

4 Reti e leggi di Kirchhoff.

4.1 Concetto di rete.

Def 1. Una rete N è una coppia di graf orientati, (N_I, N_V) , aventi lo stesso multigrafo associato. Si suppone che N sia privo di cappi (*)

In altre parole, assegnare una rete N equivale ad assegnare un multigrafo ed a fornire su ogni lato di esso una coppia di orientamenti.

Il primo termine della coppia (N_I, N_V) si dice graf delle correnti, il secondo graf delle tensioni.

Graficamente, una rete N si dà disegnandone il multigrafo ed orientandolo due volte ogni suo lato: usualmente l'orientazione relativa ad N_I si dà con una freccia (in figura, il lato è



orientato con origine in x_h e termine in x_k), e quella relativa ad N_V si dà con un segno + (in figura il lato è orientato con origine in x_k e termine in x_h)



Se un lato l ha le due orientazioni concordi, si dice che per esso si è assegnata la convenzione dell'utilizzatore, se ha le due orientazioni discordi, si parlerà di convenzione del generatore.



utilizzatore



generatore



Ad uno stesso multigrafo possono essere associate reti diverse, a seconda degli orientamenti scelti sui lati: esse si dicono reti analoghe.

(*) In realtà questa ipotesi può essere rovinata, a prezzo di operare spesso facendo in vari sottocasi. Ma per semplificare ci asteneremo da ciò.

Ad una rete N restano associate due matrici di incidenza $(\vec{m}_I, \vec{m}_V)$:
 se due reti N', N'' sono analoghe, e se $(\vec{m}'_I, \vec{m}'_V)$ $(\vec{m}''_I, \vec{m}''_V)$
 sono le coppie di matrici associate, esistono due matrici quadrate,
 diagonali, di ordine $e \times e$ (e sono - al solito - i lati del graf),
 con diagonale costituite da $+1$ e -1

$$(U_I^*, U_V^*)$$

tali che

$$\vec{m}'_I = \vec{m}''_I U_I^* \quad \vec{m}'_V = \vec{m}''_V U_V^* \quad (1)$$

Vicewise, al variare della coppia (U_I^*, U_V^*) si ottengono, tramite le (1), tutte le reti analoghe ad una assegnata; in altre parole le coppie (U_I^*, U_V^*) rappresentano il gruppo delle trasformazioni di orientamento sull'unione delle $2^e \cdot 2^e = 2^{2e}$ reti associabili al medesimo multigrafo.

Si noti, per concludere, che esiste una matrice U^* , sempre del tipo descritto, che trasforma $\vec{m}_I$ in $\vec{m}_V$ (essa è la matrice unita se su ogni lato nega la convergenza dell'utilizzatore, e l'opposto della matrice unita se su ogni lato nega la convergenza del generatore, etc... In ogni caso $U^* \cdot U^* = \mathbb{I}$ per le stesse matrici "porte" da $\vec{m}_I$ in $\vec{m}_V$ e viceversa)

4.2 Enunciato e conseguenze delle leggi di Kirchhoff.

Si dà una rete $N = (N_E, N_V)$, di e lati, ed uno spazio $\mathcal{G}$ su $\mathbb{R}$.

Def 1. Una e-upla di ~~numeri~~ vettori di $\mathcal{G}$

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} i_e \\ \vdots \\ i_e \end{bmatrix}$$

soddisfa la prima legge di Kirchhoff (KCL) se risulta

$$\vec{M}_I \vec{i} = 0$$

con $\vec{M}_I$, al solito, matrice d'incidenza di N_I .

La componente i_e si dice "corrente" sull' e -esimo ramo della rete.

Esercizio. Se N' è analoga ad N'' , e se $\vec{M}_I' = \vec{M}_I'' U_I^*$,
allora $\vec{i}'$ soddisfa (KCL) in N' se e solo se $U_I^* \vec{i}'$
soddisfa (KCL) in N'' .

Def 2. Una e-upla di ~~numeri~~ vettori di $\mathcal{G}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_2 \end{bmatrix}$$

soddisfa la seconda legge di Kirchhoff (KVL) se risulta

$$\vec{Z}_V \vec{v} = 0$$

con $\vec{Z}_V$ matrice dei circuiti di N_V .

Naturalmente, al grafo delle tensioni N_V sono associate diverse matrici $\vec{Z}_V$, a seconda dell'orientamento arbitrariamente scelto sui circuiti.

Le trasformazioni di orientamento sulle matrici dei circuiti sono rappresentate da matrici quadrate diagonali, ad elementi ± 1 , di dimensioni $K \times K$, se i circuiti del grafo sono in numero di K :

$$\vec{Z}_V' = W^* \vec{Z}_V''$$

È ovvio che

$$\vec{Z}_V' \vec{v} = 0 \Rightarrow W^* \vec{Z}_V'' \vec{v} = 0$$

- coniche v soddisfa (KVL), con riferimento al grafo N , indipendentemente dall'orientazione dei circuiti.

La componente v_h si dice "tensione" sull' h -esimo ramo della rete.

Esercizio: Se N' è analogo ad N'' , e se $\vec{Z}'_V, \vec{Z}''_V$ sono due matrici dei circuiti associate rispettivamente ad N' e ad N'' , nelle solite notazioni si ha

$$\vec{Z}'_V = W^* \vec{Z}''_V U_V^*$$

Se w' soddisfa (KVL) in N' , $U_V^* w'$ soddisfa (KVL) in N'' .

Esercizio: Si verifichino i fatti seguenti:

- se i verifica (KCL), la somma delle correnti "entranti algebricamente" in un nodo è nulla.
- se v verifica (KVL), la somma delle tensioni valutate lungo una maglia (= circuito) orientata è nulla.
- se un vertice ha grado 1, la corrente sul lato incidente è nulla.

Osservazione: in quanto precede si è supposto - con grande generalità - che i e v siano $\mathbb{R}$ -upli di vettori di uno spazio G .

Di solito G risulta essere

(i) $G = \mathbb{R}$ (correnti istantanee)

(ii) $G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (funzioni reali di variabile reale: correnti come funzioni del tempo)

(iii) $G = \mathcal{D}^*$ (funzioni generalizzate)

(iv) $G = \mathcal{LC}$ (spazio delle trasformate di Laplace di funzioni generalizzate) ----

etc --

Rh. 3 Se $G = \mathbb{R}$, le soluzioni di

$$\bar{M}_I i = 0$$

sono un sottospazio di dimensione p , e le soluzioni di

$$\vec{Z}_V v = 0$$

sono un sottospazio di dimensione q .

Prova. È immediato verificare che le soluzioni sono sottospazi. D'altra parte, il nucleo di una transf. lineare ha per

43
~~il rango delle matrici che esprime tale trasformazione. Dunque~~
 la conclusione, alla luce del Th. 6 di § 3.1 e 3 di § 3.2. $\square$

Si dice anche convenientemente che ci sono p equazioni indipendenti alle correnti e v equazioni indipendenti alle tensioni: esse possono ottenersi scegliendo una sottomatrice $\vec{M}_I^*$ di $\vec{M}_I$, contenente p righe indipendenti, ed una sottomatrice $\vec{Z}_V^*$ di $\vec{Z}_V$, contenente v righe indipendenti:

$$\vec{M}_I^* \vec{i} = 0$$

$$\vec{Z}_V^* \vec{v} = 0$$

Teorema 4. Se A è un albero delle rete canonica N , le tensioni sui rami del coalbero di A sono conclusioni lineari delle tensioni sui rami di A , le correnti sui rami di A sono c. l. di quelle sui rami del coalbero di A .

Prova: Nella matrice $\vec{M}_I^*$, di ordine $(v-1) \times e$, sono le prime $v-1$ colonne quelle afferenti all'albero A .
 E' noto (Th 7 di § 3.1) che tali colonne costituiscono una matrice non singolare α .

$$\vec{M}_I^* = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \end{array} \right]_{v-1}^{e-v+1}$$

Per lo stesso motivo anche il vettore corrente

$$\vec{i} = \left[\begin{array}{c} \vec{y}_A \\ \vec{y}_C \end{array} \right]_{v-1}^{e-v+1}$$

Risulta

$$\left[\alpha \mid \beta \right] \begin{bmatrix} \vec{y}_A \\ \vec{y}_C \end{bmatrix} = 0 = \alpha \vec{y}_A + \beta \vec{y}_C$$

e poiché α è non singolare

$$\vec{y}_A = -\alpha^{-1} \beta \vec{y}_C$$

Analogo prova per la seconda parte del Th. $\square$

Leven 3 e 4 esprimono il fatto ben noto che in una rete connessa (KCL) consente di fissare arbitrariamente le correnti di un co-albero, e quella sull'albero corrispondenti rimangono univocamente determinate; dualmente per la (KVL).

Esercizio: se N è una rete non connessa, il Leven 4 si modifica in modo ovvio, sostituendo alle nozioni di albero quelle di foresta.

Si vede infatti - molto - che le correnti e le tensioni in una componente connessa della rete non dipendono - per quanto si riferisce ai legami imposti da (KVL) e (KCL) da correnti e tensioni nelle altre componenti connessa.

Th. 5 Se $\vec{Q}_I$ è la matrice dei cut-set orientati di N_I in una rete connessa, si equivalgono

$$\vec{Q}_I \vec{i} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{M}_I \vec{i} = 0$$

Prova. Consideriamo le matrici $\vec{Q}_I^*$ e $\vec{M}_I^*$ di ordine $p \times e$, e di rango p . Come esistono certamente, per quanto visto in precedenza, ad ogni riga di $\vec{Q}_I$ (di $\vec{M}_I$) non contenuta in $\vec{Q}_I^*$ (in $\vec{M}_I^*$) è combinazione lineare in $\mathbb{R}$ di righe di $\vec{Q}_I^*$ (di $\vec{M}_I^*$).

È allora facile vedere che

$$\vec{Q}_I^* \vec{i} = 0 \iff \vec{Q}_I \vec{i} = 0$$

$$\vec{M}_I^* \vec{i} = 0 \iff \vec{M}_I \vec{i} = 0$$

Ma $\vec{Q}_I^*$, $\vec{M}_I^*$ generano in $\mathbb{R}^e$ lo stesso spazio vettoriale di dimensioni p con le loro righe, in che esiste una matrice non singolare S , che esprime una trasformazione di base in tale spazio. Perciò:

$$S \vec{M}_I^* = \vec{Q}_I^*$$

È facile concludere che

$$\vec{Q}_I^* \vec{i} = 0 \iff S \vec{M}_I^* \vec{i} = 0 \iff \vec{M}_I^* \vec{i} = 0$$

$$\vec{Q}_I \vec{i} = 0 \implies S^{-1} \vec{Q}_I^* \vec{i} = 0 \implies \vec{M}_I^* \vec{i} = 0$$

Estendendo la nozione di cut-set orientato ai grafi non connessi, il th. 5 vale per ogni rete, e che $\text{dc}(\mathcal{C})$ equivale alla $\vec{\mathcal{I}}_{\perp}^{\#} \vec{0} = 0$

Si noti che $\vec{\mathcal{I}}_{\perp}^{\#} \vec{0} = 0$ esprime il fatto che le correnti che attraversano una sezione completa di una rete hanno somma algebrica nulla.

4.3 Correnti di maglie e potenziali ai nodi.

Per semplicità, ci limiteremo alle reti connesse; quanto si dirà si estende ai meshi ovrero alle reti non connesse, ragionando sulle loro componenti.

Th 1: $\vec{u}$ soddisfa (KCL) se e solo se risulta

$$\vec{u} = \left(\vec{Z}_I^* \right)^T \vec{j}$$

con $\vec{j} \in G^V$.

Prova: se risulta

$$\vec{u} = \left(\vec{Z}_I^* \right)^T \vec{j}$$

allora

$$\vec{M}_I^* \vec{u} = \vec{M}_I^* \left(\vec{Z}_I^* \right)^T \vec{j} = 0$$

ricordando che le righe delle due matrici sono ortogonali.

Tiavene, se $\vec{M}_I^* \vec{u} = 0$, e siano $\{i_1, \dots, i_r\}$ ($r \leq e$)

una base per lo spazio $\langle i_1, i_2, \dots, i_e \rangle$.

Allora esiste una matrice L di dimensioni $e \times r$, a valori in $\mathbb{R}$, per cui.

$$\vec{u} = L \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix}$$

Dalla

$$\vec{M}_I^* L \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_r \end{bmatrix} = 0$$

si trae

~~non nulla~~ (per l'indipendenza delle $i_1, \dots, i_r$)

$$\vec{M}_I^* L = 0$$

e pertanto le colonne di L sono ortogonali alle righe di $\vec{M}_I^*$. E' noto, peraltro, che lo spazio ortogonale a quello delle righe di $\vec{M}_I^*$ è generato dalle righe di $\vec{Z}_I^*$, in che ogni colonna di L è combinazione di righe di $\vec{Z}_I^*$.

Ciò equivale a dire che esiste una matrice S , di dimensione $v \times r$, a valori in $\mathbb{R}$, per cui.

$$\left(\vec{Z}_I^* \right)^T \cdot S = L$$

E' allora ovvio che il vettore

$$\vec{j} = S \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$$

è il vettore cercato di G^v . □

Esercizio. da seconda parte del teorema si può semplificare in modo notevole e si suppone $G = \mathbb{R}$. Come?

Le componenti di $\vec{j}$ sono dette le "correnti di maglia" relative al sistema fondamentale di circuiti di $\vec{E}_I^*$. Il th. 1 si legge allora nel modo consueto:

"Un sistema di correnti $\vec{j}$ verifica (KCL) se e solo se è il risultato di una v -upla di correnti, $\vec{j}$, ciascuna circolante in un circuito di un sistema fondamentale di circuiti".

Sempre riferendosi a reti connesse, si prova, in modo duale a quello usato nel Th. 1, il

Th. 2 v soddisfa (KVL) se e solo se risulta

$$v = (\vec{m}_v^*)^T P \quad (1)$$

con $P \in G^p$. □

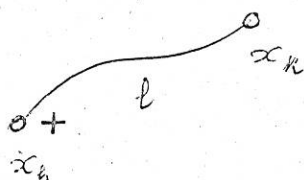
(naturalmente p è il rango, v è la nullità del grafo N).

Le componenti di P sono dette i "potenziali ai nodi" corrispondenti ai vertici del sistema fondamentale scelto per costruire $\vec{m}_v^*$. E' noto che tale sistema è una arbitraria $(v-1)$ upla di vertici. Il th. 2 si legge allora nel modo usuale:

"Un sistema di tensioni v soddisfa (KVL) se e solo se può interpretarsi come risultanti di una $(v-1)$ upla di potenziali, P , ciascuno relativo ad ~~un vertice~~ un vertice di un sistema fondamentale di vertici".

E' facile verificare che la (1) comporta che la tensione su un

Exemplo:



$$U_L = p(x_n) - p(x_R)$$

[Signature]

Prove

Perché le righe di $\vec{M}_v^*$ e di $\vec{Q}_v^*$ generano lo stesso spazio vettoriale, di dimensione $v-1$, in $\mathbb{R}^v$, ed anzi, per la indipendenza lineare, ne sono due basi, esiste una matrice non singolare S , a valori in $\mathbb{R}$, di dimensioni $(v-1) \times (v-1)$, tale che

$$S \vec{m}_v^* = \vec{Q}_v^*$$

Allora, dalla

$$v = (\vec{m}_v^x)^T P$$

in full

$$W = (\vec{m}_v^{*T} S^T) (S^{-1})^T P = (\vec{Q}_v^{*T})^T (S^{-1})^T P$$

ed il vettore $(S^{-1})^T P$  costituisce il ~~unico~~ vettore
dei potenziali: ~~di cui set~~ con riferimento alla matrice $\tilde{Q}_v$.
Viceversa, - modo analogo, delle

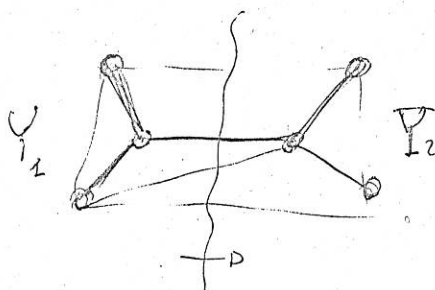
$$W \rightarrow \vec{Q}_v^* T P$$

gi hae la

$$w = \vec{m}_v^*{}^T (S^T P)$$

Nel caso della matrice $\vec{L}_v^x$,  il vettore dei polinomi ~~di cui set~~ ^{di cui set} ha ancora $(v-1)$ componenti ~~che si possono interpretare~~, che si possono interpretare,

... ciascuna, come d.d.p. fra i due insiemi di ^{vertici} ~~spazi~~, γ_1 ed γ_2 .



in cui il cut set ad una relativa spezza l'insieme X .

Allora la componente di $\mathcal{V}$, relativa ad un lato prefinito, è la risultante algebrica delle d.d.p. dei cut set fondamentali che contengono tale lato.

4.4 Il teorema di Tellegen.

avv

Provare che per una rete, con grafici correnti e tensioni N_I, N_V , e sia $\vec{m}_I = \pm \vec{m}_V$ (cioè in ogni istante si è avuta la medesima convergenza delle potenze).

Th. 1 (Tellegen) Sia $G = \mathbb{R}$. Se $\vec{u}$ non fu (KCL) e $\vec{v}$ non fu (KVL) allora

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = 0 \quad (1)$$

Prova. Th. 1 e 2 del precedente paragrafo

$$\vec{u} = (\vec{Z}_I^*)^T \vec{j}$$

$$\vec{v} = (\vec{m}_V^*)^T \vec{P} = \pm (\vec{m}_I^*)^T \vec{P}$$

moltiplichiamo

$$\vec{u}^T \vec{v} = \pm \vec{j}^T (\vec{Z}_I^*) (\vec{m}_I^*)^T \vec{P} = 0$$

perché risulta sempre

$$\vec{Z}_I^* (\vec{m}_I^*)^T = 0$$

□

Esercizio 2 Sia invece $G = \mathbb{C}$, e si $(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T \vec{v}$.

Allora, se $\vec{u}, \vec{v}$ soddisfanno (KCL) e (KVL), $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Analogamente, se $G = \mathbb{L}$ ed $(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T \vec{v}$.

Esercizio 3 Sia invece $G = \mathbb{L}$ (spazio delle funzioni a quadrato integrabile, ed $\vec{u} \times \vec{v} = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) v_i(t) dt$

Allora $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ se $\vec{u}, \vec{v}$ soddisfanno (KCL) e (KVL)

Osservazione. G non può essere scelto del tutto generico: in G è essenziale che sia definita ^{una operazione lineare} ~~tramite~~ operazioni ~~di moltiplicazione~~ (operazioni di "anello") sulle componenti.

Ad esempio, se $G = \mathcal{D}^*$ (spazio delle distribuzioni) non ha la moltiplicazione (non ha significato il prodotto $\delta \cdot \delta$!!) e in $\mathcal{D}^*$ non è verificata una qualche forma del teorema di Tellegen.

Esercizio 4 Se $\vec{m}_I = \vec{m}_V U^*$, allora $\vec{m}_I^* = \vec{m}_V^* U^*$.

Come si modifica, in questo caso, la formula (1)?

È noto che il Th. 1 esprime la conservazione dell'energia in una rete isolata, quando si interpreta il prodotto $v_k i_k$ come potenza assorbita sul ramo k -esimo sul quale vige la convenzione dell'utilizzatore.

Sia ora $G = \mathbb{R}$, e sia N dotata in ogni ramo della medesima convenzione delle potenze.

Chiameremo, per brevità, (TL) la (1).

Th. 2 : Se, per ogni $\vec{i}$ verificante (KCL), $\vec{i}^T \vec{v}$ verifica (TL) allora $\vec{v}$ verifica (KVL).

Analogo risultato vale scambiando $\vec{i}$ con $\vec{v}$.

Prova. $\vec{i}$ verifica (KCL) se e solo se è ortogonale alle righe di $\vec{M}_I^*$, cioè se e solo se appartiene allo spazio generato dalle righe di $\vec{K}_I^* = \pm \vec{K}_V^*$.

Quindi, se $\vec{v}$ è ortogonale ad ogni $\vec{i}$ che verifica (KCL), è ortogonale a tutte le righe di $\vec{K}_V^*$, e quindi verifica la

$$\vec{K}_V^* \vec{v} = 0,$$

che è (KVL).

□

Il teorema (2) si enuncia di solito brevemente dicendo che (TL) può essere sostituita ad una delle due leggi di Kirchhoff.