello in svolto porta alla conclusione. $\square$

In ogni grafo G senza cappi connesso (non connesso) il rango di Z_G è la cardinalità di un sistema fondamentale di cut-set, ottenuto a partire da qualsiasi albero (forest) di G : lo spazio vettoriale generato dai cut-set di G ha per base un qualunque

Proposizione 7. Se G è senza cappi, le righe di M_G e quelle di Z_G generano lo stesso spazio vettoriale (su $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Prova. L'esercizio ti prova che lo spazio associato ad M_G è uguale a quello associato a Z_G . Ma il rango di M_G è p , ebbene è anche il rango di Z_G , e ciò basta per concludere. $\square$

Lemma 8. Se Z_G la matrice di aut-set di un grafo G , di ordine v , connesso e senza cappi, e se Z_G^* submatrice di Z_G costituita da $v-1$ righe linearmente indipendenti. Una submatrice quadrata de di Z_G^* , di ordine $v-1$, è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono ai lati di un albero di G .

Prova. Si considerino $v-1$ righe - linearmente indipendenti - di M_G

$$M_G^* = \left[B \mid \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right] \}_{v-1}$$

e supponiamo che in Z_G^* la submatrice de ^{non singolare e} ~~non singolare~~ delle prime $v-1$ righe e $v-1$ colonne.

$$Z_G^* = \left[\begin{array}{c|c} de & \\ \hline \text{---} & \end{array} \right] \}_{v-1}$$

Lo spazio vettoriale generato dalle righe di M_G^* è quello generato dalle ~~prime~~ righe di Z_G^* sono gli stessi, per la prop. 7. Esiste una c.l. delle righe di M_G^* che annulla le prime $v-1$ componenti. Esiste una c.l. delle prime $v-1$ righe di Z_G^* che annulla le prime $v-1$ componenti, e quindi una riga di de : annulla. Poiché B è non singolare, e $\square$ i lati ad esso relativi son quelli di un albero. Il ragionamento si inverte: se A è un albero, e se B è relativa ai suoi lati, B è non singolare. ~~In Z_G^*~~ In Z_G^* ~~la de è~~ la de ~~annulla~~ ~~di B~~ ~~non può essere singolare~~ $\square$

Esiste una corrispondenza biunivoca fra gli alberi di G e le submatrici non singolari di ordine $v-1$ estratte da una matrice Z_G^* costituita da $v-1$ righe indipendenti di Z_G .