

I) RICHIAMI DI ANALISI DEI SISTEMI LINEARI CONTINUI

1. Definizione di sistema

Richiamiamo qui di seguito la definizione di sistema dinamico stazionario: i fatti fondamentali sono supposti noti dal corso di Teoria dei Sistemi, ed il presente paragrafo ha soprattutto lo scopo di fissare le notazioni che verranno utilizzate.

Def. 1. Un sistema dinamico stazionario Σ è una 8-upla, che indichiamo con

$$\Sigma = (T, U, \mathcal{Q}, Y, \mathcal{A}, X, \phi, r),$$

per cui valgono le seguenti condizioni e la seguente nomenclatura:

- (i) T è detto "asse dei tempi", ed è $T = \mathbb{Z}$ (sistemi discreti) oppure $T = \mathbb{R}$ (sistemi continui).
- (ii) U è un insieme, finito o infinito, detto "alfabeto d'ingresso".
- (iii) $\mathcal{Q}$ è un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni da T in U

$$\mathcal{Q} \subseteq U^T$$

detto insieme delle "funzioni di ingresso", o insieme degli "ingressi". $\mathcal{Q}$ verifica gli assiomi seguenti:

a - è chiuso rispetto al concatenamento: se u_1 ed u_2 sono elementi di $\mathcal{Q}$, allora la funzione v , "concatenamento di u_1 e di u_2 in t_0 ", definita come

$$v(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{per } t < t_0 \\ u_2(t) & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

è ancora elemento di $\mathcal{Q}$.

b - esiste un elemento $\alpha^* \in U$ tale che per ogni funzione di ingresso $u \in \mathcal{Q}$ sia possibile individuare un tempo $t_0 \in T$ (*) prima del quale $u(t)$ vale costantemente α^* :

$$u(t) = \alpha^* \quad \forall t < t_0$$

In fig. (1) si è rappresentato in ascisse il tempo T di scarto, ed in ordinate l'alfabeto U : l'insieme dei pun-

(*) l'istante t_0 dipende dalla funzione d'ingresso u considerata.

ti segnati con $\bullet$ è il grafico di una particolare funzione di ingresso.

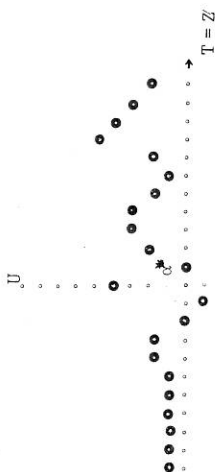


Fig. 1

(iv) Y è un insieme, finito o infinito, detto alfabeto di uscita. Si osservi che, in generale, non è necessariamente $U = Y$.

(v) $\mathcal{U}$ è un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni di T in Y

$$\mathcal{U} \subseteq Y^T$$

detto "insieme delle funzioni di uscita" o "insieme delle uscite"

(vi) X è un insieme, detto "insieme degli stati"

(vii) ϕ è la "mappa di transizione di stato" (°°)

$$\phi : T_A^2 \times X \times \mathcal{U} \rightarrow X$$

$$\phi : (t_1, t_2, x, u) \mapsto \phi(t_1, t_2, x, u)$$

ϕ verifica i seguenti assiomi:

a - CAUSALITA': se $u_1 \equiv u_2$ sull'intervallo $[t_0, t_1]$, allora, per ogni $x_0 \in X$

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u_1) = \phi(t_1, t_0, x_0, u_2)$$

b - CONSISTENZA: per ogni u, x_0, t_0

$$\phi(t_0, t_0, x_0, u) = x_0$$

c - PROPRIETA' DI SEMIGRUPPO: per ogni $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ e per ogni u, x_0

$$\phi(t_2, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0, u), u) = \phi(t_2, t_0, x_0, u)$$

(°°) con T_A^2 si indicano le coppie (t_1, t_2) con $t_1 \geq t_2$, $t_1 \in T$, $t_2 \in T$.

d - STAZIONARIETA': per ogni t_1, t_0, τ, x_0, u

$$\phi(t_1 + \tau, t_0 + \tau, x_0, u(t - \tau)) = \phi(t_1, t_0, x_0, u(t))$$

(viii) x è detta "mappa di uscita" (readout map):

$$r: X \times U \rightarrow Y$$

$$r: (x, u) \rightarrow r(x, u)$$

Essa è tale che la funzione di t_1

$$r(\phi(t_1, t_0, x_0, u), u(t_1)),$$

definita per $t_1 \geq t_0$, è la restrizione a $[t_0, \infty)$ di quella che elemento di $\mathcal{U}$.

Noi diremo $\phi(t_1, t_0, x_0, u)$ lo stato raggiunto al tempo $t_1 \geq t_0$ partendo dallo stato x_0 al tempo t_0 ed applicando l'ingresso u , e diremo $r(x, u)$ il valore dell'alfabeto d'uscita risultante dallo stato x e dal valore u dell'alfabeto d'ingresso. Si noti poi che, per la stazionarietà, la mappa ϕ può essere assegnata completamente assumendo sempre $t_0 = 0$.

La definizione 1 corrisponde in modo stretto alla comune intuizione di "sistema", della quale è una formalizzazione di vasta portata. E' usuale, infatti, pensare ad un sistema come ad una mappa che legghi un certo insieme (qui chiamato $\mathcal{U}$) di "ingressi" ad un altro insieme (qui chiamato $\mathcal{Y}$) di "uscite".

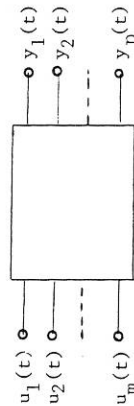


Fig. 2

Tale mappa è assunta causale, nel senso che le uscite nel generico istante t_0 non possono essere in alcun modo legate ai valori che le funzioni d'ingresso assumono per tempi successivi a t_0 .

Inoltre, quando si è interessati all'andamento delle funzioni di uscita per tempi successivi ad un certo istante t_0 , non è solitamente possibile prevederlo utilizzando soltanto la forma degli ingressi

si per $t \geq t_0$: eccettuati casi particolari (legami i/o senza "memoria") le uscite per $t \geq t_0$ dipendono anche dalla forma degli ingressi per $t < t_0$. Basta pensare, tanto per non uscire dalla teoria dei circuiti, al legame v/i su un induttore: la conoscenza della tensione per $t \geq t_0$ non è sufficiente ad individuare la $i(t)$ per $t \geq t_0$, in quanto quest'ultima dipende anche dall'andamento di $v(t)$ per $t < t_0$.

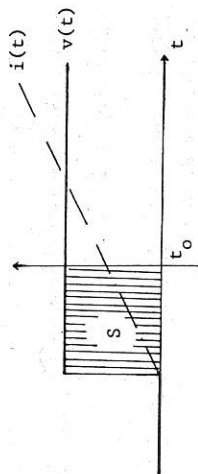


fig. 3

In generale, possiamo assumere che, stante il legame causa/effetto, ad ogni istante l'uscita dipende solo dalla "storia" della sollecitazione antecedente e dalla sollecitazione attuale. D'altra parte, non tutti i lineamenti della sollecitazione trascorsa contribuiscono alla risposta attuale: nel caso dell'induttore, p. es., ogni ingresso v il cui grafico per $t < t_0$ sottenda un'area eguale all'area S tratteggiata contribuirà in egual modo a determinare i per $t \geq t_0$.

L'insieme X degli stati va inteso - intuitivamente - come la "memoria" del sistema, che ritiene almeno quegli schemi semplificati e ridotti della sollecitazione passata che possono influenzare la risposta attuale (nell'esempio considerato, la memoria è il valore della corrente che l'ingresso applicato fino all'istante t_0 ha provocato nell'istante t_0).

A questo punto, è un utile esercizio interpretare in termini intuitivi gli oggetti che entrano nella definizione di sistema dinamico e le proprietà cui sono stati vincolati con assiomi. Ad esempio, l'assunzione (iii, b) sull'insieme delle funzioni d'ingresso corrisponde a considerare sollecitazioni che dipendono dal tempo soltanto dopo qualche istante finito: nel caso in cui è $U = \mathbb{R}^m$, con $\mathbb{R}$ corpo numerico arbitrario, usualmente α^* è il vettore nullo

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (m \text{ righe})$$

Con ciò si ritengono ammissibili soltanto sollecitazioni applicate da un tempo finito, mettendosi al "riparo" da problemi di convergenza che potrebbero presentarsi considerando sollecitazioni applicate da $t = -\infty$.

L'assunzione (vii, a) è una formalizzazione dell'idea che lo stato x_0 in t_0 e l'ingresso u per $t_1 \geq t \geq t_0$ sono completamente sufficienti a determinare univocamente l'uscita al tempo t_1 successivo a t_0 . E' facile verificare che (vii, a) insieme alla struttura "istantanea" della mappa r implica la causalità del legame i/o, nel senso che l'ingresso futuro non può influenzare l'uscita attuale.

2. Proprietà dell'insieme degli stati RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA'

Def. 1. Lo stato $x_1 \in X$ è detto raggiungibile dallo stato $x_0 \in X$ se esiste un ingresso $u \in \mathcal{U}$ che porta il sistema dallo stato x_0 al tempo t_0 allo stato x_1 in qualche istante $t_1 \geq t_0$:

$$\phi(t_1, t_0, x_0, u) = x_1$$

In altre parole, x_1 deve appartenere all'immagine della mappa ϕ quando questa abbia x_0 come terza componente del dominio. L'insieme degli stati raggiungibili da x_0 sarà indicato con

$$X_R(x_0)$$

ed è appunto l'immagine della mappa $\phi(., ., t_0, .)$.

Def. 2. L'insieme degli stati X si dice completamente raggiungibile da x_0 se risulta

$$X_R(x_0) = X$$

Def. 3. Lo stato $x_1 \in X$ è detto controllabile allo stato $x_0 \in X$ se $x_0 \in X_R(x_1)$ raggiungibile da x_1 .

In altre parole, x_0 appartiene all'immagine di ϕ , quando ϕ abbia x_1 come terza componente del dominio.

L'insieme degli stati controllabili ad x_0 sarà indicato con

$$X_C(x_0)$$

ed è l'immagine inversa dello stato x_0 secondo la mappa ϕ :

$$X_c(x_0) = \phi^{-1}(x_0)$$

Def. 4. L'insieme degli stati X si dice completamente controllabile ad x_0 se risulta

$$X_c(x_0) = X$$

Def. 5. X è detto connesso se è completamente raggiungibile da ogni $x_0 \in X$.

Esercizio 1. Sono equivalenti i seguenti fatti: (i) X è connesso; (ii) X è completamente controllabile ad ogni $x_0 \in X$; (iii) esiste uno stato x_0 tale che $X = X_c(x_0) = X_R(x_0)$.

OSSERVABILITÀ E RICOSTRUIBILITÀ

Mentre i concetti di controllabilità e di raggiungibilità fanno riferimento alla possibilità di agire sullo stato per portarlo ai valori desiderati, i concetti che ora introdurremo si riferiscono alla possibilità di conoscere dall'esterno (ossia dai terminali d'ingresso e di uscita) qual'è il valore dello stato del sistema.

Def. 6. Il sistema dinamico Σ è detto osservabile se dalla conoscenza dell'ingresso u e dell'uscita conseguente y sull'intervallo $[t_0, +\infty)$ è sempre possibile individuare univocamente lo stato di partenza x_0 in t_0 .

È ovvio che se Σ è osservabile, e se $x_1 \neq x_2$ sono stati di X e se $u \in \mathcal{U}$, allora per qualche $t \geq t_0$ risulta

$$r(\phi(t, t_0, x_1, u), u(t)) \neq r(\phi(t, t_0, x_2, u), u(t))$$

Mentre l'osservabilità si riferisce alla possibilità di dedurre lo stato presente in t_0 dalla conoscenza dell'uscita futura (i.e. successiva a t_0) la ricostruibilità si riferisce alla possibilità di riconoscere lo stato in t_0 utilizzando l'uscita antecedente a t_0 .

Def. 7. Il sistema dinamico Σ ha insieme degli stati ricostruibili se dalla conoscenza dell'ingresso u e dell'uscita conseguente y sull'intervallo $(-\infty, t_0]$ è possibile individuare lo stato x_0 raggiunto in t_0 .

3. Rappresentazione differenziale dei sistemi lineari stazionari

Def. 1. Un sistema dinamico stazionario $\Sigma = (T, U, \mathcal{U}, Y, \mathcal{Y}, X, \phi, r)$ è detto lineare sul corpo $\mathbb{F}$ se

- (i) U ed $\mathcal{U}$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{F}$
- (ii) Y ed $\mathcal{Y}$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{F}$
- (iii) X è spazio vettoriale su $\mathbb{F}$
- (iv) $\phi(t_1, t_0, \cdot, \cdot)$ è una trasformazione lineare da $X \times \mathcal{U}$ in X , cioè

$$k\phi(t_1, t_0, x, u) = \phi(t_1, t_0, kx, ku)$$

$$\phi(t_1, t_0, x, u) + \phi(t_1, t_0, x', u') = \phi(t_1, t_0, x+x', u+u')$$

- (v) r è una trasformazione lineare da $X \times U$ in Y , cioè

$$kr(x, u) = r(kx, ku)$$

$$r(x+x', u+u') = r(x, u) + r(x', u')$$

La seconda relazione di (iv) - p. es - si interpreta dicendo che se fra t_0 e t_1 u porta Σ dallo stato x allo stato z ed u' porta Σ dallo stato x' allo stato z' , allora fra t_0 e t_1 $u+u'$ porta Σ dallo stato $x+x'$ allo stato $z+z'$. (sotto quali ipotesi vale allora la cosiddetta "sovrapposizione degli effetti" nei sistemi lineari?).

Def. 2. Un sistema lineare sul corpo $\mathbb{F}$ si dice di dimensione finita se $\underline{X} = U = \mathbb{F}^m$, $Y = \mathbb{F}^p$ per opportuni interi non negativi m e p ($^{\circ}$), e se $\dim X = n < \infty$.

L'intero non negativo n è detto allora "dimensione del sistema Σ ".

Nel seguito ci occuperemo quasi esclusivamente di sistemi lineari di dimensione finita, continui ($T = \mathbb{R}$), ed assumeremo inoltre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Lemma 1. L'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

($^{\circ}$) m e p sono detti, rispettivamente, "numero degli ingressi" e "numero delle uscite" di Σ .

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, ha una ed una sola soluzione per la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$. Tale soluzione è espressa dalla

$$x(t) = \exp(A(t-t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \quad (3.2)$$

prova. L'unicità della soluzione è assicurata da teoremi standard della teoria delle equazioni differenziali ordinarie. (3.2) è poi effettivamente soluzione di (3.1), perchè, tenuto conto delle proprietà degli asponenziali di matrice, si vede subito che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\exp(A(t-t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds) &= \\ &= A \exp(A(t-t_0))x_0 + Bu(t) + \int_{t_0}^t A \exp(A(t-s))Bu(s)ds = \\ &= A \left[\exp(A(t-t_0))x_0 + \int_{t_0}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds \right] + Bu(t) = \\ &= A x(t) + Bu(t). \end{aligned}$$

Prop. 1. Il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D_0 u \end{aligned} \quad (3.3)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_0 \in \mathbb{R}^{p \times m}$ rappresenta un sistema lineare di dimensione finita n .

prova. Infatti, per ogni stato iniziale x_0 all'istante t_0 , la soluzione (3.2) della prima equazione può essere assunta come espressione esplicita per $\phi(t, t_0, x_0, u)$. La seconda relazione di (3.3) gode d'altra parte delle proprietà della mappa di read-out.

E' noto da altri corsi che la mappa di transizione di stato di un sistema soddisfacente le ipotesi della Def. 2 può essere sempre rappresentata dalla formula

$$\phi(t, t_0, x_0, u) = \phi(t-t_0)x_0 + \int_{t_0}^t H(t-s)u(s)ds \quad (3.4)$$

in cui $\phi(\xi)$ ed $H(\xi)$ sono opportune matrici, dipendenti da ξ , di dimensioni $n \times n$ ed $n \times m$. Nel seguito supporremo sempre verificate le condizioni di "regolarità" su $\phi(\xi)$ e su $H(\xi)$ che consentono di passare dalla equazione (3.4) alla (3.3), e con la sigla LS intendere un sistema lineare della forma (3.3). Tale sistema sarà anche indicato con $\Sigma = (A, B, C, D_0)$.

Osservazione. Nella (3.2), come del resto nella più generale (3.4), si distinguono due addendi: il termine di evoluzione libera $\exp(A(t-t_0))x_0$, che dà l'evoluzione dello stato quando è nullo l'ingresso applicato a partire dall'istante t_0 , ed il termine di evoluzione forzata $\int_{t_0}^t \exp(A(t-s))Bu(s)ds$ che dà l'evoluzione dello stato quando si parte in t_0 dallo stato nullo e si sollecita Σ con lo ingresso u .

Una generalizzazione utile di (3.3) è costituita dal sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + \sum_{i=0}^d D_i \frac{d^i u}{dt^i} \end{aligned} \quad (3.5)$$

E' chiaro che la equazione (3.5.2) non è una vera mappa di read-out, nel senso da noi definito nel primo paragrafo, perchè la uscita dipende dalle derivate dell'ingresso fino all'ordine d .

Per questo motivo, e per non fare confusione coi sistemi (3.3) di più comune impiego, diremo che (3.5) rappresenta un sistema lineare generalizzato (GLS): $\Sigma = (A, B, C, D_0, \dots, D_d)$.

Si osservi - fra l'altro - che l'uscita può includere impulsi dei vari ordini in corrispondenza alle discontinuità dell'ingresso, o delle sue derivate, e che per la valutazione della uscita all'istante iniziale $t=0$ non basta fornire lo stato $x(0)$, ma anche i vettori $u(0_-)$, $du(0_-)/dt, \dots, d^{d-1}u(0_-)/dt^{d-1}$. In un certo senso, quindi, anche questi vettori rientrano nello stato del sistema giacchè sono necessari per determinare l'evoluzione di (3.5) (almeno nell'istante iniziale $t=0$).

Le equazioni (3.3) e (3.5) possono essere espresse nel dominio della variabile complessa s usando la trasformata di Laplace.

Conviene ricordare brevemente che se $F(s)$ è la trasformata di $f(t)$, allora

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^k f}{dt^k}\right) = s^k F(s) - s^{k-1} f(0_-) - s^{k-2} f'(0_-) \dots - f^{(k-1)}(0_-) \quad (3.6)$$

assumendo la condizione iniziale $x(0) = 0$, e ponendo

$$U(s) = \mathcal{L}(u(t))$$

$$X(s) = \mathcal{L}(x(t))$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$$

la (3.3) si ottengono subito le relazioni

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + D_0 U(s) \quad (3.7)$$

da (3.5) le relazioni

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + \sum_{i=0}^d D_i s^i U(s) + I(s) \quad (3.8)$$

(s) ha come antitrasformata impulsi dei vari ordini; la sua espressione esplicita è la seguente:

$$\begin{aligned} -I(s) = & \left[D_1 u(0_-) + D_2 u'(0_-) + \dots + D_d^{(d-1)} u^{(d-1)}(0_-) \right] + \\ & + s \left[D_2 u(0_-) + D_3 u'(0_-) + \dots + D_d^{(d-2)} u^{(d-2)}(0_-) \right] + \\ & + \dots + s^{(d-1)} D_d u^{(d-1)}(0_-) \end{aligned} \quad (3.9)$$

alla prima equazione di (3.7) e di (3.8) si ha

$$(sI - A) X(s) = BU(s)$$

poiché $(sI - A)$ è invertibile per ogni s , eccettuati i punti (in numero finito) corrispondenti agli autovalori di A , abbiamo, per (3.7) (3.8) rispettivamente:

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D_0 \right] U(s) \quad (3.10)$$

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + \sum_{i=0}^d D_i s^i \right] U(s) + I(s) \quad (3.11)$$

La matrice di funzioni razionali

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B + \sum_{i=0}^d D_i s^i \quad (3.12)$$

è chiamata "funzione di trasferimento" del sistema (generalizzato, se $d > 0$).

Conviene mettere in evidenza che, quando valgono le seguenti ipotesi:

- 1) il vettore di stato è 0 per $t=0$
- 2) i vettori $u(0_-)$, $u'(0_-)$, ..., $u^{(d-1)}(0_-)$ sono nulli

allora il legame fra $U(s)$ ed $Y(s)$ è espresso dalla relazione

$$Y(s) = W(s) U(s) \quad (3.13)$$

Ovviamente l'ipotesi 2) può essere soppressa nel caso dei sistemi non generalizzati, e per quelli generalizzati 2) può essere trascurata pur di considerare l'antitrasformata di (3.13) sul semiasse $(0, +\infty)$ privato dell'origine.

E' un facile esercizio verificare che:

- I poli (eventuali) di $W(s)$ al finito sono compresi fra gli autovalori di A

- Nei sistemi non generalizzati gli elementi di $W(s)$ hanno il numeratore di grado non superiore al grado del denominatore, ed è $D_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s)$

Con le solite convenzioni, $W(s)$ è una matrice $p \times m$, la cui colonna j -esima va interpretata come j^2 -trasformata della risposta ad un impulso applicato alla j -esima porta di ingresso, partendo dallo stato iniziale nullo e supponendo nulli i vettori $u(0)$, $u'(0)$, ..., $u^{(d-1)}(0)$.

Si lascia infine come esercizio la prova della

Prop.2. Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0, \dots, D_d)$ un (GLS) di dimensione n , e sia $W(s)$ la sua funzione di trasferimento.

Il sistema $\Sigma = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D_0, \dots, D_d)$ con M matrice invertibile di $\mathbb{R}^{n \times n}$, ha la medesima funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema Σ . ■

4. Controllabilità dei sistemi lineari

Alcuni risultati del presente paragrafo non sono dimostrati, perché se ne suppone nota la prova dal corso di Teoria dei Sistemi: un teo-
sto standard di riferimento è il Rinaldi [R1]; gli argomenti svolti qui di seguito si possono ritrovare, nella medesima veste, in Anderson [A1].

Il corpo su cui sono dati gli spazi vettoriali è $\mathbb{R}$.

Sia dato il sistema lineare (general. o non) Σ nella rappresentazione differenziale

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D u + \dots D_d \frac{d^d u}{dt^d} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Def. 1. La coppia (A, B) è completamente controllabile allo zero se, dato comunque $x_0 \in X$, esistono un intervallo $[t_0, t_1]$ ed un ingresso u che porta il sistema dallo stato x_0 in t_0 allo stato zero in t_1 .

La def. 1 non è altro che la definizione usuale di completa controllabilità del sistema Σ allo zero: $X_c(0) = X$; essa peraltro pone in evidenza il fatto, che la controllabilità dipende soltanto dalla struttura delle matrici A e B .

La completa controllabilità allo zero è sufficiente ad assicurare la connessione dello spazio degli stati: la prova di questo fatto fondamentale è argomento del

teor. 1. Sono equivalenti le proposizioni seguenti:

- (i) (A, B) è completamente controllabile allo zero
- (ii) se per ogni istante t risulta $x^T \exp(At) B = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) allora $x = 0$
- (iii) $\text{rank} [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n = \dim X$ (*)
- (iv) il "gramiano di controllabilità" $W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \exp(-A\sigma) B B^T \exp(-A^T \sigma) d\sigma$ ha nucleo nullo per ogni $t > t_0$
- (v) Σ è connesso

*) Con $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ si intende la matrice partizionata a blocchi, i cui blocchi sono appunto $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

prova. (i) $\Rightarrow$ (ii): per assurdo, esista $x_0 \neq 0$ tale che $x_0^T \exp(At) B$ sia nullo per ogni t . Per l'ipotesi di completa controllabilità a zero, esistono un intervallo $[t_0, t_1]$ ed un ingresso u che porta Σ dallo stato x_0 in t_0 allo stato 0 in t_1 . Tenuto conto di (3.2), abbiamo allora

$$0 = \exp(A(t_1 - t_0)) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp(A(t_1 - s)) B u(s) ds.$$

Moltiplicando i due membri a sinistra per $x_0^T \exp(A(t_0 - t_1))$ si ha

$$0 = x_0^T x_0 + \int_{t_0}^{t_1} x_0^T \exp(A(t_0 - s)) B u(s) ds = x_0^T x_0$$

perché $x_0^T \exp(A(t_0 - s)) B$ è nullo per ogni s .

Ma allora deve essere $x_0 = 0$, da cui l'assurdo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): per assurdo, sia $\text{rank} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$. Una volta trasposta, la matrice può essere interpretata come operatore di una trasformazione lineare $: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot m}$; tale trasformazione ha nucleo non nullo per (1.8) cosicché esiste un vettore non nullo $x \in \mathbb{R}^n$ per cui

$$x^T [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0 \quad (4.2)$$

(4.2) implica ovviamente

$$x^T B = x^T AB = \dots = x^T A^{n-1} B = 0$$

Il teorema di Cayley Hamilton ci assicura che $A^n, A^{n+1}, \dots$ sono combinazioni lineari su $\mathbb{R}$ di $A, \dots, A^{n-1}$, cosicché $x^T A^n B, x^T A^{n+1} B, \dots$ sono c.l. di $x^T B, x^T AB, \dots, x^T A^{n-1} B$. Ma allora $x^T A^k B = 0$ per $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

$$x^T \exp(At) B = \sum_{k=0}^{\infty} x^T A^k B \frac{t^k}{k!} = 0$$

contro l'ipotesi (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv): per assurdo, esista un vettore $x \neq 0$ tale che, per $t > t_0$ si abbia

$$\int_{t_0}^t \exp(-As) B B^T \exp(-A^T s) ds \cdot x = 0 \quad (4.3)$$

Allora premoltiplicando per x^T , otteniamo:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{t_0}^t [x^T \exp(-As) B] [B^T \exp(-A^T s) x] ds = \\
 &= \int_{t_0}^t [B^T \exp(-A^T s) x] [B^T \exp(-A^T s) x] ds
 \end{aligned}$$

Poiché l'integrando è continuo e non negativo, deve risultare su tutto $[t_0, t]$ $B^T \exp(-A^T s) x = 0$. Ma $B^T \exp(-A^T s) x$ è funzione analitica (i.e. sviluppabile in serie di potenze su tutto l'asse reale), ed è noto che una funzione analitica nulla su un intervallo non puntiforme è nulla ovunque.

Allora sono nulli tutti i coefficienti dello sviluppo in serie, nell'intorno di $s=0$, di $B^T \exp(-A^T s) x$:

$$B^T x = \frac{B^T A^T x}{1!} = \frac{B^T (A^T)^2 x}{2!} = \dots = 0 \quad (4.4)$$

e da (4.4) si ha immediatamente

$$x^T [B; AB; \dots A^{n-1} B] = 0$$

che va contro l'ipotesi (iii).

(iv) $\Rightarrow$ (v) Si vuol provare che, comunque fissati x_0 ed $x_1 \in X$ e comunque scelto un intervallo non puntiforme $[t_0, t_1]$, esiste un ingresso u che porta x da x_0 in t_0 ad x_1 in t_1 .

Si consideri infatti l'ingresso

$$u(t) = B^T \exp(-A^T t) \left[\int_{t_0}^{t_1} \exp(-As) B^T \exp(-A^T s) ds \right]^{-1} (\exp(-At_1) x_1 - \exp(-At_0) x_0)$$

e si osservi che l'inverso del gramiano $W(t_0, t_1)$ esiste per l'ipotesi (iv).

Risulta:

$$\begin{aligned}
 x(t_1) &= \exp(A(t_1 - t_0)) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp(A(t_1 - \sigma)) B u(\sigma) d\sigma = \\
 &= \exp(A(t_1 - t_0)) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \exp(A(t_1 - \sigma)) B B^T \exp(-A^T \sigma) \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\int_{t_0}^{t_1} \exp(-As) B^T \exp(-A^T s) ds \right]^{-1} (\exp(-At_1) x_1 - \exp(-At_0) x_0) d\sigma = \\
 &= \exp(A(t_1 - t_0)) x_0 + \exp(At_1) (\exp(-At_1) x_1 - \exp(-At_0) x_0) = x_1
 \end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (i) è ovvio. ■

Osservazione 1. La parte (iv) $\Rightarrow$ (v) del teor. 1 non ha interesse soltanto per la prova, ma anche perchè mette in luce che in un sistema lineare continuo con spazio degli stati connesso il passaggio da uno stato arbitrario iniziale ad un arbitrario stato finale può avvenire in un intervallo $[t_0, t_1]$ qualsivoglia, purchè non puntiforme, pur di scegliere adeguatamente la sollecitazione d'ingresso u .

Osservazione 2. Lo studio del rango della matrice di controllabilità

$$\mathcal{X} = [B; AB; \dots A^{n-1} B]$$

è di solito il metodo più semplice per verificare la completa controllabilità di un LS o di un GLS (°)

Esercizio 1. Se (A, B) è completamente controllabile, per ogni matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la coppia $(A + BL^T, B)$ è complet. controllabile.

Esercizio 2. Se (A, B) è complet. controllabile, per ogni matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è complet. controllabile la coppia $(M^{-1} A M, M^{-1} B)$.

Teor. 2. Sia (A, B) non completamente controllabile, e si abbia

$$\text{rank } \mathcal{X} = \text{rank } [B; AB; \dots A^{n-1} B] = r < n$$

Allora esiste una matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tale che

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \hat{A} &= M^{-1} A M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r} \\
 \text{(ii)} \quad \hat{B} &= M^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } B_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

(iii) la coppia (A_{11}, B_1) è completamente controllabile.

Inoltre, M si costruisce prendendo come prime r colonne di M le colonne linearmente indipendenti di $\mathcal{X}$, e completando M ad un bitrio, con il solo vincolo che M risulti a rango pieno. ■

Non riportiamo la prova di questo teorema (si veda, ad es. Anderson [Al], ma sarà utile soffermarci sul significato del risultato che esso contiene.

(°) I risultati ottenuti nel teor. 1 ci consentono di parlare senza ambiguità di completa controllabilità, senza più specificare "al lo stato zero".

Quando si assegnano le equazioni (4.1), implicitamente si assume una base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ di riferimento nello spazio X , e la n -upla x è costituita dalle componenti del vettore di stato rispetto alla base prescelta.

Se si assume in X un'altra base di riferimento $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ il medesimo vettore di stato di componenti x rispetto alla vecchia base, avrà componenti $\hat{x}$ diverse rispetto alla nuova base. Il passaggio dalla n -upla x alla n -upla $\hat{x}$ si ha tramite una matrice $n \times n$ invertibile M : posto

$$\delta_j = \sum_i m_{ij} e_i \quad j = 1, 2, \dots, n$$

la matrice $M = \|m_{ij}\|$ è invertibile, ed è facile constatare che risulta

$$x = M \hat{x} \quad (4.6)$$

Da (4.1) si ha immediatamente

$$\begin{aligned} M \frac{d\hat{x}}{dt} &= A M \hat{x} + B u \\ y &= C M \hat{x} + D_0 u + \dots D_d \frac{d^d u}{dt^d} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= M^{-1} A M \hat{x} + M^{-1} B u \\ y &= C M \hat{x} + D_0 u + \dots + D_d \end{aligned} \quad (4.7)$$

(4.1) e (4.7) "rappresentano il medesimo sistema", nel senso che esprimono l'evoluzione del medesimo vettore di stato, riferito a due basi diverse: (4.7) indica come si trasformano le matrici $A, B, C, D_0, \dots$ cambiando la base di riferimento:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= M^{-1} A M \\ \hat{B} &= M^{-1} B \\ \hat{C} &= C M \\ \hat{D}_i &= D_i \quad i = 0, 1, \dots, d \end{aligned} \quad (4.8)$$

Poiché ogni matrice $n \times n$ non singolare M può essere interpretata come matrice associata ad un cambiamento di base in X , la coppia $(\hat{A}, \hat{B})$ del

teor. 2 si può interpretare come relativa al medesimo sistema cui appartiene la coppia (A, B) , pur di pensare che nello spazio degli stati X siano state assunte due basi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, e che M sia la matrice di trasformazione fra tali basi.

Con riferimento alla base $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ per cui $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono partizionate secondo il teor. 2, risulta allora

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \hat{x} + D_0 u \end{aligned} \quad (4.9)$$

Se A_{11} è una matrice $r \times r$, consideriamo i due sottospazi di X complementari $(^o)$

$$\begin{aligned} X' &= \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r \rangle \\ X'' &= \langle \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_n \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

cosicché ogni vettore di X si decompone in modo unico nella somma di un vettore di X' e di un vettore di X'' . Assumendo come basi in X' ed in X'' rispettivamente $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ e $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_n)$, i primi r numeri $\hat{x}'$ della n -upla $\hat{x}$ sono le componenti della proiezione del vettore di stato sullo spazio X' , gli ultimi $n-r$ numeri $\hat{x}''$ sono le componenti della proiezione sullo spazio X'' .

E' immediato ottenere da (4.9) le equazioni di evoluzione di stato

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}'}{dt} &= A_{11} \hat{x}' + \hat{A}_{12} \hat{x}'' + B_1 u \\ \frac{d\hat{x}''}{dt} &= \hat{A}_{22} \hat{x}'' \end{aligned} \quad (4.11)$$

Poiché nella seconda equazione non gioca alcun ruolo l'ingresso u , la proiezione del vettore di stato sullo spazio X'' non è in alcun modo influenzata dall'ingresso, ed evolve nel tempo secondo una traiettoria

$(^o)$ Due sottospazi X' , X'' di uno spazio vettoriale X si dicono complementari se ogni vettore $v \in X$ si ottiene in modo unico come somma di un vettore $v' \in X'$ ed un vettore $v'' \in X''$: $v' + v'' = v$.

che dipende unicamente dalle condizioni iniziali.

Lo spazio X' risulta connesso, perchè fissati comunque due vettori a' , $b' \in X'$, esiste un ingresso u che pilota il sistema dallo stato a' allo stato b' : infatti, se il vettore iniziale di stato ha proiezione nulla su X'' , la seconda equazione di (4.11) ci assicura che il vettore di stato evolve conservando proiezione nulla su X'' , cosicchè la prima equazione di (4.11) assume la forma:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = A_{11} \hat{x}' + B_1 u$$

e la completa controllabilità di (A_{11}, B_1) permette di concludere nel senso voluto.

Tuttavia la connessione di X_1 può essere intesa secondo una accezione più vasta: comunque si fissino a' , $b' \in X'$, per ogni vettore $a \in X$ avente proiezione a' su X' esiste un ingresso u che porta in tempo finito dallo stato a ad uno stato $b \in X$ avente proiezione b' su X' . Infatti, indicando con a, b, a', b' sia i vettori che le loro n-uple ed r-uple di componenti rispetto alle solite basi, si considerino le equazioni differenziali:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} + A_{11} \hat{x}' = B_1 u; \quad \hat{x}'(0) = a' \quad (4.12)$$

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} + A_{11} \hat{x}' = -A_{12} \hat{x}''; \quad \hat{x}'(0) = 0 \quad (4.13)$$

e si risolve (4.13) imponendo che $\hat{x}''$ sia la soluzione di (4.11.2) quando $\hat{x}''(0)$ è la proiezione di a su X'' . Se z_2 è la soluzione di (4.13), si consideri il suo valore $z_2(T)$ in un istante T , successivo all'istante 0. Poichè la coppia (A_{11}, B_1) è completamente controllabile, esiste un ingresso u per il quale la soluzione z_1 di (4.12) vale $b' - z_2(T)$ in T .

L'equazione differenziale

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} + A_{11} \hat{x}' = B_1 u - A_{12} \hat{x}''; \quad \hat{x}'(0) = a' \quad (4.14)$$

quando per u si scelga l'ingresso introdotto in (4.12) e per $\hat{x}''$ la funzione introdotta in (4.13), ha una soluzione che in T è somma delle soluzioni di (4.12) e (4.13), e quindi in T vale b' . Il sistema evolve allora dallo stato a in $t=0$ allo stato $\begin{bmatrix} b' \\ \hat{x}''(T) \end{bmatrix}$ in $t=T$.

Si noti che lo spazio X' è suscettibile di una definizione "intrinseca", come spazio degli stati raggiungibili a partire dallo stato zero: quindi, indipendentemente dalla base inizialmente prescelta in X , lo spazio X' al quale si perviene con la trasformazione di base del teorema 2 è sempre il medesimo. Lo spazio X'' , invece, può essere un complemento qualsiasi ad X' : cambiando complemento X'' le matrici $A \in B$ conservano la forma partizionata (4.9), e valgono quindi le osservazioni già fatte nelle pagine precedenti.

Concludiamo queste osservazioni riportando l'enunciato di un teorema che consente di ottenere direttamente lo spazio X' a partire dalla matrice di controllabilità.

Teor.3. Lo spazio $X' = X_R(0)$ dei vettori di stato raggiungibili dallo stato zero è generato dalle colonne $(^{\circ})$ della matrice di controllabilità

$$X = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Per la prova, si veda p. es. Brockett [B1] 7.

Se la coppia (A, B) di un GLS $Z = (A, B, C, D_0, \dots, D_d)$ non è completamente controllabile, la funzione di trasferimento $W(s)$ dipende soltanto dalle matrici $(A_{11}, B_1, C_1, D_0, \dots, D_d)$ ed A_{11}, B_1 bastano per descrivere l'evoluzione di Z entro il sottospazio X' raggiungibile da zero. La prova è conseguenza immediata del

Lemma 1 Sia M una matrice quadrata, triangolare a blocchi

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

e siano invertibili i blocchi (quadrati) M_{11}, M_{22} .

Allora M è invertibile, e risulta

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1}M_{12}M_{22}^{-1} \\ 0 & M_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

prova: è lasciata come facile esercizio.

$(^{\circ})$ Ovviamente nel senso che i vettori di $X_R(0)$ sono tutti e soli quelli le cui componenti (rispetto alla base di X prescelta, per la quale sono assegnate le matrici A e B) appartengono al sottospazio di R^n generato dalle colonne di k .

Teor. 4. Il GLS descritto dalle equazioni

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x + D_0 u + D_1 \frac{du}{dt} + \dots + D_d \frac{d^d u}{dt^d}$$

ha la funzione di trasferimento

$$W(s) = \sum_{i=0}^d D_i s^i + C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1 \quad (4.17)$$

prova. Risulta

$$W(s) = \sum_{i=0}^d D_i s^i + \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e, per il lemma 1:

$$W(s) = \sum_{i=0}^d D_i s^i + \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - A_{11})^{-1} - (sI - A_{11})^{-1} A_{12} (sI - A_{22})^{-1} & (sI - A_{22})^{-1} \\ 0 & (sI - A_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eseguendo il prodotto per blocchi, si perviene subito alla (4.17). ■

5. Osservabilità dei sistemi lineari

Valgono le stesse osservazioni premesse al paragrafo sulla controllabilità.

Con riferimento al GLS (4.1) si dà la

Def. 1. La coppia (A, C) è completamente osservabile se la conoscenza dell'ingresso u e dell'uscita corrispondente y su un intervallo arbitrario non nullo $[t_0, t_1]$ è sufficiente per individuare univocamente lo stato iniziale $x(t_0)$.

Vale il seguente teorema, che enunciamo soltanto, rinviando al corso di Teoria dei Sistemi per la prova.

Teor. 1. Sono equivalenti le proposizioni:

- (i) (A, C) è completamente osservabile
- (ii) se per ogni istante t risulta $C \exp(At) x = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$) allora $x = 0$

- (iii) $\text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = n = \dim X$
- (iv) $\int_{t_0}^t \exp(A^T s) C^T C \exp(As) ds$ (gramiano di osservabilità) ha nucleo nullo per ogni istante $t > t_0$.
- (v) la coppia (A^T, C^T) è completamente controllabile

La matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

è detta "matrice di osservabilità": lo studio del suo rango è di solito il test più semplice per verificare la completa osservabilità di un GLS.

Esercizio 1. Se (A, C) è completamente osservabile, per ogni matrice $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ la coppia $(A + LC, C)$ è completamente osservabile.

Esercizio 2. Se (A, C) è completamente osservabile, per ogni matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è completamente osservabile la coppia $(M^{-1}AM, CM)$.

Teor. 2. Sia (A, C) non completamente osservabile, e si abbia

$$\text{rank } \mathcal{O} = \text{rank} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^{n-1})^T C^T \end{bmatrix} = r < n$$

Allora esiste una matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tale che

$$(i) \quad \hat{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con } A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

$$(ii) \quad \hat{C} = CM = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con } C_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}$$

(iii) La coppia (A_{11}, C_1) è completamente osservabile.

Inoltre M si costruisce utilizzando $\mathcal{O}$. Infatti come prime r colonne di $(M^{-1})^T$ vengono scelte r colonne lin. indipendenti di $\mathcal{O}$, e le restanti colonne di $(M^{-1})^T$ devono soltanto rispettare il vincolo che $(M^{-1})^T$ risulti a rango pieno. ■

Anche in questo caso, come per quello analogo del paragrafo precedente, si possono svolgere considerazioni sul significato della trasformazione indotta da M nello spazio degli stati X .

Se $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ è la base in X con riferimento alla quale le equazioni del sistema sono

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}z \\ y &= \hat{C}\hat{x} + D_0 u + \dots D_d \frac{d^d u}{dt^d}\end{aligned}\quad (5.2)$$

con $\hat{A}$, $\hat{C}$ date dalle (5.1) e $\hat{B} = M^{-1}B$, consideriamo i due spazi complementari in X :

$$\begin{aligned}X' &= \langle \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r \rangle \\ X'' &= \langle \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_n \rangle\end{aligned}$$

Ogni vettore di X si decompone in modo unico nella somma di un vettore di X' e di un vettore di X'' , ed assumendo come basi per X' ed X'' rispettivamente $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ e $(\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_n)$, i primi r numeri $\hat{x}'$ di $\hat{x}$ sono le componenti della proiezione del vettore di stato su X' , gli ultimi $n-r$ numeri $\hat{x}''$ sono le componenti della sua proiezione su X'' .

Partizionando $\hat{B}$ in modo conforme ad $\hat{A}$ e $\hat{C}$:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \left. \begin{matrix} B_1 \end{matrix} \right\} r \text{ righe} \\ \left. \begin{matrix} B_2 \end{matrix} \right\} n-r \text{ righe} \\ m \text{ colonne} \end{matrix}\quad (5.3)$$

le equazioni (5.2) si spezzano nelle tre equazioni

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}'}{dt} &= A_{11}\hat{x}' + B_1 u \\ y &= C_1 \hat{x}' + D_0 u + \dots D_d \frac{d^d u}{dt^d} \\ \frac{d\hat{x}''}{dt} &= A_{21}\hat{x}' + A_{22}\hat{x}'' + B_2 u\end{aligned}\quad (5.4)$$

Le prime due equazioni sono sufficienti per descrivere il legame ingresso/uscita del sistema: infatti $\hat{x}''$ non influisce in alcun modo sull'uscita, né a livello dell'equazione istantanea di read-out, né a livello della equazione di transizione per la proiezione $\hat{x}'$.

Dalla conoscenza dell'ingresso u e dell'uscita y sull'intervallo $[t_0, t_1]$ non possiamo inferire nulla circa la proiezione $\hat{x}''(t_0)$ del vettore di stato iniziale; la completa osservabilità della coppia (A_{11}, C_1) permette di stabilire invece, in modo univoco, la proiezione $\hat{x}'(t_0)$.

Il sottospazio X'' è detto il sottospazio "inosservabile" del sistema, ed è suscettibile di una definizione intrinseca, come totalità degli stati di X che danno luogo ad una risposta identicamente nulla in evoluzione libera. X' invece è un complemento arbitrario ad X'' in X e, purché esso sia appunto un complemento di X'' , la conoscenza dell'ingresso e dell'uscita consente di "osservare" la proiezione su X' dello stato iniziale del sistema.

L'arbitrarietà di X' può essere eliminata se esso viene pensato, anziché come complemento ad X'' , come quoziente di X rispetto ad X'' , ossia come lo spazio che si ottiene da X identificando fra loro i vettori di X che differiscono per elementi di X'' ($^\circ$): X' è allora "completamente osservabile" nel senso che la conoscenza dell'ingresso e dell'uscita del sistema individua lo stato iniziale di X a meno di un vettore di X'' , e quindi individua completamente il vettore iniziale dello spazio quoziente.

Teor. 3. Il sottospazio inosservabile X'' è l'ortogonale dello spazio generato dalle colonne della matrice O di osservabilità, quando si doti $\mathbb{R}^n$ del prodotto interno usuale:

$$\langle v | w \rangle \triangleq v^T w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad (^\circ^\circ)$$

prova. Abbiamo caratterizzato X'' come il sottospazio dei vettori di stato che danno luogo a risposta nulla in evoluzione libera.

Se $x \in X''$ allora partendo dallo stato x per $t = 0$ si ha (3.2):

$$C \exp(At)x = 0 \quad \forall t > 0 \quad (5.5)$$

Sviluppando in serie l'esponenziale è facile verificare (cfr. par. 4, teor. 1) che

$$Cx = CAx = \dots CA^{n-1}x = 0 \quad (5.6)$$

e perciò x è ortogonale ad ogni colonna di O .

Se viceversa x è ortogonale ad ogni colonna di O , vale la (5.6) ed è lasciato come esercizio concludere che vale (5.5), e che quindi

($^\circ$) È noto che se v è uno spazio vettoriale e W è un suo sottospazio la relazione $v_1 \wedge v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in W$,

è una equivalenza, e le classi di equivalenza si atteggianno naturalmente in uno spazio vettoriale, detto spazio quoziente e indicato con W/W . Se $\dim W < \infty$, $\dim W/W = \dim W - \dim W$.

($^\circ^\circ$) Le principali proprietà degli spazi a prodotto interno sono riportate nel capitolo sulla teoria dei minimi quadrati.

$x \in X''$.

Esercizio 3. Lo spazio $X' = X/X''$ è generato dalle colonne (modulo X'') della matrice di osservabilità.

Se la coppia (A, C) di un sistema dinamico non è completamente osservabile, la funzione di trasferimento $W(s)$ dipende soltanto dalle matrici $A_{11}, B_1, C_1, D_o, \dots, D_d$, che bastano per descrivere l'evoluzione del sistema in X' : ciò deriva immediatamente dal

Teor. 4. Il (GLS) descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} x + D_o u + \dots + D_d \frac{d^d u}{dt^d} \end{cases} \quad (5.7)$$

ha funzione di trasferimento

$$W(s) = \sum_{i=0}^d D_d s^i + C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1 \quad (5.8)$$

La prova è analoga a quella del Teor. 4 del paragrafo precedente: del resto il risultato era intuibile, perchè la prima coppia di equazioni (5.4) individua completamente il legame i/o , e $W(s)$ contiene soltanto informazione sul legame i/o del sistema.

Quanto abbiamo esposto in questo e nel precedente paragrafo consente di provare che, per ogni GLS $\Sigma = (A, B, C, D_o, \dots, D_d)$ esiste un GLS $\Sigma_M = (A_M, B_M, C_M, D_{oM}, \dots, D_{dM})$ completamente controllabile ed osservabile dotato della medesima f. di t. di Σ . Basta permettere il seguente:

Lemma 1. Se il GLS $\Sigma = \left[\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}, D_o, \dots, D_d \right]$ è completamente controllabile, allora è completamente controllabile la coppia (A_{11}, B_1) .

prova. La matrice di controllabilità di Σ ha rango pieno, e quindi le sue n righe sono linearmente indipendenti:

$$X = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & A_{11} B_1 \dots A_{11}^{n-1} B_1 \\ \hline B_2 & * \dots * \end{array} \right] \quad (5.9)$$

In particolare, se $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, le prime r righe di (5.9) sono indipendenti: è una facile applicazione del teorema di Cayley Hamilton (eserci-

zio!) provare che sono allora indipendenti le r righe di

$$X' = \left[B_1 \mid A_{11} B_1 \mid \dots \mid A_{11}^{r-1} B_1 \right] \quad (5.10)$$

e ciò dimostra che (A_{11}, B_1) è completamente controllabile.

Teor. 5. Se il GLS $\Sigma = (A, B, C, D_o, \dots, D_d)$ non è completamente controllabile e/o osservabile, esiste una procedura per costruire un GLS $\Sigma_M = (A_M, B_M, C_M, D_{oM}, \dots, D_{dM})$ completamente controllabile ed osservabile, dotato della medesima f. di t. di Σ .

prova. Se la coppia (A, B) non è controllabile, il teorema 2 del par. 4 indica una procedura per costruire un GLS $\Sigma_c = (A_{11}, B_1, C_1, D_o, \dots, D_d)$ che ha la coppia (A_{11}, B_1) completamente controllabile e che, per il teor. 4, ha la medesima f. di t. di Σ . Se Σ_c non è completamente osservabile, il teor. 2 di questo paragrafo indica come costruire dal GLS Σ_c un GLS Σ_M completamente osservabile, che per il teor. 4 ha la stessa f. di t. di Σ_c (e quindi di Σ) e che per il lemma 1 rimane controllabile.

Esempio. Consideriamo il sistema

$$\Sigma = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0 \right] = (A, B, C, D_o)$$

Si verifica facilmente che Σ non è né osservabile, né controllabile e che la sua f. di t. vale $-1/(s+1)$.

La matrice di controllabilità ha rango due:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B \end{bmatrix}$$

cosicchè la matrice M di Th. 2 par 4 può assumere la forma

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e si ricava con facili calcoli un sistema $\hat{\Sigma}$ dotato della medesima f. di t. di Σ :

$$\hat{\Sigma} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 \right] = (M^{-1} A M, M^{-1} B, C M, D_o)$$

Il sistema

$$\Sigma_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}, 0 = (A_{11}, B_1, C_1, D_0)$$

ha ancora f. di t. $-1/(s+1)$, ed è completamente controllabile, ma non completamente osservabile perchè la matrice di osservabilità

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T & A_{11}^T C_1^T \end{bmatrix}$$

ha rango uno.

Il teor. 2 di questo paragrafo indica come costruire una matrice N di cambiamento di base utilizzando $\mathcal{O}$:

$$(N^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema

$$\tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0 = (N^{-1}A_{11}N, N^{-1}B_1, C_1N, D_0)$$

ha la stessa f. di t. di Σ_c e quindi di Σ , ed il sistema

$$\Sigma_o = \begin{bmatrix} [-1], [-1], [1], 0 \end{bmatrix}$$

è completamente osservabile per il teor. 2, completamente controllabile per il lemma 1, ed ha f. di t. $-1/(s+1)$.

6. Applicazioni all'analisi elementare di reti elettriche

Come applicazione dei concetti precedentemente esposti, forniamo qui alcuni esempi sul modo di associare ad una assegnata rete elettrica lineare stazionaria le equazioni di stato.

Avremo modo di ritornare in seguito sia sulla nozione di rete lineare stazionaria, sia sulla natura dell'analisi che se ne compie con le variabili di stato: per ora riteniamo soltanto acquisiti i con-

cetti di base del corso di Elettrotecnica (principi di Kirchhoff, proprietà dei componenti lineari standard), che useremo per risolvere in modo intuitivo qualche esercizio.

Premettiamo alcune osservazioni che ci torneranno utili:

a) data una rete, e stabiliti quali sono gli ingressi e quali le uscite, non è unica (quando esiste) la coppia di equazioni (3.3) che descrive il comportamento i/o della rete, e ciò sia perchè è arbitraria, entro certi limiti, la scelta dello spazio X degli stati, sia perchè è completamente arbitraria la scelta di una base in X.

b) non esiste sempre una coppia di equazioni non generalizzate di stato atta a descrivere il legame i/o di una rete assegnata: si danno esempi anche semplici di reti cui non possono essere associate le equazioni di stato di un LS ma soltanto di un GLS: casi tipici sono quello in cui si ha un cutset (*) comprendente soltanto generatori di corrente e induttanze ed una uscita costituita dalla tensione su una di queste induttanze (fig. 1); oppure quello in cui si ha una maglia costituita soltanto da generatori di tensione e condensatori, ed una uscita costituita dalla corrente in un condensatore della maglia (fig. 2).

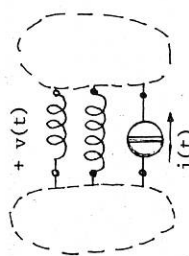


fig. 1

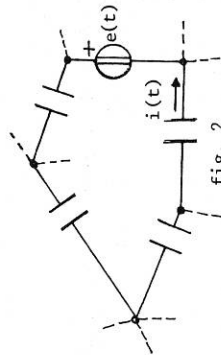


fig. 2

Basta del resto pensare ad un generatore di corrente chiuso su una induttanza L: se si assume come uscita la tensione sulla induttanza, la f. di t. risulta $W(s) = sL$, che ha un polo all'infinito e quindi non può mai risultare da un LS.

c) almeno ad un primo stadio la scrittura delle equazioni di stato si effettua identificando le componenti del vettore di stato con le correnti nelle induttanze e con le tensioni sui condensatori: peraltro

(*) Per la definizione precisa e le proprietà del cut-set si veda il capitolo sui grafi: qui basterà pensare al cut-set come ad un insieme di lati la cui soppressione rompe la connessione della rete.

se la rete ha una maglia costituita soltanto di condensatori, o un cut-set di sole induttanze, l'identificazione suddetta non è più possibile perché il soddisfacimento dei principi di Kirchhoff impone un vincolo lineare sulle tensioni della maglia e sulle correnti del cut-set.

Vedremo in capitoli successivi come possano essere superate sistematicamente le difficoltà del punto c): qui esemplificheremo soltanto una tecnica di analisi assai elementare.

Assegnata una rete lineare stazionaria (nel senso precisato più avanti e comunque noto dal corso di Elettrotecnica), i suoi "ingressi" sono ovviamente i generatori di corrente o di tensione (non comandati) presenti, e le "uscite" possono essere, p. es., correnti su alcuni lati, tensioni tra alcune coppie di nodi, correnti complessivamente attraversanti certi cut-set, etc.

L'analisi che faremo consiste:

- nello stabilire il legame i/o usando le equazioni di stato
- nell'esaminare le proprietà di tale legame sotto il profilo della controllabilità e dell'osservabilità dello stato.

La procedura più semplice ed intuitiva per ottenere le equazioni è quella di

- identificare le correnti istantanee nelle induttanze e le tensioni istantanee nei condensatori con le componenti del vettore di stato x .
- scrivere, utilizzando i principi di Kirchhoff e le relazioni corrente/tensione caratteristiche per ciascun componente (tipo $v=Ri$, oppure $i=Cdv/dt$, etc...), una equazione per ciascuna componente del vettore dx/dt in cui figurino x ed u soltanto.
- sempre utilizzando i principi di Kirchhoff e le relazioni corrente/tensione, scrivere una equazione per ogni componente del vettore y , in cui figurino x ed u soltanto.
- organizzare le equazioni ottenute nella forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + D_0 u + D_1 \frac{du}{dt} + \dots + D_d \frac{d^d u}{dt^d} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ricordiamo ancora una volta che non sempre questo modo di procedere porta direttamente al risultato (6.1): vedremo qui alcuni esempi in cui es

so è applicabile, ed alcuni altri in cui esso va integrato con opportune considerazioni

Esempio 1

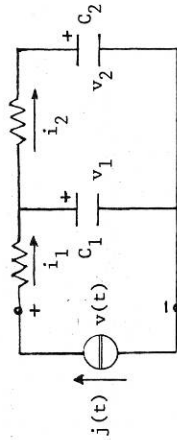


Fig. 3.

Si assumano come ingresso il vettore unidimensionale $j(t)$, come uscita il vettore unidimensionale $v(t)$.

Posto allora come vettore di stato

$$x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_1}{dt} &= i_1 - i_2 = j - \frac{1}{R_2} (v_1 - v_2) \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_2 = \frac{1}{R_2} (v_1 - v_2) \\ v &= v_1 + R_1 j \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1 R_2} v_1 + \frac{1}{C_1 R_2} v_2 + \frac{1}{C_1} j \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2 R_2} v_1 - \frac{1}{C_2 R_2} v_2 \\ v &= v_1 + R_1 j \end{aligned}$$

e in conclusione

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_2} & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} j \quad (6.2)$$

$$v = \begin{bmatrix} 1, & 0 \end{bmatrix} x + R_1 j$$

Lo studio della controllabilità si effettua utilizzando la matrice

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & -1/(C_1^2 R_2) \\ 0 & 1/(C_1 C_2 R_2) \end{bmatrix}$$

e quello della osservabilità utilizzando la matrice

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & -1/(C_1 R_1) \\ 0 & 1/(C_1 R_2) \end{bmatrix}$$

E' immediato constatare che il sistema è completamente controllabile ed osservabile.

Esercizio 1. Che cosa succede quando si sostituisce ad R_2 un cortocircuito?

Esempio 2

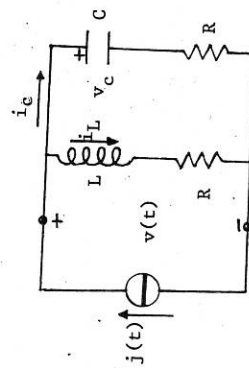


Fig. 4.

Si assumono come ingresso il vettore unidimensionale $j(t)$, come uscita il vettore unidimensionale $v(t)$.

Si pone

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

e si ottengono le equazioni:

$$C \frac{dv_c}{dt} = j - i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = v_c + Ri_c - Ri_L = v_c + R(j - i_L) - Ri_L = v_c - 2Ri_L + Rj$$

$$v = v_c + Ri_c = v_c + R(j - i_L) = v_c - Ri_L + Rj$$

da cui

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} j \quad (6.3)$$

$$v = \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix} x + Rj$$

La matrice di controllabilità è allora

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & -\frac{2R^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{LC} \end{bmatrix}$$

ed il rango di $\mathcal{K}$ è completo tranne quando risulta

$$R^2 = L/C$$

La matrice di osservabilità è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} -R & \frac{2R^2}{L} - \frac{1}{C} \\ 1 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

ed il suo rango è completo eccettuato quando si ha (*)

$$R^2 = L/C$$

Quindi per $RC = L/R$ lo spazio degli stati non è più né completamente controllabile né completamente osservabile.

(*) Si noti che la condizione $L/C = R^2$ corrisponde alla eguaglianza delle costanti di tempo per i due lati in parallelo del circuito.

La funzione di trasferimento associata a (6.3) è data da

$$W(s) = R + \begin{bmatrix} -R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2R/L & 1/L \\ -L/C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R/L \\ 1/C \end{bmatrix}$$

$$= R + \frac{\left(\frac{1}{C} - \frac{R^2}{L}\right)s}{s^2 + \frac{2R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{Rs^2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{R^2}{L}\right)s + \frac{R}{LC}}{s^2 + \frac{2R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

ed è immediato verificare che per $R^2 = L/C$ risulta $W(s) = R$ (rete "a resistenza costante").

Lo spazio dei vettori di stato raggiungibili dallo stato zero (X' di par. 4) è lo spazio immagine della trasformazione indotta da X' ed è quindi generato dalle colonne di X' ; per $R^2 = L/C$ abbiamo

$$X' = \begin{bmatrix} R/L \\ 1/C \end{bmatrix} > \quad (6.4)$$

Lo spazio dei vettori di stato inosservabili, nel senso di "indistinguibili dallo stato zero" (X'' di par. 5) è ortogonale, nel senso preciso in par. 5, allo spazio generato dalle colonne di $\mathcal{O}$. E' facile verificare che, per $R^2 = L/C$, si ha

$$X'' = \begin{bmatrix} 1 \\ R \end{bmatrix} > \quad (6.5)$$

Vogliamo, in questo caso molto semplice, verificare con metodi elementari il risultato (6.5) provando che la tensione v del circuito di Fig. 4 è sempre nulla per lo stato iniziale $i_L(0) = \alpha$, $v_C(0) = R$ (α reale arbitrario), e per l'ingresso $j=0$. Allo scopo, basta risolvere il "transitorio" del circuito RCL serie di fig. 5, con le condizioni iniziali assegnate:

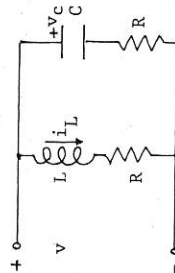


Fig. 5

Si ottiene (cfr. p. es. Smeda: "Elettrotecnica generale" cap. 7)

$$i_L(t) = k_1 t e^{-t/T} + k_2 e^{-t/T} \quad (6.6)$$

$$\text{con } k_1 = \frac{1}{T} i_L(0) - \frac{1}{T} v_C(0), \quad k_2 = i_L(0), \quad T = L/R$$

e, sostituendo i valori per $i_L(0)$ e $v_C(0)$, $k_1=0$, $k_2=\alpha$. Quindi risulta:

$$v(t) = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (6.7)$$

e (6.7) prova l'indistinguibilità da zero degli stati della forma $\begin{bmatrix} \alpha \\ R\alpha \end{bmatrix}$

Esempio 3.

Nella rete a scala di fig. 6 l'ingresso è $e(t)$, l'uscita è $i_u(t)$.

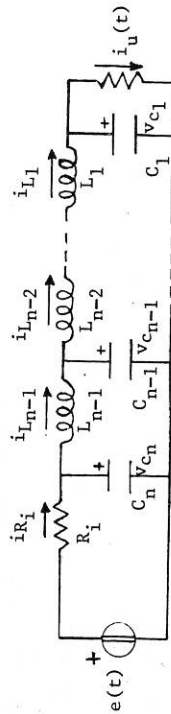


fig. 6

Assumiamo come vettore di stato il seguente

$$x = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ i_{L1} \\ v_{C2} \\ i_{L2} \\ \vdots \\ i_{L_{n-1}} \\ v_{Cn} \end{bmatrix}$$

e otteniamo dalla ispezione del circuito le relazioni:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} (i_{L1} - i_u) = \frac{1}{C_1} i_{L1} - \frac{1}{C_1 R_u} v_{C1}$$

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L_1} v_{C2} - \frac{1}{L_1} v_{C1}$$

$$\frac{dv_{C2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L2} - \frac{1}{C_2} i_{L1}$$

...

$$\frac{di_{L_{n-1}}}{dt} = \frac{1}{L_{n-1}} v_{C_n} - \frac{1}{L_{n-1}} v_{C_{n-1}}$$

$$\frac{dv_{C_n}}{dt} = \frac{1}{C_n} i_{R_i} - \frac{1}{C_n} i_{L_{n-1}} = -\frac{v_{C_n}}{R_i C_n} + \frac{e}{R_i C_n} - \frac{i_{L_{n-1}}}{C_n}$$

Inoltre, il legame stato-uscita è espresso da

$$i_u = \frac{1}{R_u} v_{C1}$$

Quindi

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R_u} & \frac{1}{C_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & \dots & \frac{1}{C_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \frac{1}{C_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{L_{n-1}} & 0 & \frac{1}{L_{n-1}} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{C_n} & -\frac{1}{C_n R_i} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R_i C_n} \end{bmatrix} e$$

$$i_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_u} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (6.8)$$

E' facile verificare che il sistema è completamente controllabile e completamente osservabile (le matrici $\mathcal{K}$ ed $\mathcal{O}$ sono triangolari, e gli elementi sulle diagonali sono tutti diversi da zero).

Esempio 4

Nella rete di fig. 7 le induttanze L_1 ed L_2 sono mutuamente ac-

coppiate: vogliamo scrivere l'equazione di evoluzione di stato quando l'ingresso è la tensione $e(t)$

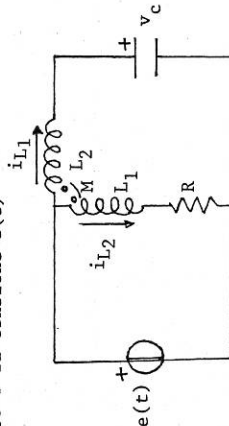


Fig. 7

Assumiamo come vettore di stato il seguente:

$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

e dalle relazioni

$$v_{L1} = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + M \frac{di_{L2}}{dt}$$

$$v_{L2} = M \frac{di_{L1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L2}}{dt}$$

ricaviamo le

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \Gamma_1 v_{L1} - \Gamma_M v_{L2}$$

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\Gamma_M v_{L1} + \Gamma_2 v_{L2} \quad (6.9)$$

dove si è posto:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad \Gamma_M = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2}$$

(escludiamo perciò dalle nostre considerazioni il caso dell'accoppiamento perfetto delle induttanze: $L_1 L_2 = M^2$)

(6.9) non possono considerarsi equazioni di stato, perchè v_{L1} e v_{L2} non sono componenti di x . Come è facile verificare per ispezione del circuito:

$$v_{L1} = e - Ri_{L1}$$

$$(6.10)$$

$$v_{L2} = e - v_c$$

cosicchè, combinando (6.9) e (6.10), e tenuto conto di

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_{L2}$$

e perviene all'equazione

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/C \\ \Gamma_M & -\Gamma_1 R & 0 \\ -\Gamma_2 & \Gamma_M R_1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1 - \Gamma_M \\ \Gamma_2 - \Gamma_M \end{bmatrix} e \quad (6.11)$$

E' lasciato come esercizio lo studio della controllabilità della rete considerata.

Esempio 5.

La rete di fig. 8 comprende una maglia costituita soltanto di condensatori

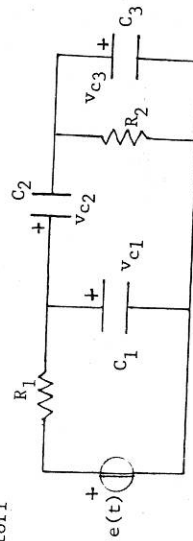


Fig. 8

E' facile ottenere per ispezione le relazioni seguenti

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} &= \frac{e - v_{c1}}{R_1} - \left(C_3 \frac{dv_{c3}}{dt} + \frac{v_{c1} - v_{c2}}{R_2} \right) \\ C_2 \frac{dv_{c2}}{dt} &= \frac{v_{c1} - v_{c2}}{R_2} + C_3 \frac{dv_{c3}}{dt} \end{aligned} \quad (6.12)$$

e, poichè il secondo principio di Kirchhoff implica che si abbia $v_{c3} = v_{c1} - v_{c2}$ e quindi

$$C_3 \frac{dv_{c3}}{dt} = C_3 \frac{dv_{c1}}{dt} - C_3 \frac{dv_{c2}}{dt} \quad (6.13)$$

(6.12) e (6.13) portano alle relazioni:

$$\begin{cases} \frac{dv_{c1}}{dt} = v_{c1} \left(-\frac{1}{C_T} \left(\frac{C_2}{R_2} + \frac{C_2 + C_3}{R_1} \right) + v_{c2} \frac{C_2}{C_T R_2} + \frac{C_2 + C_3}{C_T R_1} \right) e \\ \frac{dv_{c2}}{dt} = v_{c1} \left(\frac{1}{C_T} \left(\frac{C_1}{R_2} - \frac{C_3}{R_1} \right) - v_{c2} \frac{C_1}{C_T R_2} + \frac{C_3}{C_T R_1} \right) e \end{cases} \quad (6.14)$$

dove si è posto $C_T = C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1$

Assumiamo come vettore di stato

$$x = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \end{bmatrix}$$

in quanto v_{c3} è combinazione lineare di v_{c1} e v_{c2} ; l'equazione di evoluzione dello stato è così:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{C_2}{C_T R_2} - \frac{C_2 + C_3}{C_T R_1} & \frac{C_2}{C_T R_2} \\ \frac{C_1}{C_T R_2} - \frac{C_3}{C_T R_1} & -\frac{C_1}{C_T R_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{C_2 + C_3}{C_T R_1} \\ \frac{C_3}{C_T R_1} \end{bmatrix} e$$

Esempio 6.

Non è sempre possibile, come si è già detto, scrivere equazioni non generalizzate di stato per esprimere il legame i/o di una rete elettrica. I due esempi che riportiamo ne sono una prova:

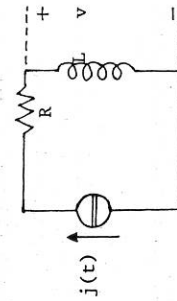


Fig. 9

Nella rete di fig. 9 $j(t)$ è l'ingresso e $v(t)$ è l'uscita. Non è possibile ottenere equazioni del tipo (3.3) che descrivano il legame fra j e v , in quanto risulta

$$\frac{dj}{dt} = \frac{1}{L} v \quad (6.15)$$

Tale equazione, trasformata nel dominio s , mostra che il legame i/o è espresso dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = sL \quad (6.16)$$

che ha un polo all'infinito: quindi essa può essere f. di t . soltanto di un sistema dinamico generalizzato.

Del resto, essendo l'ingresso j coincidente col valore attuale dello stato, (6.15) ci dice che l'uscita è esprimibile soltanto tramite la derivata dello stato, e che pertanto non siamo in presenza di un L.S.

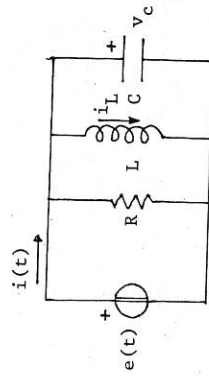


Fig. 10

Nella rete di fig. 10 $e(t)$ è l'ingresso e $i(t)$ è l'uscita. Risulta così:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} e \\ i &= i_L + \frac{e}{R} + C \frac{dv_c}{dt} \end{aligned} \quad (6.17)$$

e non è possibile scrivere le equazioni di stato nella forma (3.3) per motivi analoghi a quelli dell'esercizio precedente.

Si noti che (6.17) sono già le equazioni di un (GLS) quando si sia sostituito e a v_c .

Osserviamo che in questo esempio non si può assumere a "condizione iniziale" per $t = 0$ la sola corrente sull'induttanza (ossia il solo vettore di stato) in quanto anche $v_c(0_-)$ contribuisce alla determinazione dell'uscita, almeno per $t = 0$.

Infatti, l'(eventuale) impulso di corrente attraverso il generatore in $t = 0$ dipende dalla differenza

$$e(0_+) - v_c(0_-) \quad (6.18)$$

Si lascia come esercizio scrivere le equazioni di stato per il seguente circuito

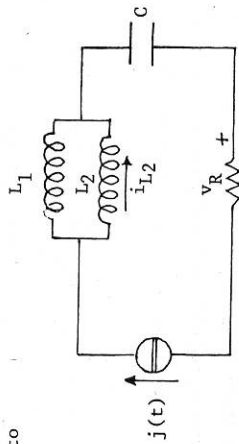


Fig. 10 bis

dove si assume

$$u = j, \quad y = \begin{bmatrix} i_{L2} \\ v_R \end{bmatrix}$$

Esempio 7.

La rete di fig. 11 ha il cut-set dei rami convergenti nel nodo ① costituito soltanto di generatori di corrente e di induttanze.

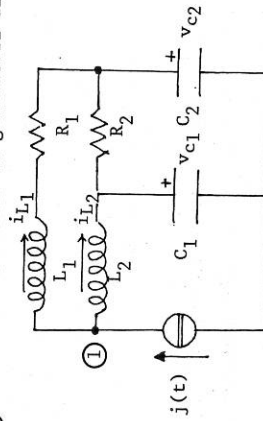


Fig. 11

E' lasciato come esercizio provare che, assumendo come vettore di stato

$$x = \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ i_{L1} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

(i_{L2} non può essere fissata arbitrariamente, perché il primo principio di Kirchhoff impone la relazione $i_{L1} + i_{L2} = j$), l'equazione di transizione di stato ha la forma non "standard":

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{R_1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ \frac{L_1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \quad (6.20)$$

E' peraltro possibile - in questo caso - assumere variabili di stato diverse da quelle di (6.19), in modo da eliminare la derivazione dell'ingresso nell'equazione di transizione. Basta porre - ad esempio:

$$z = \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \\ i_{L1} - \frac{L_2}{L_1 + L_2} j \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

ottenendo - com'è facile verificare:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{1}{L_1 + L_2} & -\frac{R_1}{L_1 + L_2} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \frac{L_1}{C_1 (L_1 + L_2)} \\ \frac{L_2}{C_2 (L_1 + L_2)} \\ \frac{-R_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} \end{bmatrix} j \quad (6.22)$$

E' lasciato come esercizio determinare l'equazione di read-out quando l'uscita è v_{C2} , e verificare che la rete non si descrive come LS ma solo come GLS quando l'uscita è i_{L2} .

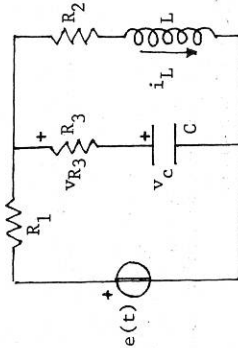
Esercizio 2.

Nella rete di fig. 12 l'ingresso è la tensione $e(t)$ l'uscita è $v_{R3}(t)$. Si verifichi che le equazioni di stato sono le seguenti:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C(R_1 + R_3)} & \frac{R_1}{C(R_1 + R_3)} \\ \frac{R_1}{L(R_1 + R_3)} & -\frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C(R_1 + R_3)} \\ \frac{R_3}{L(R_1 + R_3)} \end{bmatrix} e$$

$$v_{R3} = \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{R_1 + R_3} & \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \frac{R_3}{R_1 + R_3} e$$

Fig. 12



Si studino la controllabilità e l'osservabilità del sistema.

Esercizio 3.

La rete di fig. 13 contiene un generatore "comandato" dall'azione del condensatore C.

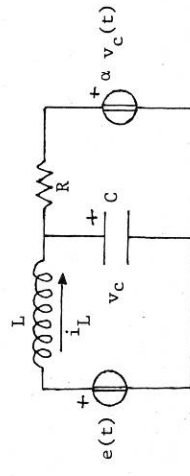


Fig. 13

Si scriva l'equazione di evoluzione per lo stato $x^T = [v_C \ i_L]$, e si studi la controllabilità del sistema al variare del parametro α .

Esercizio 4.

La rete di fig. 14 (circuito equivalente di un transistor con emettitore comune) comprende due generatori "comandati".

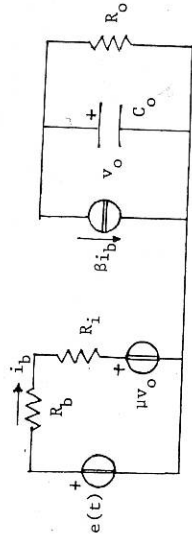


Fig. 14

Si verifichi che l'equazione di evoluzione di stato è la seguente:

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{C_o} \left(\frac{\mu\beta}{R_i + R_b} - \frac{1}{R_o} \right) v_o - \frac{\beta}{C_o(R_i + R_b)} e$$

Esercizio 5.

Si scrivano le equazioni di stato e si studino controllabilità ed osservabilità delle reti seguenti:

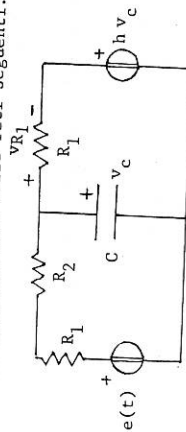


Fig. 15

$$u = e \quad y = v_{R_1}$$

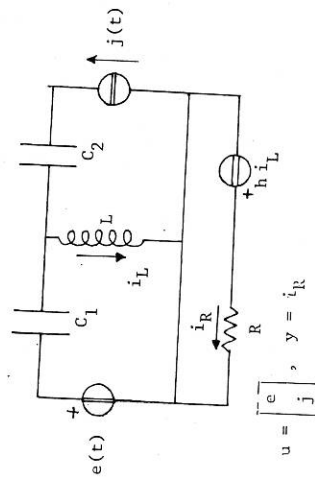


Fig. 16

$$u = \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}, \quad y = i_R$$

Esercizio 6. Si scrivano le equazioni di stato per la rete di figura 17, assumendo come uscita la tensione sul generatore j_1

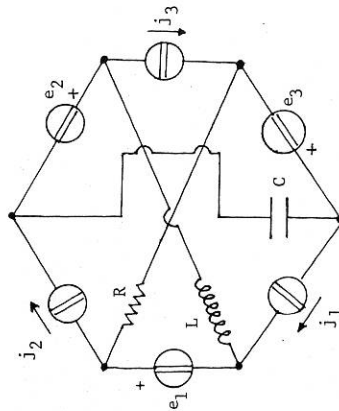


Fig. 17

Esercizio 7. Si scrivano le equazioni di stato per la rete di figura 18, assumendo come uscita il vettore $\begin{bmatrix} i_{R_1} & i_{R_2} \end{bmatrix}^T$.

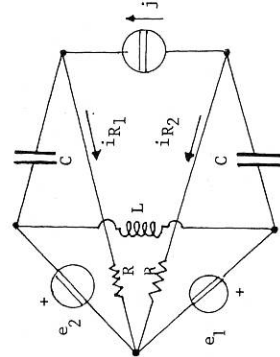


Fig. 18