

3 Rappresentazione matriciale di grafi orientati

3.1 Matrice di incidenza di un grafo (orientato).

11

Def. 1. Se $G = (X, U)$ è un grafo orientato ^{senza cappi} e se $|X| = v$, $|U| = e$.

Si considerano le sequenze ordinate dei vertici e degli archi di G .

$$(x_1 \text{ --- } x_v)$$

$$(u_1 \text{ --- } u_e)$$

La matrice di incidenza di G , con riferimento alle due sequenze, è una matrice ad elementi in $\mathbb{R}$, di v righe ed e colonne, in cui l'elemento di posto (i, j) è 1 se il vertice x_i è termine di l_j , -1 se x_i è origine di l_j , 0 se x_i non è né origine né termine di l_j .

Indichiamo con $\vec{M}_G$ tale matrice

Esempio

È ovvio che, la trasformazione $\begin{cases} 1 \rightarrow 1 \\ 0 \rightarrow 0 \\ -1 \rightarrow 1 \end{cases}$ trasforma $\vec{M}_G$ in M_G

Ogni colonna di $\vec{M}_G$ contiene un elemento che vale $+1$, un altro che vale -1 , mentre gli elementi restanti valgono 0

Si estendono i risultati del § 2.2, in modo ovvio, per quanto attiene Th. 2, Lemma 3, Lemma 4

Con la stessa affettazione simboli e quelle usate per M_G , si fa per $\vec{M}_G$

Prop. 5. In un grafo connesso G , di ordine v , $v-1$ righe di $\vec{M}_G$ sono indipendenti. $\square$

Prop. 6. In un grafo G senza cappi, di ordine v , il rango di $\vec{M}_G$ è g . $\square$

Th. 7. In un grafo G senza cappi, di ordine v , connesso, una submatrice quadrata $\mathcal{A}$ di $\vec{M}_G$, di ordine $v-1$, è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono ai lati di un albero di G . $\square$

le $\vec{M}_G^*$ è una submatrice di $\vec{M}_G$, connessa e senza cippi, sostituita con $v-1$ righe, le sue submatrici quadrate non singolari sono in corrispondenza biunivoca con gli alberi di G . 48

Teorema 8: Il determinante di una submatrice quadrata non singolare di $\vec{M}_G^*$ vale $+1$ o -1 .

Prova.

Sia B una submatrice di $\vec{M}_G^*$, e ne $\det B \neq 0$.

Ogni colonna di B ha al più due elementi non nulli, e di segno opposto: non è possibile, però, che tutte le colonne contengano due elementi non nulli, altrimenti la somma delle righe di B è la riga nulla, il che implicherebbe $\det B = 0$. Esiste perciò una colonna di B , contenente soltanto un elemento non nullo b_{ij} , che può essere $+1$ o -1 .

Risultato:

$$\det B = \pm 1 \cdot \det B_{ij}$$

dove B_{ij} è il complemento algebrico di b_{ij} .

E' ora facile concludere, per induzione sull'ordine di B . □

3.2 Matrice dei circuiti di un grafo (orientato)

31

Def. 1. Sia $G = (X, U)$ un grafo (orientato) finito, dove gli archi si orientano in modo arbitrario, ma fissato una volta per tutte, i circuiti:

$$(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_g)$$

hanno

$$(u_1, u_2, \dots, u_e)$$

gli archi di G .

La matrice dei circuiti di G , con riferimento alle due sequenze ordinarie, è una matrice ad elementi in $\mathbb{R}$, di g righe ed e colonne, in cui l'elemento di posto (i, j) è 1 se $\vec{z}_i$ contiene l'arco u_j orientato concordemente al circuito, è -1 se $\vec{z}_i$ contiene l'arco u_j orientato discordemente rispetto al circuito, e 0 se $\vec{z}_i$ non contiene u_j .

Indichiamo tale matrice con $\vec{Z}_G$

9

Esempio

L'unico caso in cui si passi da $\vec{Z}_G$ a Z_G .

Se A è un albero, è ancora possibile costruirlo, come per i grafi non orientati, una matrice $\vec{Z}_{G/A}$ di v righe ed e colonne, per le quali con segno

$$\vec{Z}_{G/A} = \left[\begin{array}{c|c} U^* & W \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{c} v \\ e-v \end{array} \right\} v$$

con U^* matrice la cui diagonale è costituita da 1 e -1 , e nulla altrove.

Tale una proposizione analoga alla seconda di § 2.3.

Prop. 2. Siano $\vec{M}_G$ e $\vec{Z}_G$ le matrici di incidenza e dei circuiti di un grafo G (senza cappi).

le colonne di $\vec{M}_G$ e $\vec{Z}_G$ sono ortogonali in modo che ad
 ogni indice corrisponde il medesimo lato di G , si ha

$$\vec{M}_G \vec{Z}_G^T = 0$$

$$\vec{Z}_G \vec{M}_G^T = 0$$

Provare: le somme le righe i -esime di $\vec{M}_G$ e le j -esime di $\vec{Z}_G$.

$$m_{ii} \text{ --- } m_{ie} \quad (\text{vertice } i \text{ esimo})$$

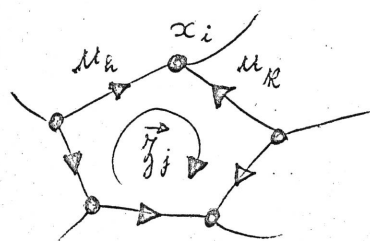
$$z_{ji} \text{ --- } z_{je} \quad (\text{ciruito } j \text{ esimo})$$

$$m_{ik} \neq 0 \iff m_{ik}, z_{jk} \neq 0 \iff u_k \in \vec{Z}_j$$

ed u_k ha per origine o termine x_i

Tutti i vertici di un circuito sono di grado 2, per cui c'è soltanto
 un altro arco $u_h \neq u_k$ per cui è $m_{ih} \cdot z_{jh} \neq 0$.

È facile rendersi conto che i due
 prodotti $m_{ik} \cdot z_{jk}$ ed $m_{ih} \cdot z_{jh}$
 hanno ^{comune} segno diverso, sicché il
 loro contributo è complessivamente nullo



Th. 3 In un grafo G orientato, senza cappi, $\text{rank } \vec{Z}_G = v$
 (si noti che il rango di un grafo orientato è quello del suo multigrafo
 corrispondente)

Provare: del tipo analogo a quella del Th. 4 di § 2.3, tenuto conto della
 prop. 2, e del teorema di Sylvester. □

Anche in questo caso, come in quello dei grafi non orientati, ad ogni
 co-albero del grafo ^{comune} è associato un sistema di circuiti che, una volta
 orientati, costituiscono una "base vettoriale" dello spazio generato da tutti i
 circuiti orientati di G . Tale sistema si dice sistema fondamentale di
 circuiti, associato al co-albero in considerazione.

Th. 4. Se $\vec{Z}_G$ la matrice dei circuiti di un grafo G senza cappi e comune,
 e se $\vec{Z}_G^*$ una sottomatrice di $\vec{Z}_G$ relativa a $v-1 = v$ circuiti
 indipendenti.

Una sottomatrice quadrata $v \times v$ di $\vec{Z}_G$, di ordine v , è non singo-
 lare se e solo se le sue colonne corrispondono ai lati di un co-
 albero di G .

Pione: forte ripetere quelle di § 2.3.

☒ 23

Come conseguenza: le matrici quadrate di ordine V non singolari
in $\overrightarrow{L}_G^*$ sono in corrispondenza biunivoca con i caratteri di G .

3.3 Matrice di cut-set di un grafo (orientato) connesso

34

un cut set di un grafo (orientato) è semplicemente un cut set del corrispondente multigrafo.

È possibile introdurre sul cut set Q di un grafo connesso G una orientazione: un cut set Q non orientato si identifica con le due classi non vuote di vertici in cui partisce l'insieme X dei vertici:

$$Q \equiv \{Y_1, Y_2\};$$

ciascuna delle due coppie ordinate (Y_1, Y_2) , (Y_2, Y_1) sarà chiamata un cut-set orientato.

Porremo quindi:

$$\vec{Q}' = (Y_1, Y_2) \neq (Y_2, Y_1) = \vec{Q}''$$

Def 1. In un grafo orientato G , sia $\vec{Q}$ un cut set:

$$\vec{Q} = (Y_1, Y_2)$$

l'arco u di G si dirà avere la stessa orientazione di $\vec{Q}$ se ha origine in Y_1 e termine in Y_2 .

Esercizio: si estende la definizione di cut set orientato ai grafi non connessi.

Esempio:

Def 2. In un grafo (orientato) $G = (X, U)$ si orienta in modo arbitrario, ma definitivo, i cut-set:

$$(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_k)$$

sono

$$(u_i, \dots, u_e)$$

gli archi di G .

La matrice di cut set di G , se riferita alle due sequenze ordinate, è una matrice $k \times e$ ad elementi in $\mathbb{R}$, in cui l'elemento al posto (i, j) è 1 se $\vec{Q}_j$ contiene u_i orientato con orientamento al cut set, -1 se lo contiene orientato in modo discorde, 0 se non lo contiene. Indicheremo tale matrice con $\vec{L}_G$.

Esercizio 3. Se G è non separabile, $\vec{Q}_G$ contiene le righe di $\vec{M}_G$, 37
eventualmente moltiplicate per -1 .

Esercizio 4. Le righe di $\vec{M}_G$ sono combinazioni lineari delle righe di $\vec{Q}_G$ (se G è senza cappi).

Proposizione 5. Se nel grafico connesso G le colonne di $\vec{K}_G$ e di $\vec{Q}_G$ sono ordinate in modo che ad ogni indice corrisponda lo stesso vertice di G , allora

$$\vec{Q}_G \vec{K}_G^T = 0$$

$$\vec{K}_G \vec{Q}_G^T = 0$$

Prova: Siano $\vec{Q} = (Y_1, Y_2)$ un cut set orientato e $\vec{f}$ un arco orientato.

Percorrendo $\vec{f}$ nel verso individuato dal suo orientamento, a partire da un vertice x arbitrario, fino a ritornarvi, notiamo $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{2t}}$ gli archi di $\vec{f}$ che appartengono a $\vec{Q}$, nell'ordine secondo il quale vengono incontrati sul percorso. (E' noto che il loro numero è pari).

Se - per fissare le idee - $x \in Y_1$, $u_{i_1}, u_{i_3}, \dots, u_{i_{2t-1}}$ sono orientati concordemente o discordemente rispetto a $\vec{Q}$ che a $\vec{f}$, mentre $u_{i_2}, u_{i_4}, \dots, u_{i_{2t}}$ sono orientati concordemente rispetto a $\vec{Q}$ e discordemente rispetto a $\vec{f}$, o viceversa.

Il prodotto interno della riga rappresentativa di $\vec{Q}$ per quella rappresentativa di $\vec{f}$ è pertanto nullo.

Cio vale qualunque siano $\vec{f}$ e $\vec{Q}$. □

Lemma 6. In un grafico connesso, senza cappi, $\text{rank } \vec{Q}_G = p = v - 1$.

Prova. Si ripete quella di Th. 6, § 2.4, tenendo conto che, orientando in qualche modo una sistema fondamentale di cut set, si è finito all'albero A , si ottiene una matrice

$$\vec{Q}_{G/A} = \begin{bmatrix} \overbrace{U^*}^{v-1} & \overbrace{W}^{2-v+1} \end{bmatrix}$$

dove U^* è matrice diagonale, con le diagonali arbitrarie, ma tutte di -1 o $+1$. □

All'esp. allora resta con associato un insieme di cut set che - orientati - 33
 costituiscono una "base vettoriale" dello spazio generato da tutti i
~~cut~~ cut orientati di G .

Se l'orientamento di $\vec{V}_{cut}$ è associato all'albero A , si
 assume concorde a quella del lato di A che fa parte di quel cut set,
 la matrice V^* del teorema precedente è proprio la
 matrice inversa di $R^{(v-1) \times (v-1)}$.

Teorema 7. ha. $\vec{Z}_c$ la matrice di cut set di un graf connesso,
 di ordine v , e ne $\vec{Z}_c^*$ una matrice costituita da $v-1$ righe indipendenti.
 Una matrice quadrata $\vec{D}$ di $\vec{Z}_c^*$, di ordine $v-1$
 è non singolare se e solo se le sue colonne corrispondono
 ai lati di un albero.

Prova: si ripetono quelle di prop 7 ed 8 di § 2.4. □

Le $\vec{Z}_c^*$ è una matrice di $\vec{Z}_c$ costituita con $p = v-1$ righe indipendenti
 (G si suppone connesso!), c'è corrispondenza biunivoca fra le matrici
 quadrate non singolari di ordine p in $\vec{Z}_c^*$ e gli alberi di G .

Esercizio 8. Lo spazio generato dalle righe di $\vec{Z}_c$ e di $\vec{M}_c$ con esclusione
 se G è connesso è uno spazio.

Esercizio 9. Si estende la teoria esposta in questo capitolo ai grafi
 non connessi.

Si verifica che restano validi i risultati di Es. 3, 4, 8 e
 dei teoremi 5, 6 (con $p = v-c$), 7 (all'albero si sostituisce
 una foresta).