

II) ELEMENTI DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE

1. Che cos'è una realizzazione

Def. 1. Sia data una matrice $W(s)$ di funzioni della variabile complessa s , di dimensioni $p \times m$, priva di poli all'infinito. Un sistema dinamico $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è detto una "realizzazione" di $W(s)$ se $W(s)$ può essere considerata funzione di trasferimento per Σ , ossia se le matrici A, B, C, D_0 verificano la condizione

$$D_0 + C(sI_n - A)^{-1}B = W(s) \quad (1.1)$$

Def. 2. La dimensione di una realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è la dimensione dello spazio degli stati del LS Σ , ossia la dimensione della matrice quadrata A .

E' chiaro che se $W(s)$ ammette una realizzazione, ne ammette infinite, in quanto si è provato che (I.3. Prop.2) per ogni matrice quadrata non singolare M avente le dimensioni di A i sistemi $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ e $\hat{\Sigma} = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, D_0)$ hanno la medesima funzione di trasferimento.

Inoltre, se la realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ non è completamente controllabile o non è completamente osservabile, è possibile (come s'è provato nel capitolo precedente) ottenere da Σ realizzazioni di $W(s)$ aventi dimensione minore di quella di Σ .

Il problema che affronteremo in questo capitolo si può brevemente riassumere nei punti seguenti:

- i) individuare condizioni necessarie e sufficienti affinché una matrice assegnata $W(s)$, priva di poli all'infinito, ammetta una realizzazione.
- ii) caratterizzare, nell'insieme delle possibili realizzazioni di $W(s)$, quelle realizzazioni che hanno la dimensione minima.
- iii) ottenere algoritmi che consentano di costruire effettivamente tutte le realizzazioni minime di $W(s)$.

Al punto i) una risposta parziale può essere data subito, osservando che una $W(s)$ regolare all'infinito è realizzata solo se è in $R(s)^{p \times m}$, perché (1.1) è una matrice di funzioni razionali a coeff. reali.

Proveremo viceversa, nel par. 4, che ogni matrice in $R(s)^{p \times m}$ è regolare all'infinito è realizzabile.

Per concludere osserviamo che mentre $W(s)$ non individua mai univocamente le matrici A, B, C di realizzazione, essa individua sempre univocamente la matrice D_0 , in quanto risulta

$$D_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = W(\infty) \quad (1.2)$$

Posto allora $W'(s) = W(s) - W(\infty)$ possiamo far corrispondere biunivocamente le realizzazioni di $W'(s)$ e quelle di $W(s)$, in quanto (1.1) ed (1.2) implicano che $(A, B, C, 0)$ è una realizzazione di $W'(s)$ se e solo se (A, B, C, D_0) è una realizzazione di $W(s)$. Nel seguito ci limiteremo pertanto a cercare realizzazioni per matrici $W(s)$ razionali proprie, cioè per quelle matrici il cui limite è nullo per $s \rightarrow \infty$. E' ovvio come si deve procedere d'altra parte quando sia $W(\infty) \neq 0$.

Esempio 1. La matrice

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s+3}{s+1} \\ 2s+4 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

è finita per $s \rightarrow \infty$, ed è

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = W(\infty)$$

Anziché procedere direttamente alla realizzazione di $W(s)$, si può realizzare $W'(s) = W(s) - W(\infty)$:

$$W'(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Se $(A, B, C, 0)$ è una realizzazione di $W(s)$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A, B, C, 2 & 0 \end{bmatrix}$ è una realizzazione di $W(s)$.

2. Proprietà delle realizzazioni minime.

Def. 1. Data una matrice razionale propria $W(s)$, una sua realizzazione è "minima" se ha dimensione minima sull'insieme di tutte le realizzazioni di $W(s)$.

Le realizzazioni minime di una assegnata matrice razionale propria $W(s)$ godono di una notevole proprietà, espressa dal seguente

Teor. 1. Ogni realizzazione minima di $W(s)$ è completamente controllabile ed osservabile.

prova. Supponiamo che $\Sigma = (A, B, C, 0)$ sia una realizzazione minima di $W(s)$ e che, per assurdo, essa non risulti controllabile. Se n è la dimensione di tale realizzazione, esiste una matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che le matrici $M^{-1}AM$, $M^{-1}B$, CM assumano la forma partizionata a blocchi

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}; \quad M^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad CM = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

e la coppia (A_{11}, B_1) è completamente controllabile.

Il sistema $\hat{\Sigma} = (A_{11}, B_1, C_1, 0)$ per quanto esposto nei paragrafi (II,3) e (II,4) ha la medesima funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema Σ : quindi anche $\hat{\Sigma}$ è una realizzazione di $W(s)$, ed è $\dim \hat{\Sigma} < n$.

Ciò è assurdo, in quanto $\dim \hat{\Sigma} < \dim \hat{\Sigma}$ implica che Σ non risulti più una realizzazione di dimensione minima per $W(s)$: ne consegue che Σ deve essere completamente controllabile.

In modo analogo si dimostra che Σ è completamente osservabile. ■

Lo scopo fondamentale del resto di questo paragrafo è di provare l'inverso del teor. 1, e cioè che tutte le realizzazioni completamente controllabili e completamente osservabili di $W(s)$ sono minime. A tal fine, sarà sufficiente far vedere che tutte le realizzazioni completamente controllabili e completamente osservabili hanno la medesima di-

mensione, in quanto il teor. 1 ci assicura che fra esse una almeno è minima, e quindi lo sono tutte.

Sia $W(s)$ una matrice di funzioni razionali proprie a coefficienti reali nella variabile complessa s . Tenuto conto che è

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0 \quad (2.1)$$

$W(s)$ è sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno del punto all'infinito e lo sviluppo manca del termine costante:

$$W(s) = M_0 s^{-1} + M_1 s^{-2} + M_2 s^{-3} + \dots \quad (2.2)$$

Poiché le funzioni razionali componenti di $W(s)$ hanno coefficienti reali, $M_0, M_1, M_2, \dots$ sono matrici di numeri reali, e le loro dimensioni sono ovviamente pari, cioè eguali a quelle di $W(s)$. Esse vengono chiamate le "matrici di Markov" associate a $W(s)$.

Un procedimento per gradi che consente di calcolare tali matrici è quello ricorsivo:

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} (sW(s)) \\ M_1 &= \lim_{s \rightarrow \infty} (s^2 W(s) - s M_0) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$M_i = \lim_{s \rightarrow \infty} (s^{i+1} W(s) - M_0 s^i - M_1 s^{i-1} - \dots - M_{i-1} s)$$

Un altro procedimento (in sostanza una variante di (2.3)) si fonda sullo sviluppo in serie, nell'intorno di $s = \infty$, delle funzioni razionali componenti $W(s)$, come indicato nel seguente

Esercizio 1. Calcolare le matrici di Markov di

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Risulta:

$$\frac{1}{s+1} = \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{-i+1} s^{-i}; \quad \frac{2}{s+1} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{-i+1} 2s^{-i}$$

Da ciò si ha subito

$$M_0 = M_2 = M_4 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_1 = M_3 = M_5 = \dots = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

La proposizione seguente ha carattere di lemma rispetto al teorema 3: essa tuttavia presenta un notevole interesse in sé, in quanto stabilisce che comunque si costruisca una realizzazione per $W(s)$, le sue matrici A, B, C sono "legate" sempre nello stesso modo alle matrici di Markov di $W(s)$.

Lemma 1 Sia $W(s)$ una matrice di funzioni razionali proprie a coefficienti reali nella variabile complessa s .

Le matrici A, B, C di una qualsiasi realizzazione $\Sigma = (A, B, C, 0)$ di $W(s)$ e le matrici di Markov M_i relative a $W(s)$ sono legate dalle relazioni

$$M_i = CA^i B \quad (2.4)$$

prova. Poiché $\Sigma = (A, B, C, 0)$ è una realizzazione, risulta:

$$\begin{aligned} W(s) &= C(sI_n - A)^{-1}B = C s^{-1} \left(I_n - \frac{A}{s} \right)^{-1} B = \\ &= C s^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} A^i s^{-i} B = \sum_{i=0}^{\infty} CA^i B s^{-i-1} \end{aligned}$$

D'altra parte risulta:

$$W(s) = \sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{-i-1}$$

e quindi, per l'unicità dello sviluppo in serie intorno ad $s = \infty$, $M_i = CA^i B$ per $i = 0, 1, 2, \dots$ ■

La conoscenza delle matrici di Markov associate a $W(s)$ consente di definire una matrice infinita di notevole interesse nello studio dei sistemi lineari: la matrice di Hankel.

Def. 2 Data una sequenza di matrici $M_0, M_1, M_2, \dots$, tutte aventi le medesime dimensioni, la matrice di Hankel relativa a tale sequenza è la matrice infinita (qui data in forma partizionata):

$$H = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 & \dots \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & \dots \\ M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

In particolare, se la sequenza è costituita dalle matrici di Markov di una matrice $W(s)$, H è detta la matrice di Hankel di $W(s)$.

Def. 3 Con riferimento alla matrice (2.5) si definisce "sottomatrice di Hankel di ordine r " la matrice finita

$$H_r = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{r-1} \\ M_1 & M_2 & \dots & M_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{r-1} & M_r & \dots & M_{2r-2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A questo punto è possibile, utilizzando le matrici finite H_r , definire il rango della matrice H :

$$\text{Def. 4} \quad \text{rank } H \triangleq \sup_r (\text{rank } H_r) \quad (2.7)$$

E' ovvio che la sequenza

$$\text{rank } H_1, \text{rank } H_2, \text{rank } H_3, \dots \quad (2.8)$$

è crescente in senso lato, cosicchè $\text{rank } H$ può essere ottenuto come $\lim_{r \rightarrow +\infty} (\text{rank } H_r)$. La valutazione di $\text{rank } H$, ove esso sia finito, non coinvolge peraltro il computo di tutta la sequenza infinita (2.8) in quanto vale il seguente:

Teor. 2 Se $W(s)$ è una funzione di trasferimento matriciale, di dimensione $p \times m$, razionale propria, e se v è il grado del minimo comune multiplo dei denominatori di $W(s)$, la matrice di Hankel H associata a $W(s)$ ha rango finito.

Posto $r = v \cdot \min(p, m)$, si ha inoltre

$$\text{rank } \mathcal{H} = \text{rank } \mathcal{H}_r.$$

La prova del teor. 2 è una conseguenza del par. 4, e sarà riportata perciò nel seguito.

Il lemma 1 e l'introduzione della matrice di Hankel ci hanno posto in grado di provare il

Teor. 3 Se $\Sigma = (A, B, C, O)$ è una realizzazione completamente controllabile e completamente osservabile di una matrice $W(s)$, e se $\mathcal{H}$ è la matrice di Hankel associata a $W(s)$, allora la dimensione della realizzazione Σ coincide col rango della matrice $\mathcal{H}$.

prova. Sia n la dimensione della realizzazione Σ . Consideriamo le seguenti sequenze di matrici

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= [B] \\ \mathcal{H}_2 &= [B'AB] \\ \mathcal{H}_3 &= [B'AB' A^2 B] \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{O}_1 &= [C^T] \\ \mathcal{O}_2 &= [C^T A^T C^T] \\ \mathcal{O}_3 &= [C^T A^T C^T (A^2)^T C^T] \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

In particolare risulta

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n &= \mathcal{H} \text{ (matrice di controllabilità)} \\ \mathcal{O}_n &= \mathcal{O} \text{ (matrice di osservabilità)}\end{aligned}$$

E' immediato verificare le relazioni

$$\mathcal{O}_r^T \mathcal{H}_r = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{r-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^r B \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ CA^{r-1}CA^r B & \dots & CA^{2r-2}B \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Tenuto conto del lemma 1, se $\mathcal{H}_r$ è la submatrice di Hankel di ordine r associata a $W(s)$, si ha per ogni r

$$\mathcal{O}_r^T \mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r \quad (2.10)$$

Poichè Σ è completamente controllabile ed osservabile:

$$\begin{aligned}n &= \text{rank } \mathcal{H} = \text{rank } \mathcal{H}_n = \text{rank } \mathcal{H}_{n+1} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+2} = \dots\dots \\ n &= \text{rank } \mathcal{O} = \text{rank } \mathcal{O}_n = \text{rank } \mathcal{O}_{n+1} = \text{rank } \mathcal{O}_{n+2} = \dots\dots\end{aligned}$$

Quindi, per la prop. 5 dell'appendice A.1

$$n = \text{rank } \mathcal{H}_n = \text{rank } \mathcal{H}_{n+1} = \text{rank } \mathcal{H}_{n+2} = \dots\dots \quad (2.11)$$

Ma allora

$$\text{rank } \mathcal{H} = \sup_r \text{rank } \mathcal{H}_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{rank } \mathcal{H}_r = n$$

ed in conclusione

$$\dim X = \text{rank } \mathcal{H} = n \quad (2.12)$$

Poichè il rango della matrice di Hankel associata a $W(s)$ non dipende dalla particolare realizzazione di $W(s)$, è immediata la prova del

Coroll. 1 Le realizzazioni completamente controllabili ed osservabili di una assegnata funzione di trasferimento $W(s)$ hanno tutte la medesima dimensione, eguale al rango della matrice di Hankel $\mathcal{H}$ associata a $W(s)$, e sono pertanto tutte realizzazioni minime.

I teoremi 2 e 3 consentono di stabilire in modo piuttosto semplice (almeno dal punto di vista concettuale) quale sia la dimensione di una realizzazione minima per una prescritta $W(s)$; l'esempio che segue è appunto una applicazione dei risultati ottenuti.

Esempio 1. Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Facili manipolazioni e l'uso della serie geometrica portano alla

$$\begin{aligned} W(s) &= (s^{-1} - s^{-2} + s^{-3} - s^{-4} + \dots)(s^{-1} - 2s^{-2} + 4s^{-3} - 8s^{-4} + \dots) \\ &= s^{-2} - 3s^{-3} + 7s^{-4} - 15s^{-5} + 31s^{-6} - 63s^{-7} + \dots \end{aligned}$$

La matrice di Hankel associata a $W(s)$ è pertanto:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 7 & -15 & \dots \\ 1 & -3 & 7 & -15 & 31 & \dots \\ -3 & 7 & -15 & 31 & -63 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

E' immediato verificare che

$$\text{rank } H_1^0 = 0, \quad \text{rank } H_2^0 = 2$$

Quindi, per il teor. 2, $\text{rank } H = 2$, e per il teor. 3 le realizzazioni completamente controllabili ed osservabili di $W(s)$ hanno dimensione 2 (in realtà ci rimane ancora da provare, e lo faremo nel par. 3, che esistono delle realizzazioni per la $W(s)$ assegnata!).

Concludiamo questo paragrafo mostrando come sia possibile, una volta costruita una realizzazione minima $\Sigma = (A, B, C, O)$ per una prescritta $W(s)$, ottenere da Σ tutte le possibili realizzazioni minime.

E' ben noto che, per ogni matrice invertibile M avente le medesime dimensioni $n \times n$ di A , il sistema $\hat{\Sigma} = (M^{-1}AM, M^{-1}B, CM, O)$ è ancora una realizzazione - necessariamente minima - per $W(s)$: il teorema seguente dimostra che al variare di M sul gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili si ottengono tutte le realizzazioni minime di $W(s)$.

Teor. 4 Siano $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, O)$ e $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2, O)$ due realizzazioni minime, di dimensione n , della medesima funzione di trasferimento $W(s)$.

Esiste allora una matrice non singolare $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che

$$A_1 = M^{-1}A_2M, \quad B_1 = M^{-1}B_2, \quad C_1 = C_2M \quad (2.13)$$

prova. Per il teor. 1, le matrici di controllabilità e di osservabilità relative alle due realizzazioni hanno rango pieno n :

$$\begin{aligned} X_1 &= \begin{bmatrix} B_1^T A_1 B_1^T & \dots & A_1^{n-1} B_1^T \end{bmatrix}, & \text{rank } X_1 &= n \\ X_2 &= \begin{bmatrix} B_2^T A_2 B_2^T & \dots & A_2^{n-1} B_2^T \end{bmatrix}, & \text{rank } X_2 &= n \\ O_1 &= \begin{bmatrix} C_1^T A_1^T C_1^T & \dots & (A_1^{n-1})^T C_1^T \end{bmatrix}, & \text{rank } O_1 &= n \\ O_2 &= \begin{bmatrix} C_2^T A_2^T C_2^T & \dots & (A_2^{n-1})^T C_2^T \end{bmatrix}, & \text{rank } O_2 &= n \end{aligned}$$

Se X_n è la submatrice di Hankel di ordine n relativa a $W(s)$, il lemma 1 e facili calcoli implicano la eguaglianza:

$$O_1^T X_1 = O_2^T X_2 = X_n^T \quad (2.14)$$

D'altra parte è una conseguenza immediata del teorema di Binet (*) che la matrice $n \times n$

$$O_2 \cdot O_1^T \quad (2.15)$$

abbia rango n , e sia pertanto invertibile.

Tenuto conto di (2.14),

$$X_2 = (O_2 O_2^T)^{-1} O_2 O_1^T X_2 = (O_2 O_2^T)^{-1} O_2 O_1^T X_1$$

e posto

$$M = (O_2 O_2^T)^{-1} O_2 O_1^T \quad (2.16)$$

si ha subito

$$X_2 = M X_1 \quad (2.17)$$

Proveremo ora che la matrice M così costruita è la matrice per cui valgono le relazioni (2.13).

(*) Siano $H, K \in \mathbb{R}^{n \times h}$. Il determinante della matrice quadrata $H K^T$ è nullo se $n > h$, è il prodotto $(\det H)(\det K)$ se $n = h$, è la somma dei prodotti dei minori corrispondenti d'ordine n in H e in K se $n < h$ (TEOREMA DI BINET).

Se $F = R$, $H = K$, $\text{rank } H = n$, il prodotto di due minori corrispondenti è non negativo, ed esistendo certamente in H almeno un minore di ordine n non nullo, è ovvia la

$$\det(H H^T) > 0$$

Osserviamo preliminarmente che (2.17), tenuto conto della posizione 5 dell'appendice A.1 implica

$$n = \text{rank } \mathcal{X}_2 \leq \text{rank } M \leq n \quad (2.18)$$

e quindi l'invertibilità di M .

Ma allora da (2.17)

$$[B_2^T A_2 B_2^T \dots A_2 B_2^T] = M[B_1^T A_1 B_1^T \dots A_1^{n-1} B_1^T]$$

si ha subito $B_2 = MB_1$ e quindi la seconda delle (2.13)

$$B_1 = M^{-1}B_2$$

$$(2.13.ii)$$

Utilizzando il lemma 1, si ha (la prova è un facile esercizio)

$$\mathcal{O}_1^T A_1 \mathcal{X}_1 = \mathcal{O}_2^T A_2 \mathcal{X}_2 \quad (2.19)$$

e quindi

$$MA_1 \mathcal{X}_1 = (\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_2^T)^{-1} \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_1^T A_1 \mathcal{X}_1 = (\mathcal{O}_2 \mathcal{O}_2^T)^{-1} \mathcal{O}_2 \mathcal{O}_2^T A_2 \mathcal{X}_2 = A_2 \mathcal{X}_2 \quad (2.20)$$

Da (2.17) risulta $\mathcal{X}_1 = M^{-1} \mathcal{X}_2$, e quindi

$$\begin{aligned} MA_1 M^{-1} \mathcal{X}_2 &= A_2 \mathcal{X}_2 \\ (MA_1 M^{-1} - A_2) \mathcal{X}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Avendo $\mathcal{X}_2$ rango pieno n , (2.21) può valere se e solo se $(MA_1 M^{-1} - A_2)$ ha rango nullo, cioè se e solo se

$$MA_1 M^{-1} - A_2 = 0 \quad (2.22)$$

La (2.22) implica immediatamente (2.13.i).

Per provare (2.13.iii), si premoltiplichino per $\mathcal{O}_1^T$, i membri di $\mathcal{X}_1 = M^{-1} \mathcal{X}_2$; ricordando (2.14) si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^T M^{-1} \mathcal{X}_2 &= \mathcal{O}_1^T \mathcal{X}_1 = \mathcal{O}_2^T \mathcal{X}_2 \\ (\mathcal{O}_1^T M^{-1} - \mathcal{O}_2^T) \mathcal{X}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

ancora una volta, poiché $\mathcal{X}_2$ ha rango pieno n , deve risultare di rango nullo $(\mathcal{O}_1^T M^{-1} - \mathcal{O}_2^T)$, e cioè si ha

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A_1 \\ \vdots \\ C_1 A_1^{n-1} \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A_2 \\ \vdots \\ C_2 A_2^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Ma allora

$$C_1 M^{-1} = C_2$$

che prova la (2.13.iii). ■

Si noti che il teor. 4 fornisce, tramite (2.16), una effettiva costruzione per la matrice di trasformazione M .

3. Costruzione di una realizzazione per $W(s)$ scalare

Fino a questo punto, abbiamo indagato alcune proprietà delle realizzazioni di una prescritta funzione di trasferimento, assumendo implicitamente l'ipotesi che l'insieme delle realizzazioni non sia vuoto.

In questo paragrafo e nel successivo proveremo che, sotto condizioni già riconosciute necessarie per l'esistenza di una realizzazione, ogni funzione di trasferimento $W(s)$ è realizzabile. La dimostrazione avrà un carattere costruttivo, nel senso che consentirà di ottenere effettivamente da $W(s)$ quattro matrici A, B, C, D che la realizzano: questo fatto è importante da un punto di vista applicativo.

Consideriamo qui il caso che $W(s)$ sia scalare, ossia relativa ad un sistema con un ingresso ed una uscita; nell'ipotesi che si abbia $W(\infty) = 0$, $W(s)$ ha la forma

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad b_i, a_i \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

In (3.1) ogni coefficiente del numeratore, e quindi anche b_{n-1} , può essere nullo, mentre nel denominatore il coefficiente del termine di grado massimo è supposto unitario.

Teor.1 Sia $W(s)$ come in (3.1).

Una realizzazione completamente controllabile è data allora dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

prova. Facciamo vedere dapprima che $\Sigma = (A, B, C, 0)$ è una realizzazione per $W(s)$, ossia che

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.3)$$

Cominciamo dimostrando che

$$\det(sI - A) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n \quad (3.4)$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s-1 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & s & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} + s \end{bmatrix} =$$

$$= s \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & (a_{n-1} + s) \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_0 & a_2 & a_3 & \dots & (a_{n-1} + s) \end{bmatrix} - 1$$

$$= s \det \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & (a_{n-1} + s) \end{bmatrix} + a_0 \quad (3.5)$$

Induttivamente si assume che l'ultimo determinante di (3.5) valga $a_1 + a_2s + \dots + a_{n-1}s^{n-2} + s^{n-1}$, e si ottiene la (3.4).

Per computare $C(sI - A)^{-1}B$ si ricordi che poichè B ha non nul

la soltanto l'ultima componente, il vettore colonna $(sI - A)^{-1}B$ è costituito dall'ultima colonna della matrice $(sI - A)^{-1}$; allora

$$(sI - A)^{-1}B = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B = \frac{1}{s^n - a_1s^{n-1} - \dots - a_{n-1}s - a_0} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}$$

come facilmente si deduce dalla definizione di aggiunta di una matrice e dalla espressione di $(sI - A)$, e quindi

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_0 + a_1s + \dots + s^n} = W(s)$$

Resta ora da dimostrare che la realizzazione (3.2) è completamente controllabile, ossia che la matrice di controllabilità $\mathcal{K} = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ ha rango n .

Infatti abbiamo

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ k_{n,2} \end{bmatrix}, A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ k_{n,3} \end{bmatrix}, \dots, A^{n-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ k_{2n} \\ k_{3n} \\ k_{4n} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{bmatrix}$$

dove k_{ij} indicano degli elementi di valore irrilevante. Di conseguenza

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & k_{n-3,n} \\ 0 & 1 & k_{n-2,n} \\ 1 & k_{n-1,3} & k_{n-1,n} & k_{n,n} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

è una matrice triangolare a rango pieno perchè è non nullo il prodotto degli elementi sulla diagonale secondaria. ■

Teor.2 Sia $W(s)$ data come in (3.1)

Una sua realizzazione completamente osservabile è data dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

La prova è analoga a quella del teor. 1, ed è lasciata come esercizio.

Teor.3 Le realizzazioni (3.2) e (3.7) sono minime se e solo se numeratore e denominatore di $W(s)$ sono privi di fattori comuni.

prova. Nel caso della realizzazione (3.2), sarà sufficiente provare che essa è completamente osservabile se e solo se numeratore e denominatore di $W(s)$ sono privi di fattori comuni.

Infatti, se in (3.1) numeratore e denominatore non sono privi fra loro, la realizzazione (3.2) in dimensione n non può essere osservabile (e quindi minima) perché la cancellazione dei fattori comuni porta ad esprimere $W(s)$ con un denominatore di grado inferiore ad n , e quindi a realizzare $W(s)$ in dimensione minore di n .

Viceversa, se (A, B, C) di (3.2) non sono realizzazione completamente osservabile per $W(s)$, con la tecnica esposta in 1.5 è possibile ottenere una realizzazione (A_{11}, B_1, C_1) in dimensione minore.

Allora si ha:

$$W(s) = C(sI_n - A)B = C_1(sI_1 - A_{11})B_1 \quad (3.8)$$

ed il denominatore di $W(s)$ può quindi essere espresso come il determinante di $(sI - A_{11})$, che ha in s grado minore di n : ciò implica che nella forma (3.1) $W(s)$ ha fattori comuni al numeratore ed al denominatore.

Ragionamenti analoghi valgono per la realizzazione (3.7). ■

Esercizio 1. Si consideri il sistema scalare (con un ingresso ed un'uscita) controllabile ed osservabile, di dimensione n

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Si provi che A e BC non commutano se $n > 1$.

Esercizio 2. Nelle medesime ipotesi dell'esercizio precedente, se A è diagonale nessuna componente di B e di C può essere nulla.

4. Costruzione di una realizzazione per $W(s)$ matriciale

Ci proponiamo ora di generalizzare il risultato ottenuto nel par. 3, costruendo una realizzazione per una funzione di trasferimento matriciale $W(s)$ soddisfacente le condizioni seguenti:

- i) gli elementi di $W(s)$ sono funzioni razionali a coefficienti reali nella variabile complessa s
- ii) $\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0$

(4.1)

Per quanto detto nel par. 1, se proveremo che $W(s)$ è realizzabile quando valgono (i) e (ii), avremo provato la realizzabilità di ogni $W(s)$ razionale regolare all'infinito.

I fatti esposti nel lemma 1 sono ovvi:

Lemma 1 Sia $W(s)$ funzione di trasferimento matriciale, di dimensioni $p \times m$, soddisfacente i) e ii).

Detto $p(s) = s^v + a_{v-1}s^{v-1} + \dots + a_1s + a_0$ il minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di $W(s)$, esistono v matrici $B_0, B_1, \dots, B_{v-1} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ tali da aversi:

$$p(s)W(s) = \sum_{i=0}^{v-1} B_i s^i \quad (4.2)$$

Osservazione: è importante, per la costruzione che seguirà, scegliere monico (i.e. con il coefficiente del monomio di grado massimo unitario) il polinomio $p(s)$.

Teor. 1 Siano $W(s), p(s), B_0, B_1, \dots, B_{v-1}$ come nel lemma 1.

Una realizzazione completamente controllabile per $W(s)$, di dimensione mv , è data dalle matrici (*)

$$A = \begin{bmatrix} O_m & I_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & I_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_m & O_m & O_m & \dots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \dots & -a_{v-1} I_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

(*) O_m indica la matrice nulla di dimensioni $m \times m$
 I_m indica la matrice unità di dimensioni $m \times m$

$$B = \begin{bmatrix} O_m \\ O_m \\ \vdots \\ O_m \\ I_m \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{v-1} \end{bmatrix}$$

Una realizzazione completamente osservabile per $W(s)$, di dimensione pv , è data dalle matrici:

$$A = \begin{bmatrix} O_p & O_p & \dots & O_p & -a_0 I_p \\ I_p & O_p & \dots & O_p & -a_1 I_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_p & I_p & \dots & O_p & -a_{v-2} I_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O_p & O_p & \dots & I_p & -a_{v-1} I_p \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_{v-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} O_p & O_p & \dots & I_p \end{bmatrix}$$

prova. è molto simile, salvo alcune complicazioni formali, a quella del teor. 1 del paragrafo precedente: viene qui omessa.

Si osservi che le realizzazioni in par. 3 per $W(s)$ scalare sono la particolareggiata di (4.3) e (4.4) nel caso in cui si abbia $m = p = 1$. Si è preferito tuttavia dare una trattazione separata per due motivi: il primo è che nel caso scalare è piuttosto semplice provare che (4.3) e (4.4) sono realizzazioni e verificare che la prima è completamente controllabile e la seconda è completamente osservabile; il secondo è che nel caso matriciale la costruzione presentata non può assicurare direttamente una realizzazione minima. Vedremo nei paragrafi successivi in quale modo la dimensione minima della realizzazione si lega alle proprietà strutturali di $W(s)$, e da remoto procedure per ottenere direttamente realizzazioni minime.

Il teor. 1 ha una notevole importanza perchè, insieme ad alcuni fatti dimostrati in precedenza, consente di stabilire il

Coroll. 1 Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice $p \times m$ $W(s)$ di funzioni della variabile complessa s regolare all'infinito sia realizzabile è che tutte le funzioni siano razionali, a coefficienti reali.

Se v è il grado del minimo comune multiplo dei denominatori di tali funzioni, la dimensione delle realizzazioni minime non supera $v \cdot \min(p, m)$

La dimostrazione è ovvia.

Il teorema che segue stabilisce un legame fra lo spettro della matrice A di un sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ e l'insieme dei poli della f. di t. $W(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$.

Teor. 2 Sia $(A', B', C', D) = \Sigma'$ una realizzazione per $W(s)$. Allora lo spettro (i.e. l'insieme degli autovalori) della matrice A' contiene l'insieme dei poli di $W(s)$ (i.e. l'insieme dei punti di $\mathbb{C}$ dove ha un polo almeno uno degli elementi di $W(s)$).

Se Σ' è una realizzazione minima di $W(s)$, lo spettro di A' e lo insieme dei poli di $W(s)$ coincidono.

prova. Poichè risulta

$$W(s) = D + C'(sI - A')^{-1}B' = D + C' \frac{\text{Adj}(sI - A')}{\det(sI - A')} B'$$

è ovvio che i poli di $W(s)$ sono da ricercare fra gli zeri di $\det(sI - A')$ e quindi fra gli autovalori di A' : ciò dimostra la prima parte del teorema.

Per la seconda parte, faremo vedere che lo spettro di A' , quando la realizzazione è minima, è contenuto nell'insieme degli autovalori di $W(s)$, e quindi coincide con esso. Osserviamo intanto che, una volta che in $W(s)$ si siano resi mutuamente primi numeratore e denominatore di ciascuna funzione razionale componente, l'insieme degli zeri del m.c.m. $p(s)$ dei denominatori è l'insieme dei poli di $W(s)$, ed è possibile verificare (esercizio!) che la realizzazione completamente controllabile (A, B, C, D) del teor. 1 ha il polinomio $(p(s))^m$ come polinomio caratteristico della matrice A .

Quindi lo spettro di A coincide con l'insieme dei poli di $W(s)$. D'altronde, se la coppia (A, B) non è completamente osservabile, esiste una matrice invertibile M , delle stesse dimensioni di A , tale da aversi

$$\hat{A} = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = M^{-1} B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C M = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema $(A_{11}, B_1, C_1, D) = \Sigma_M$ è una realizzazione completamente controllabile ed osservabile (e quindi minima) di $W(s)$. Poichè si passa da A ad $\hat{A}$ per similarità, lo spettro di A e quello di $\hat{A}$ coincidono, e poichè $\hat{A}$ è triangolare a blocchi, lo spettro di $\hat{A}$ è l'unione (insiemistica) dello spettro di A_{11} e dello spettro di A_{22} .

Ricordando infine il teor. 4 di par. 2, A_{11} ed A' sono simili e quindi hanno il medesimo spettro, e tenuto conto della prima parte del teorema, si ha la catena di inclusioni (*)

$$\{\text{poli di } W\} = \lambda(A) = \lambda(\hat{A}) \supseteq \lambda(A_{11}) = \lambda(A') \supseteq \{\text{poli di } W\}$$

che porgono la conclusione.

Osservazione. Il teor. 2 non asserisce affatto che, per una realizzazione minima, gli autovalori di A ed i poli di $W(s)$ presentino anche la stessa molteplicità. Ciò in generale è falso!

Esercizio 1. Si provi che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

Esercizio 2. Si provi che lo spettro di una matrice triangolare a blocchi è l'unione degli spettri dei blocchi diagonali.

Esempio 1. Sia data la f. di t. realizzabile

(*) Con $\lambda(A)$ s'intende l'insieme degli autovalori della matrice A .

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{s+3}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Risulta

$$D_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W'(s) = W(s) - D_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Procediamo alla costruzione di una realizzazione completamente controllabile per $W'(s)$: il m.c.m. dei denominatori è

$$p(s) = s(s+1) = s^2 + s$$

e si ha

$$W'(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Dal teor. 1 otteniamo per $W'(s)$ la realizzazione $(A, B, C, -)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di osservabilità associata ad (A, C) è:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix};$$

il suo rango è evidentemente tre e quindi la realizzazione non è minima.

Per minimizzarla, è sufficiente procedere come indicato nel cap. I, al par. 5: la matrice $(M^{-1})^T$ avrà come prime tre colonne tre colonne indipendenti di $\mathcal{O}$, od anche tre colonne indipendenti appartenenti allo spazio generato dalle colonne di $\mathcal{O}$, e la quarta colonna dovrà assicurare l'invertibilità.

E' facile verificare che le condizioni suaccennate sono soddisfatte - ad es. - dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (M^{-1})^T$$

Allora

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\hat{A} = M^{-1} A M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{B} = M^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una realizzazione minima di $W(s)$ è pertanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Una matrice quadrata A si dice "nilpotente" se $A^k = 0$ per qualche intero positivo k .

Si provi che se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è nilpotente, il polinomio minimo e il polinomio caratteristico di A sono s^v ed s^n , $v \leq n$, rispettivamente; v è il più piccolo valore positivo di k per cui $A^k = 0$, e vien chiamato indice di nilpotenza di A .

Esercizio 4. Un sistema $\Sigma = (A, B, C, -)$ è detto nilpotente se A è matrice nilpotente.

Si provi che

- i) Se una realizzazione di $W(s)$ è nilpotente, $W(s)$ ha solo un polo (eventualmente multiplo) nell'origine
- ii) Se un sistema $(A, B, C, -)$ è nilpotente, sono nilpotenti: ogni sistema simile, ogni sistema completamente controllabile associato, ogni sistema completamente osservabile associato.
- iii) Se $W(s)$ ha solo un polo (eventualmente multiplo) nell'origine, ogni sua realizzazione minima è nilpotente.
- iv) $W(s)$ ha una realizzazione nilpotente se e solo se la matrice di Hankel ha un numero finito di blocchi non nulli.

Esercizio 5. Sia $\Sigma = (A, B, C, -)$ una realizzazione nilpotente osservabile (controll.) di $\begin{matrix} d \\ i=1 \end{matrix} M_i s^{-i}$, $M_d \neq 0$.

- i) La matrice di controllabilità (di osservabilità) ha nulli tutti i blocchi successivi al d -esimo, e non nulli i blocchi fino al d -esimo.
- ii) Se Σ è minima, d è l'indice di nilp. di A (Sugg: A^d contiene nel proprio nucleo le colonne di X).

5. Contenuto impulsivo della risposta di un GLS

E' noto che, quando si considera un GLS, nella valutazione dell'uscita

$$y = Cx + D_0 u + \sum_{i=1}^d D_i \frac{d^i u}{dt^i} \quad (5.1)$$

le derivate vanno intese in senso generalizzato: il loro contenuto impulsivo è dato dalle

$$\frac{du}{dt} = [u(0_+) - u(0_-)] \delta$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = [u(0_+) - u(0_-)] \delta_1 + [u'(0_+) - u'(0_-)] \delta$$

.....

$$\frac{d^d u}{dt^d} = [u(0_+) - u(0_-)] \delta_{d-1} + \dots + [u^{(d-1)}(0_+) - u^{(d-1)}(0_-)] \delta$$

Questo contenuto impulsivo dipende sia dai valori istantanei $u(i)(0) = u^{(i)}(0_+)$ (u è supposta regolare a destra nell'origine), sia in un certo senso dalla storia passata, che genera con un processo di limite per $t \rightarrow 0_-$ i vettori $u^{(i)}(0_-)$.

Riscriviamo allora (5.1) tenendo separati i due contributi impulsivi:

$$y(0) = Cx(0) + D_0 u(0) + \sum_{i=1}^d D_i \frac{d^i}{dt^i} (\delta_{-1} u)(0) + i \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned} -i &= [\delta D_1 + \delta_1 D_2 + \dots + \delta_{d-1} D_d] u(0_-) + \\ &+ [\delta D_2 + \delta_1 D_3 + \dots + \delta_{d-2} D_d] u'(0_-) + \\ &+ \dots + \delta D_d u^{(d-1)}(0_-) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Al variare di $u(0_-)$, $u'(0_-)$, ..., i descrive uno spazio vettoriale $\mathcal{J}$ sul corpo $\mathbb{R}$, e (5.4) assegna la mappa lineare

$$\psi: \mathbb{R}^{md} \rightarrow \mathcal{J}$$

che lega lo spazio $\mathcal{Q}(0_-) \times \mathcal{Q}'(0_-) \times \dots \times \mathcal{Q}^{(d-1)}(0_-)$ allo spazio $\mathcal{J}$.

La considerazione dei due contenuti impulsivi è forse più intuitiva nell'analisi alle $\mathcal{L}$ -trasformate: la risposta del GLS, che parte dallo stato x_0 al tempo 0, è espressa come

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} X_0 + D_0 \left[C(sI - A)^{-1} B \right] U(s) + \sum_{i=1}^d D_i s^i U(s) + I(s) \quad (5.5)$$

dove è

$$\begin{aligned} -I(s) = & \begin{bmatrix} D_1 u(0_-) + D_2 u'(0_-) + \dots + D_d u^{(d-1)}(0_-) \end{bmatrix} + \\ & + s \begin{bmatrix} D_2 u(0_-) + D_3 u'(0_-) + \dots + D_d u^{(d-2)}(0_-) \end{bmatrix} + \\ & + \dots + s^{d-1} D_d u(0_-) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Quindi $I(s)$ congloba il contenuto impulsivo per $t = 0$ dovuto alla "storia passata": $u(0_-), \dots, u^{(d-1)}(0_-)$.

$U(s)$ d'altra parte è la $\mathcal{L}$ -trasformata di u δ_{-1} (ossia di una funzione regolare a destra nell'origine, con supporto contenuto in $[0, +\infty)$), ed $s^i U(s)$ è la trasformata della derivata distribuzionale i -esima della funzione $u \delta_{-1}$.

$$s U(s) = \mathcal{L} \left(\frac{du}{dt} \delta_{-1} + u(0_+) \delta \right)$$

.....

$$s^i U(s) = \mathcal{L} \left(\frac{d^i u}{dt^i} \delta_{-1} + u^{(i-1)}(0_+) \delta + \dots + u(0_+) \delta_{i-1} \right)$$

Perciò $\sum_{i=1}^d s^i D_i U(s)$ congloba al contenuto impulsivo per $t = 0$ dovuto ai valori "attuali" di u e delle sue derivate.

Torniamo ora alla (5.4), ed osserviamo che i può essere espresso come

$$-i = \begin{bmatrix} \delta_{p_1} & \delta_{p_2} & \dots & \delta_{p_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_d \\ D_2 & D_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0_-) \\ u'(0_-) \\ \dots \\ u^{(d-1)}(0_-) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

e pertanto la mappa $\psi: \mathbb{R}^{md} \rightarrow \mathcal{H}$ è composta di due trasformazioni lineari: la prima

$$\psi_1: \mathbb{R}^{md} \rightarrow \mathbb{R}^{pd}$$

è indotta dalla matrice

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_d \\ D_2 & D_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_d & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

e la seconda, iniettiva, ψ_2 è indotta su $\mathbb{R}^{pd}$ dall'operatore

$$\begin{bmatrix} \delta_{p_1} & \delta_{p_2} & \dots & \delta_{p_d} \\ \delta_{p_2} & \delta_{p_3} & \dots & \delta_{p_d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{p_d} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$\dim \mathcal{H} = \dim(\text{Im} \psi) = \dim(\text{Im} \psi_2 \circ \psi_1) = \text{rank } \mathcal{H} \quad (5.9)$$

Teor. 1 La dimensione dello spazio $\mathcal{H}$ è uguale alla dimensione minima in cui può essere realizzata la funzione di trasferimento propria

$$V(z) = \sum_{i=1}^d D_i z^{-i} \quad (5.10)$$

prova. Immediata da (5.9), osservando che $\mathcal{H}$ è la matrice di Hankel associata a $V(z)$. ■

Concludiamo considerando una realizzazione nilpotente $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ di $V(z)$ (par. 4., es. 4):

$$H(z) = \tilde{C}(zI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \quad \tilde{A}^v = 0 \quad (5.11)$$

Il sistema discreto Δ , con spazio degli stati $\tilde{X}$,

$$A: \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{B} u_k \\ \tilde{y}_k = \tilde{C} \tilde{x}_k \end{cases} \quad (5.12)$$

in conseguenza all'ingresso

$$\tilde{u}_{-j-1} = u^{(j)}(0_-) \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

presenta un'uscita in evoluzione libera $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots$ che soddisfa la relazione:

$$i = \tilde{y}_0 \delta + \tilde{y}_1 \delta_1 + \tilde{y}_2 \delta_2 + \dots \quad (5.14)$$

(la prova è lasciata come esercizio).

Poiché il vettore $\tilde{x}_0$, raggiunto da Δ sollecitato da (5.13), consente di computare i tramite (5.12) e (5.14), $\tilde{x}_0$ può assumersi a vettore di condizioni iniziali al posto di $[u(0), u'(0), \dots, u^{(d-1)}(0)]^T$, e la dimensione di $\tilde{X}$ può essere ridotta al rango di $\mathcal{H}$, dato che $\text{rank } \mathcal{H}$ è la dimensione minima di una realizzazione (necessariamente nilpotente, di indice d) di $H(z)$.

Esercizio 1. Si dia un'espressione esplicita di $\tilde{x}_0$ in funzione di $\tilde{A}, \tilde{B}$ e delle derivate successive dell'ingresso per $t = 0_-$.

6. Grado di Mc Millan

E' noto che una funzione razionale scalare della variabile complessa s è suscettibile di uno sviluppo in frazioni parziali del tipo

$$W(s) = D_d s^d + D_{d-1} s^{d-1} + \dots + D_1 s + D_0 + \frac{F_{11}}{s - s_1} + \dots + \frac{F_{l1}}{(s - s_l)^{r_1}} + \dots + \frac{F_{t1}}{s - s_t} + \dots + \frac{F_{trt}}{(s - s_t)^{r_t}} \quad (6.1)$$

dove $s_1, s_2, \dots, s_t$ sono i poli "al finito" di $W(s)$, con molteplicità $r_1, r_2, \dots, r_t$ rispettivamente, e d è la molteplicità dell'eventuale polo all'infinito.

Quando $W(s)$ è una matrice $p \times m$ di funzioni razionali, è ancora possibile definire uno sviluppo in frazioni parziali, semplicemente considerando gli sviluppi delle singole funzioni componenti la matrice. La formula che si ottiene è in tutto simile alla (6.1) con la differenza che D_i ed F_{hk} sono matrici $p \times m$ di numeri complessi (eventualmente reali).

Esempio 1.

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{3s+5}{s^2+3s+2} & \frac{s^2+s+1}{s+1} \\ \frac{3}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

Sviluppando in frazioni parziali le componenti, si ottiene

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{2-2s+4}{s+2} & \frac{8}{s+2} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} = s^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Un punto s_a del piano di Gauss si dice polo della matrice $W(s)$ se è polo per almeno un elemento di $W(s)$.

Indichiamo con $\sum_{a=1}^r F_{a,b} (s-s_a)^{-b}$ la somma dei termini che in (6.1) hanno poli in s_a : la classe di tutte le funzioni $\sum_{a=1}^r F_{a,b} (s-s_a)^{-b} + K$, al variare di K in $\mathbb{R}^{p \times m}$, è detta la parte principale di $W(s)$ relativa al polo s_a . La classe $\sum_{i=1}^d D_i s^i + K$ è detta la parte principale di $W(s)$ relativa al polo all'infinito.

La parte principale relativa al polo s_a si indica con $W(s, s_a)$, quella relativa al polo all'infinito si indica con $W(s, \infty)$. E' ovvio poi definire "parte regolare di $W(s)$ " la somma di tutte le parti principali al finito:

$$W^R(s) \triangleq \sum_a W(s, s_a) \quad (6.2)$$

Esercizio 1. Se $W(s)$ ha elementi in $\mathbb{R}(s)$ (funzioni razionali a coefficienti reali), allora le parti principali

$$W(s, p) = \sum_k \frac{F_k}{(s-p)^k}$$

$$W(s, \check{p}) = \sum_k \frac{E_k}{(s-\check{p})^k}$$

sono legate dalle relazioni $E_k = \check{F}_k$, e $W(s, p) + W(s, \check{p})$ è a coefficienti reali.

In generale, anche supponendo che $W(s)$ sia data su $\mathbb{R}(s)$ le parti principali non hanno coefficienti reali, e sono pertanto matrici su $\mathbb{C}(s)$.

La teoria della realizzazione di una matrice razionale $W(s)$ regolare all'infinito può essere impostata sul corpo complesso in modo affatto analogo a quello adottato per il corpo reale: naturalmente le matrici A, B, C, D_0 di una realizzazione, la matrice di controllabilità e quella di osservabilità, e la matrice di Hankel saranno ad elementi complessi.

Per quello che segue, ha importanza osservare che se $W(s)$ è data su $\mathbb{R}(s)$ e se si considerano ammissibili per essa anche le realizzazioni complesse, la dimensione di una realizzazione minima per $W(s)$ è la medesima, sia che si vincolino A, B, C, D_0 a prendere valori reali, sia che si consentano valori complessi.

Infatti, anche sul corpo complesso le realizzazioni minime sono quelle completamente controllabili ed osservabili, e poichè, quando $W(s)$ è ad elementi in $\mathbb{R}(s)$, esiste una realizzazione reale controllabile ed osservabile (par. 4), questa è anche minima sul corpo complesso.

Esercizio 2. Se $W(s)$ è ad elementi in $\mathbb{Q}(s)$, $W(s)$ ammette una realizzazione minima su $\mathbb{Q}$, che è minima anche su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.

Introduciamo ora una nozione ristretta di grado di McMillan, riferibile a ciascuna parte principale di una matrice $W(s)$.

Vedremo in seguito (def. 2) una definizione valida per la matrice $W(s)$ nel suo complesso, e studieremo come le due definizioni possono essere connesse significativamente. Maggiori dettagli possono trovarsi in Newcomb [N.1.7] e in Anderson [A.17].

Def. 1. Sia $W(s, p)$ la parte principale di una matrice $W(s)$ relativa al polo p al finito.

Il grado (di McMillan) di $W(s, p)$ si definisce come la dimensione minima delle realizzazioni (eventualmente complesse) di $W(s, p)$ e si indica con $\delta[W(s, p)]$ o con $\delta[W, p]$.

Se $W(s, \infty)$ è la parte principale relativa al polo all'infinito di $W(s)$, posto $W(s, \frac{1}{s}) = V(z)$, si definisce il grado di $W(s, \infty)$ come $\delta[V, 0]$.

Osserviamo che $\delta[W(s, \infty)]$ è il più piccolo intero n per cui esistono matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$, tali da verificare la

$$W(s, \infty) = C(s^{-1}I - A)^{-1}B + \text{cost}$$

La definizione di grado data in def. 1 non dipende dalla matrice costante K a meno della quale sono definite le parti principali: infatti la dimensione minima di una realizzazione non dipende dalla matrice costante della funzione di trasferimento. Qui vogliamo provare però qualcosa di più, e cioè che il grado di una parte principale $W(s, p) = \sum_{k=0}^q F_k / (s-p)^k$ oltre a non dipendere da F_0 non dipende neppure da p , ma soltanto dalle matrici $F_1, F_2, \dots, F_q$.

Prop. 1. Sia p un punto al finito del piano di Gauss e siano $F_0, F_1, \dots, F_q$ matrici costanti di dimensioni $p \times m$. Risulta allora

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q F_k (s+p)^{-k} \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_q \\ F_2 & F_3 & F_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

prova. Per $p = 0$, l'eguaglianza è ovvia ricordando le proprietà della matrice di Hankel e la definizione di grado di McMillan. Se (A, B, C, F_0) è realizzazione minima per $\sum_{k=0}^q F_k / s^k$, $(A-pI, B, C, F_0)$ è realizzazione per $\sum_{k=0}^q F_k / (s+p)^k$, giacchè dalla

$$F_0 + C(sI - A)^{-1}B = \sum F_k / s^k$$

segue la

$$F + C(sI + (pI - A))^{-1}B = F_0 + C((s+p)I - A)^{-1}B = \sum_{k=0}^q F_k / (s+p)^k$$

D'altra parte, se $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{F}_0)$ è una realizzazione per $\sum_{k=0}^q F_k / (s+p)^k$, allora $(\tilde{A} + pI, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{F}_0)$ realizza $\sum_{k=0}^q F_k / s^k$, cosicchè $(A - pI, B, C, F_0)$ è una realizzazione minima per $\sum_{k=0}^q F_k / (s+p)^k$. ■

Un analogo risultato vale per la parte principale $W(s, \infty)$:

Prop. 2. Se p è un punto al finito del piano di Gauss ed $F_0, F_1, \dots$ sono matrici costanti di dimensione $p \times m$, allora:

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q F_k (s+p)^k \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_q \\ F_2 & F_3 & F_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_q & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

prova. La prova è ovvia per $p = 0$. Per completarla basta allora dimostrare che per ogni $p \in \mathbb{C}$ risulta

$$\delta \left[\sum_{k=1}^q F_k s^k \right] = \delta \left[\sum_{k=1}^q F_k (s+p)^k \right]$$

Se $\delta \left[\sum_{k=1}^q F_k s^k \right] = n$, esistono matrici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{p \times n}$ tali da aversi

$$\sum_{k=1}^q F_k s^k = C(s^{-1}I - A)^{-1}B = \sum_{k=1}^q C A^{k-1} B s^k$$

e per l'esercizio 5 di par. 4 è anche

$$A^q = 0 \quad (6.3)$$

Posto

$$\sum_{k=1}^q F_k (s+p)^k = \sum_{k=0}^q \tilde{F}_k s^k \quad (6.4)$$

le matrici $\tilde{F}_k$ si ottengono applicando la formula del binomio di Newton. Tenendo conto di (6.3) si hanno le relazioni:

$$\tilde{F}_0 = \sum_{k=0}^{q-1} C A^k B p^{k+1}$$

$$\tilde{F}_1 = \sum_{k=0}^{q-1} C A^k B p^k$$

$$\tilde{F}_2 = \sum_{k=0}^{q-1} C A^{k+2} B p^k$$

.....

$$\tilde{F}_q = \sum_{k=0}^{q-1} C A^{k+q} B p^k$$

Le matrici $\tilde{A} = A$, $\tilde{B} = B$, $\tilde{C} = C$ soddisfano la relazione

$$\sum_{k=1}^q \tilde{F}_k s^k = \tilde{C}(s^{-1}I - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$$

Infatti è chiaro che

$$\tilde{F}_1 = \tilde{C} \tilde{B}$$

e d'altra parte, assunta l'ipotesi induttiva

$$\tilde{F}_r = \tilde{C} \tilde{A}^{r-1} \tilde{B} = \sum_{k=0}^{q-1} C A^{k+r-1} B p^k$$

per (6.3) abbiamo

$$\tilde{C} \tilde{A}^r \tilde{B} = \sum_{k=0}^{q-1} C A^{k+r} B p^{k+h} =$$

$$= \sum_{m=0}^{q-1} C \left\{ \binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \dots + \binom{r+m}{m} \right\} A^{m+r} B p^r =$$

$$= \sum_{m=0}^{q-1} C A^{m+r+1} B p^m = \tilde{F}_{r+1}$$

[N.B.: $\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \dots + \binom{r+m}{m} = \binom{r+m+1}{m}$]. Si tratta di un esercizio di analisi combinatoria che si può risolvere per induzione usando la formula $\binom{x}{a} + \binom{x}{a+1} = \binom{x+1}{a+1}$. Quindi

$$\sum_{k=1}^q F_k(s+p)^k = \bar{F} + \sum_{k=1}^q \bar{C} A^{-k-1} \bar{B} s^k$$

implica

$$\delta \left[\sum_{k=1}^q F_k / (s+p)^k \right] \leq \delta \left[\sum_{k=1}^q F_k s^k \right] \quad (6.5)$$

Sostituendo s con $s-p$ in (6.4) si ha

$$\sum_{k=1}^q F_k s^k = \sum_{k=0}^q \bar{F}_k (s-p)^k$$

ed applicando (6.5)

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q \bar{F}_k (s-p)^k \right] \leq \delta \left[\sum_{k=1}^q \bar{F}_k s^k \right]$$

Si ottiene così la seguente catena

$$\delta \left[\sum_{k=1}^q F_k s^k \right] = \delta \left[\sum_{k=0}^q \bar{F}_k (s-p)^k \right] \leq \delta \left[\sum_{k=0}^q \bar{F}_k s^k \right] = \delta \left[\sum_{k=1}^q \bar{F}_k (s+p)^k \right]$$

che inverte il senso di (6.5).

Una applicazione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è detta bilineare se

$$f: s \mapsto \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta} \quad (6.6)$$

Quando $\det \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \neq 0$, la (6.6) stabilisce una biiezione fra i due piani complessi completati con il punto all'infinito (si verifichi questa asserzione) ed f si dice non singolare.

E' chiaro che una applicazione bilineare non singolare trasforma parti principali in parti principali.

Vogliamo qui provare che due parti principali legate fra loro da una applicazione bilineare hanno lo stesso grado di McMillan.

Lemma 1. Sia p un punto al finito del piano di Gauss ed $F_0, F_1, \dots, F_q$ siano matrici costanti di dimensioni $p \times m$.

Allora

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q F_k (s^{-1}+p)^k \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_q \\ F_2 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

prova. Basta osservare che, per definizione di grado di McMillan della parte principale all'infinito,

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q F_k (s+p)^k \right] = \delta \left[\sum_{k=0}^q F_k (s^{-1}+p)^k \right]$$

Applicando prop. 2 si ottiene subito il lemma. ■

Prop. 3 Sef: $s \mapsto \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta}$ è una applicazione bilineare non singolare, $W(s, p)$ ha lo stesso grado di McMillan di $W(f(s), p)$.

prova. Supponiamo che il polo p sia al finito. Abbiamo allora

$$W(s, p) = \sum_{k=0}^q F_k (s-p)^{-k}$$

$$W(f(s), p) = \sum_{k=0}^q F_k \left(\frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta} - p \right)^{-k} = \sum_{k=0}^q F_k \frac{(\gamma s + \delta)^k}{(\alpha - p\gamma + (\beta - p\delta))^k}$$

Osserviamo che $s(\alpha - p\gamma) + (\beta - p\delta)$ non è il polinomio nullo, perchè dovrebbe essere simultaneamente

$$\alpha = p\gamma, \quad \beta = p\delta$$

ed avremmo

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} p\gamma & p\delta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} < 2$$

Se è $\alpha - p\gamma = 0$, si verifica facilmente che

$$\delta \left[\sum_{k=0}^q F_k \frac{(\gamma s + \delta)^k}{(\beta - p\delta)^k} \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_q \\ F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_q & \dots & 0 \end{bmatrix} = \delta W(s, p)$$

Se $\alpha - p\gamma \neq 0$, si può porre $(\gamma s + \delta) / [s(\alpha - p\gamma) + (\beta - p\delta)]$ nella forma $\lambda(u + \frac{1}{s+v})$ con $\lambda, \mu, v \in \mathbb{C}$, ottenendo

$$W(f(s), p) = \sum_{k=0}^q F_k \lambda^k \left(u + \frac{1}{s+v}\right)^k = \sum_{k=0}^q \bar{F}_k \left(u + \frac{1}{s+v}\right)^k$$

con

$$\bar{F}_k = \lambda^k F_k, \quad \lambda \neq 0$$

Se $C(sI - A)^{-1}B + D_0$ è realizzazione minima per $W(f(s), p)$ allora $C(zI - (A + vB))^{-1}B + D_0$ è realizzazione minima per $\sum_{k=0}^q \bar{F}_k (u + z^{-1})^k$.

Quindi, usando il lemma 1,

$$\delta[W(f(s), p)] = \delta \left[\sum_{k=0}^q \bar{F}_k (u + z^{-1})^k \right] = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & \dots & \bar{F}_q \\ \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & \dots & \bar{F}_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{F}_q & \bar{F}_q & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

e poichè

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{F}_1 & \bar{F}_2 & \dots & \bar{F}_q \\ \bar{F}_2 & \bar{F}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{F}_q & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \dots & F_q \\ F_2 & F_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_q & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \delta[W(s, p)]$$

si conclude

$$\delta[W(f(s), p)] = \delta[W(s, p)]$$

Si lascia come esercizio la prova del teorema quando $p = \infty$. ■

Vogliamo ora generalizzare la definizione di grado di Mc Millan ad arbitrarie matrici ad elementi in $\mathbb{C}(s)$. (in particolare in $\mathbb{R}(s)$).

Def.2 Sia $W(s) = W^R(s) + W(s, \infty)$ una matrice $p \times m$ ad elementi in $\mathbb{C}(s)$.

Il grado di Mc Millan di $W^R(s)$ si definisce come dimensione minima di una realizzazione per $W^R(s)$, e si indica con $\delta[W^R(s)]$.

Il grado di Mc Millan di $W(s)$ è, per definizione,

$$\delta[W(s)] = \delta[W^R(s)] + \delta[W, \infty]$$

Esercizio 4. Siano M ed N matrici costanti, di dimensioni $p \times p$ ed $m \times m$ rispettivamente. Allora risulta

$$\delta[MW(s)N] \leq \delta[W(s)]$$

Ci proponiamo ora di studiare come il grado di Mc Millan della somma di due (o più) funzioni di trasferimento dipenda dal grado di Mc Millan dei singoli addendi della somma.

Lemma 2 Siano $W_1(s)$ e $W_2(s)$ matrici $p \times m$ razionali regolari all'infinito e siano $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, D_{01})$, $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2, D_{02})$ realizzazioni rispettivamente per $W_1(s)$ e per $W_2(s)$. Allora

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, D_{01} + D_{02} \quad (6.6.2)$$

è una realizzazione per $W_1(s) + W_2(s)$

prova. Si verifichi che $D_{01} + D_{02} + \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ è proprio $W_1(s) + W_2(s)$. La (6.6.2) è chiamata la "realizzazione somma" di Σ_1 e Σ_2 . ■

Prop.4 Siano $W_1(s)$ e $W_2(s)$ matrici razionali di eguali dimensioni. Allora

$$|\delta[W_1] - \delta[W_2]| \leq \delta[W_1 + W_2] < \delta[W_1] + \delta[W_2] \quad (6.7)$$

prova. Ricordando che il rango della somma di due matrici non supera la somma dei ranghi, è una conseguenza immediata della prop.2 che

$$\delta[W_1 + W_2, \infty] \leq \delta[W_1, \infty] + \delta[W_2, \infty]$$

Applicando poi il lemma 2, si ha

$$\delta[(W_1 + W_2)^R] \leq \delta[W_1^R] + \delta[W_2^R]$$

e quindi $\delta[W_1 + W_2] \leq \delta[W_1] + \delta[W_2]$.

Per provare la prima delle disuguaglianze (6.7), si supponga, per fissare le idee, che sia $\delta[W_1] \geq \delta[W_2]$, e che si abbia, per assurdo

$$\delta[W_1 + W_2] < \delta[W_1] - \delta[W_2]$$

Allora, tenuto conto della seconda delle (6.7), risulta

$$\begin{aligned}\delta[W_1] &= \delta[(W_1 + W_2) - W_2] \leq \delta[W_1 + W_2] + \delta[-W_2] = \\ &= \delta[W_1 + W_2] + \delta[W_2] < \delta[W_1]\end{aligned}$$

chè è manifestamente contraddittoria. ■

Il teorema seguente è di fondamentale importanza, perchè consente di esprimere il grado di $W(s)$ come somma dei gradi delle parti principali componenti.

Teor.5 Siano $W_1(s)$ e $W_2(s)$ matrici di eguali dimensioni, ad elementi in $\mathcal{O}(s)$, e siano disgiunti i rispettivi insiemi dei poli. Allora risulta

$$\delta[W_1 + W_2] = \delta[W_1] + \delta[W_2] \quad (6.8)$$

prova. Sarà sufficiente provare il teorema nel caso in cui $W_1(s) = W_2(s)$ siano entrambe regolari all'infinito. Infatti, se p.es. la matrice $W_1(s)$ ha un polo all'infinito, non può avere un polo all'infinito $W_2(s)$ e perciò

$$\begin{aligned}\delta[W_1 + W_2] &= \delta[W_1^R + W_2 + W_1(s, \infty)] = \\ &= \delta[W_1^R + W_2] + \delta[W_1, \infty]\end{aligned}$$

e la prova si riconduce a dimostrare che $\delta[W_1^R + W_2]$ è eguale a $\delta[W_1^R] + \delta[W_2]$.

Siano $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, D_{01})$ e $\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2, D_{02})$ realizzazioni minime per $W_1(s)$ e per $W_2(s)$ rispettivamente: avremo allora $\dim \Sigma_1 = \delta[W_1]$ e $\dim \Sigma_2 = \delta[W_2]$.

Vogliamo provare che la realizzazione di $W_1(s) + W_2(s)$ data nel lemma 1 è completamente controllabile ed osservabile nell'ipotesi che $W_1(s)$ e $W_2(s)$ abbiano poli disgiunti.

Se la coppia $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, non fosse completamente controllabile, esisterebbe un vettore non nullo $x \in \mathcal{O}[\delta[W_1] + \delta[W_2]]$ tale da avere

$$x^T \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^k B_1 & \dots \\ B_2 & A_2 B_2 & \dots & A_2^k B_2 & \dots \end{bmatrix} = 0$$

Partizionando x conformemente ad A_1 ed A_2 , si ha

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$x_1^T B_1 + x_2^T B_2 = 0$, $x_1^T A_1 B_1 + x_2^T A_2 B_2 = 0, \dots, x_1^T A_1^k B_1 + x_2^T A_2^k B_2 = 0, \dots$ e quindi

$$x_1^T (sI - A_1)^{-1} B_1 = -x_2^T (sI - A_2)^{-1} B_2 \quad (6.9)$$

Se esiste qualche valore dell'indice k per cui risulti

$$x_1^T A_1^k B_1 \neq 0, \quad x_2^T A_2^k B_2 \neq 0 \quad (6.10)$$

allora $x_1^T (sI - A_1)^{-1} B_1 = -x_2^T (sI - A_2)^{-1} B_2$ ha uno sviluppo non nullo nell'intorno del punto all'infinito. Quindi essa ha almeno un polo, che è necessariamente un autovettore sia di A_1 che di A_2 (si veda la prova del teor. 4.2). Ne segue che A_1 ed A_2 non hanno spettri disgiunti, e pertanto $W_1(s)$ e $W_2(s)$ non possono avere disgiunti gli insiemi dei poli. Ciò contraddice l'ipotesi e quindi (6.10) non può essere verificata per alcun valore di k . Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}x_1^T \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^k B_1 & \dots \end{bmatrix}^{-1} B_1 &= 0 \\ x_2^T \begin{bmatrix} B_2 & A_2 B_2 & \dots & A_2^k B_2 & \dots \end{bmatrix}^{-1} B_2 &= 0\end{aligned}$$

Per la controllabilità di Σ_1 e di Σ_2 deve essere $x_1 = 0, x_2 = 0$, ed in conclusione $x = 0$, che prova la controllabilità della coppia

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

E' lasciata come esercizio la dimostrazione della completa osservabilità della coppia $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$. ■

Ricordando le def. 1 e 2, il teorema testé dimostrato ha come immediato corollario la seguente

Prop. 6 Sia $W(s) = \sum_k W(s, s_k) + W(s, \infty)$ una matrice $p \times m$ ad elementi in $\mathbb{C}(s)$.

$$\text{Allora } \delta[W] = \sum_k \delta[W, s_k] + \delta[W, \infty] \quad (6.11) \quad \blacksquare$$

Si è così ridotto il problema di valutare il grado di McMillan di una matrice di funzioni razionali alla valutazione dei gradi delle sue parti principali, e si è ridotta la costruzione di una realizzazione minima alla costruzione delle realizzazioni per tali parti principali. Si vedrà nel paragrafo sulla forma canonica di Smith come costruire direttamente realizzazioni minime di tali parti principali.

La seguente prop. 7 risolve il problema di realizzare la parte principale nel caso particolare di un polo p semplice.

Prop. 7 Sia F una matrice costante di dimensioni $p \times m$, e sia $n = \text{rank } F$.

Esistono allora due matrici costanti C e B , di dimensioni $p \times m$ ed $n \times m$, tali che

$$F = CB \quad (6.12)$$

Una realizzazione minima per la matrice

$$\frac{F}{s-p} \quad (6.13)$$

è data da $(pI_n, B, C, 0)$.

prova. Poiché $\text{rank } F = n$, esistono n (e non più di n) colonne linearmente indipendenti in F . Assumiamo (tale ipotesi non è restrittiva, com'è facile provare) che siano linearmente indipendenti le prime n colonne di F ; allora la n -esima colonna ($j=1, 2, \dots, m-n$) è combinazione lineare delle prime n seconde coefficienti $a_{1,n+j}, a_{2,n+j}, \dots, a_{n,n+j}$ e risulta:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & f_{1,n+1} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} & f_{2,n+1} & \dots & f_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{p1} & \dots & f_{pn} & f_{p,n+1} & \dots & f_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & \dots & f_{1n} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & \dots & f_{2n} & \dots & f_{2n} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{p1} & \dots & f_{pn} & \dots & f_{pn} & \dots & f_{pn} \end{bmatrix} = CB \quad (6.14)$$

Dalla (6.14) si ricava subito che $(pI_n, B, C, -)$ è una realizzazione di $F/s-p$, minima per la prop. 1. ■

Quando $W(s)$ ha elementi in $\mathbb{R}(s)$, e si ricercano realizzazioni minime reali, il procedimento di passare alle parti principali ha l'inconveniente di creare realizzazioni necessariamente complesse delle parti principali relative ai poli non reali. Osserviamo peraltro che se $(A, B, C, -)$ è una realizzazione di $W(s, p)$, allora $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, -)$ è una realizzazione di $W(s, \bar{p})$.

La prova è un facile esercizio.

Come vedremo nei paragrafi seguenti, l'uso della forma canonica di Smith consente, quando non si sia interessati alla realizzazione delle singole parti principali di $W(s)$ ma soltanto alla realizzazione di $W(s)$, di ottenere tale realizzazione direttamente sul campo reale.

Concludiamo con un'ovvia generalizzazione della prop. 3.

Prop. 8 Se f è un'applicazione bilineare non singolare, $W(s) = f(f(s))$ hanno lo stesso grado di Mc Millan. ■

La prova è lasciata come esercizio.

Esercizio 5. Si provi che i gradi di Mc Millan di $W_1(s) = C(sI-A)^{-1}B$ e di $W_2(s) = C(sI-A+BKC)^{-1}B$ coincidono.

Esercizio 6. Si determini il grado di Mc Millan e si costruisca una realizzazione minima di

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+4s+4} & \frac{s}{s^2+1} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

7. Prodotto di funzioni di trasferimento

Nel paragrafo precedente si è visto come dal grado di Mc Millan di due funzioni di trasferimento si possano ottenere informazioni sul grado della funzione somma.

Qui vogliamo esaminare quali proprietà abbia il grado di Mc Millan del prodotto di due matrici.

La seguente proposizione stabilisce un risultato fondamentale, il cui contenuto intuitivo apparirà più avanti, studiando le proprietà delle reti elettriche.

Prop. 1 Siano $W_1(s)$ e $W_2(s)$ matrici di dimensioni $p \times k$ e $k \times m$ rispettivamente, ad elementi in $R(s)$.

Si ha allora

$$\delta[W_1 W_2] \leq \delta[W_1] + \delta[W_2] \quad (7.1)$$

prova. Se $W_1(s)$ e $W_2(s)$ sono entrambe regolari all'infinito, esse (A_1, B_1, C_1, D_1) , (A_2, B_2, C_2, D_2) sono rispettivamente realizzazioni minime della prima e della seconda funzione di trasferimento, è immediato che (*)

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} B_1 D_{02} \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_1 & D_{01} C_2 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = D_{01} D_{02}$$

(*) Le matrici (7.2) costituiscono la cosiddetta "realizzazione prodotta" delle realizzazioni (A_1, B_1, C_1, D_{01}) ed (A_2, B_2, C_2, D_{02}) .

realizzano (non necessariamente con dimensione minima!) la funzione di trasferimento $W_1 W_2$, e la (6.1) è provata.

Se $W_1(s)$ e/o $W_2(s)$ hanno un polo all'infinito, è sempre possibile considerare una trasformazione bilineare non singolare f che porti al finito il polo all'infinito delle funzioni considerate, lasciandoci al finito tutti gli altri poli.

Per prop. 6.8, abbiamo allora

$$\delta[W_1(s)] = \delta[W_1(f(s))] \quad i = 1, 2$$

e le funzioni razionali in s che figurano in $W_1(f(s))$ sono regolari all'infinito. Quindi

$$\delta[W_1(f(s))W_2(f(s))] \leq \delta[W_1(f(s))] + \delta[W_2(f(s))]$$

Poiché risulta $(W_1 W_2)(f(s)) = W_1(f(s))W_2(f(s))$, si conclude che (7.1) vale anche nel caso generale. ■

Esercizio 1. Si dia una prova diretta della prop. 1, costruendo una realizzazione per la parte regolare di $W_1 W_2$ ed una realizzazione per $V(z) = (W_1 W_2)(s, \infty)|_{s=z^{-1}}$

[Suggerimento. Sia $W_1(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 + \sum_{j=0}^{\nu} D_{1j}s^j$, con (A_1, B_1, C_1, D_{1j}) realizzazione minima per W_1 , $i = 1, 2$. Allora

$$A_3 = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{\nu} A_1^j B_1 D_{2j}^{(2)} \\ B_2 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} C_1 & \sum_{j=0}^{\nu} D_{1j} C_2 A_2^j \end{bmatrix},$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} D_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{\nu} D_{1j} C_2 A_2^{j-1} A_2 + \sum_{j=1}^{\nu} C_1 A_1^{j-1} B_1 D_{2j}^{(2)}$$

realizza $(W_1 W_2)^R$. Si ponga poi $\bar{W}_1(s) = W_1(s) - C_1(sI - A_1)^{-1}A_1^{\nu}B_1$, $i = 1, 2$, e si provi che $(W_1 W_2)(s, \infty) = (\bar{W}_1 \bar{W}_2)(s, \infty)$.

$V_i(z) = \bar{W}_i(s)|_{s=z^{-1}}$, $i = 1, 2$, ha singolarità polari nello zéro e all'infinito, ed è $(V_1 V_2)^R = V(z)$.

Si ripeta la costruzione precedente, dimostrando che

$$\delta[(V_1 V_2)^R] \leq \delta[V_1^R] + \delta[V_2^R]$$

La proposizione seguente ha un notevole interesse, perché contiene la giustificazione della "convergenza" per un metodo di sin-

tesi delle reti elettriche che studieremo più avanti.

Prop.2 Se la matrice $W(s) \in R(s)^{m \times m}$ è invertibile su $R(s)$, allora $\delta[W(s)] = \delta[W^{-1}(s)]$ (7.3)

prova. Supponiamo dapprima che $W(s)$ sia regolare all'infinito e che $W(\infty)$ sia una matrice invertibile. Allora è facile verificare che, se $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è una realizzazione minima per $W(s)$, $\Sigma' = (A - BD_0^{-1}C, BD_0^{-1}C, D_0^{-1}C, D_0^{-1})$ è una realizzazione per $W^{-1}(s)$. Infatti

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} D_0^{-1} - D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)^{-1}BD_0^{-1}C \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 + C(sI - A)^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= I - D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)^{-1}B + D_0^{-1}C(sI - A)^{-1}B - \\ & - D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)^{-1}BD_0^{-1}C(sI - A)^{-1}B = \\ &= I - D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)B + D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)^{-1}C \\ & \left[(sI - A + BD_0^{-1}C) - BD_0^{-1}C \right] (sI - A)^{-1}B = I \end{aligned}$$

e quindi $D_0^{-1} - D_0^{-1}C(sI - A + BD_0^{-1}C)^{-1}BD_0^{-1}C = W^{-1}(s)$.

Dunque Σ' realizza $W^{-1}(s)$ nella medesima dimensione in cui realizza $W(s)$. E' ovvio che Σ' è realizzazione minima, altrimenti esisterebbe una realizzazione Σ'' per $W^{-1}(s)$, con

$$\dim \Sigma'' < \dim \Sigma' = \dim \Sigma$$

ed utilizzando lo stesso procedimento con cui abbiamo ricavato Σ' da Σ , potremmo costruire una realizzazione Σ''' per $(W^{-1}(s))^{-1} = W(s)$ ed avere

$$\dim \Sigma''' = \dim \Sigma'' < \dim \Sigma$$

Ciò contrasterebbe con la minimalità di Σ .

Per passare al caso generale, osserviamo anzitutto che $W(s)$,

(°) $W(s)$ è invertibile (su $R(s)$) se e solo se $\det(W(s))$ non è la funzione razionale identicamente nulla.

considerata come funzione di $s \in \mathbb{C}$, è invertibile quasi ovunque sul piano complesso (eccezion fatta per i punti, in numero finito, dove $\det(W(s))$ ha poli o zeri). E' sempre possibile considerare una trasformazione bilineare non singolare f che porti nel punto all'infinito un punto del piano complesso dove $W(s)$ non ha poli e dove $\det(W(s)) \neq 0$.

Ma allora si ha

$$\delta[W(s)] = \delta[W(f(s))] = \delta[W^{-1}(f(s))] = \delta[W^{-1}(s)]$$

E' facile, a questo punto, dimostrare la

Prop.3 Se $W_1(s)$ è (quadrata e) invertibile su $R(s)$, allora nelle stesse ipotesi di prop.1

$$\delta[W_1 W_2] \geq \delta[W_2] - \delta[W_1] \quad (7.4)$$

Si osservi che l'invertibilità (o, eventualmente, qualche altra ipotesi alternativa) è essenziale alla validità di (7.4). E' ovvio, p. es., che (7.4) non vale se $W_1(s) = 0$.

8. Forma canonica di Smith

La teoria della forma canonica di Smith ci fornisce una trattazione più "algebrizzata" del grado di una matrice $W(s)$. Ritroveremo vari risultati dei paragrafi precedenti in un contesto più vasto: in particolare è arbitrario il corpo F su cui sono validi i risultati ottenuti.

Indichiamo con $F[s]$ l'anello dei polinomi nell'indeterminata s sul corpo (generico) F , e con $F[s]^{p \times m}$ l'insieme delle matrici di dimensioni $p \times m$, ad elementi in $F[s]$. Al solito, poi, $F(s)$ indica il corpo delle funzioni razionali su F , ed $F(s)^{p \times m}$ l'insieme delle matrici di dimensioni $p \times m$, ad elementi in $F(s)$.

Nella teoria che esporremo giocano un ruolo fondamentale le matrici elementari, che costituiscono una sottofamiglia delle matrici quadrate polinomiali.

Def.1 Le matrici elementari di dimensione p sono gli elementi di

$\mathbb{F}[s]^{p \times p}$ del tipo (*)

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & h & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad h \in \mathbb{F}, \quad h \neq 0$$

$$(i) (j) \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & p(s) & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad p(s) \in \mathbb{F}[s], \quad i \neq j \quad (8.1)$$

$$(i) (j) \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad i \neq j$$

Si noti che ogni matrice elementare ha per determinante un polinomio non nullo di grado zero (o, come si suol dire, ha determinante costante).

Ogni matrice elementare $E \in \mathbb{F}[s]^{p \times p}$ si può pensare come operatore lineare "a sinistra" sullo spazio $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$:

$$E: \mathbb{F}[s]^{p \times m} \rightarrow \mathbb{F}[s]^{p \times m}$$

(8.2)

$$E: W \mapsto EW$$

A seconda che E sia del primo, del secondo o del terzo tipo indicato in (8.1), la matrice EW si ottiene da W

- (a) moltiplicando la i -esima riga di W per la costante h
- (b) sommando alla i -esima riga di W la j -esima moltiplicata per il polinomio $p(s)$
- (c) scambiando la i -esima e la j -esima riga di W .

(*) Gli elementi non indicati sono 1 se si trovano sulla diagonale principale e 0 altrimenti.

Analogamente le matrici elementari di $\mathbb{F}[s]^{m \times m}$ si possono pensare come operatori lineari "a destra" sullo spazio $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$. Se $E \in \mathbb{F}[s]^{m \times m}$ è elementare, si ha

$$E: \mathbb{F}[s]^{p \times p} \rightarrow \mathbb{F}[s]^{p \times p} \quad (8.3)$$

$$E: W \mapsto WE$$

e nelle proposizioni (a) (b) (c) si sostituiranno rispettivamente "riga" con "colonna".

Def.2 Siano $W \in V$ matrici in $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$; V si dice "equivalente a sinistra", "equivalente a destra", "equivalente" a W se può ottenersi da W rispettivamente applicando a sinistra, a destra, a destra e a sinistra di W , una o più matrici elementari, ossia se, per opportune matrici elementari E_i, E_j :

$$V = E_t E_{t-1} \dots E_1 W$$

$$V = W E_1' E_2' \dots E_t', \quad (8.4)$$

$$V = E_t E_{t-1} \dots E_1 W E_1' E_2' \dots E_t',$$

Esercizio 1. Si verifichi che le relazioni "equivalente a sinistra", "equivalente a destra", "equivalente" sono relazioni di equivalenza su $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$.

Esercizio 2. Il prodotto di più matrici elementari è una matrice con determinante in $\mathbb{F}$, non nullo.

Ricordiamo che, dati un insieme $\mathcal{S}$ ed una relazione di equivalenza R su $\mathcal{S}$, un sottoinsieme $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ si dice un insieme di forme canoniche per R se ogni classe di equivalenza contiene uno ed uno solo elemento di $\mathcal{S}'$ (ossia se ogni classe di equivalenza contiene con uno, ed uno solo, rappresentante alla costituzione di $\mathcal{S}'$).

Le relazioni "equivalente a sinistra", "equivalente a destra", "equivalente" che abbiamo indotte su $\mathbb{F}[s]^{p \times p}$ sono relazioni di equivalenza, e come tali ammettono insiemi di forme canoniche. Noi siamo particolarmente interessati alla generazione di un insieme di forme canoniche per la terza relazione, e la prima parte del paragrafo è dedicata a siffatta costruzione.

Esercizio 3. Da ogni insieme di forme canoniche per la relazione "equivalente a sinistra" si può estrarre un insieme di forme canoniche per la relazione "equivalente".

Lemma 1. Sia $W(s) \in F[s]^{p \times m}$, $W(s) \neq 0$. Esiste un insieme di operazioni elementari a sinistra e a destra che trasforma $W(s)$ in una matrice $W'(s)$ del tipo

$$W'(s) = \begin{bmatrix} w'_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & * \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

in cui è $w'_{11}(s) \neq 0$, $\deg w'_{11}(s) \leq \deg w_{11}(s)$.

prova. Fra gli elementi di $W(s)$ non identicamente nulli (*) ne scegliamo uno di grado minimo in s e con permutazioni di righe e di colonne (cioè con operazioni elementari a sinistra e a destra) lo portiamo nel posto di indice (1,1), così da avere

$$w_{11} \neq 0 \\ \deg w_{11} \leq \deg w_{ij} \quad \forall i, j$$

Applicando l'usuale algoritmo di divisione, troviamo

$$w_{i1}(s) = w_{11}(s)q_{i1}(s) + r_{i1}(s) \quad i = 2, \dots, p \\ w_{1j}(s) = w_{11}(s)q_{1j}(s) + r_{1j}(s) \quad j = 2, \dots, m$$

ed è

$$\deg r_{i1} < \deg w_{11} \quad i = 2, \dots, p \\ \deg r_{1j} < \deg w_{11} \quad j = 2, \dots, m$$

Aggiungendo alla riga i -esima (alla colonna j -esima) la prima riga (colonna) moltiplicata per $-q_{i1}$ ($-q_{1j}$), la matrice $W(s)$ si trasforma nella seguente

(*) Si assume per convenzione $\deg 0 = +\infty$

$$W'(s) = \begin{bmatrix} w'_{11}(s) & r'_{12}(s) & \dots & r'_{1m}(s) \\ r'_{21}(s) & w'_{22}(s) & \dots & w'_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r'_{p1}(s) & w'_{p2}(s) & \dots & w'_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Se non tutti i resti sono nulli, possiamo sceglierne uno non nullo di grado minimo e portarlo al posto di w'_{11} con una permutazione delle righe o delle colonne di $W'(s)$, ed applicare l'algoritmo di divisione.

Poichè ad ogni ciclo il grado di w'_{11} si abbassa, si perviene alla conclusione. ■

Lemma 2 Sia $W'(s) \in F[s]^{p \times m}$ come nel Lemma 1. Esiste un insieme di operazioni elementari a sinistra e a destra che trasforma $W'(s)$ in una matrice $W''(s)$ del tipo:

$$W''(s) = \begin{bmatrix} w''_{11}(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & w''_{11}(s) \cdot H(s) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

con $H(s) \in F[s]^{(p-1) \times (m-1)}$.

prova. Se nella matrice $W'(s)$ la sottomatrice $\|w'_{ij}\|_{\substack{i=2,3,\dots,p \\ j=2,3,\dots,m}}$ ha o-

gni elemento multiplo di $w'_{11}(s)$, non c'è nulla da provare. Se almeno uno dei suoi elementi non è divisibile per $w'_{11}(s)$, aggiungiamo alla prima colonna di $W'(s)$ la colonna che contiene tale elemento, ottenendo la matrice

$$\begin{bmatrix} w'_{11}(s) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ w'_{11}(s)q(s) + r(s) & & * & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}, \quad \deg r(s) < \deg w'_{11}$$

e, con due ovvie operazioni elementari, si passa alla matrice seguente:

$$\begin{bmatrix} r(s) & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ w'_{11}(s) & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Applicando il lemma 1, si perviene da (8.10) ad una matrice del tipo (8.5), ma in cui il grado del termine di posto (1,1) si è ridotto rispetto a $\deg w'_{11}(s)$.

A questo punto, se la nuova matrice non possiede struttura (8.9), si reinnesca il ciclo descritto, e poichè il procedimento di riduzione del grado non può continuare indefinitamente, con un numero finito di operazioni si perviene a (8.9): infatti almeno quando $w'_{11}(s)$ è una costante non nulla la struttura (8.9) è verificata. ■

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teor. 1 Ogni matrice polinomiale $W(s) \in F[s]^{p \times m}$ può essere trasformata con operazioni elementari a destra e a sinistra in una del tipo

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_t(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

dove: (i) i polinomi $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ non sono identicamente nulli e sono monici, (ii) γ_i divide γ_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, t-1$ (*)

prova. Se $W(s) = 0$, non c'è nulla da provare; se $W(s) \neq 0$, per il lemma 1 ed il lemma 2 è possibile trasformarla in una matrice

$$\Gamma'(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \gamma_1(s)H'(s) \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

(*) Matrici cosiffatte saranno anche indicate con $\text{diag}\{\gamma_1(s), \dots, \gamma_t(s)\}$: $p \times m$

e non è restrittivo supporre monico $\gamma_1(s)$, perchè con una matrice elementare del tipo (8.1.1) è sempre possibile renderlo tale senza alterare la struttura (8.12).

Se $H'(s) \neq 0$, il procedimento descritto nei lemmi 1 e 2 può essere applicato alle righe di indici $2, 3, \dots, p$ ed alle colonne di indici $2, 3, \dots, m$, pervenendo ad una matrice

$$\Gamma''(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & & & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_2(s)H''(s) \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Ovviamente $\gamma_2(s)$ è multiplo di $\gamma_1(s)$, perchè le operazioni elementari sono state effettuate su $\gamma_1(s)H'(s)$ in cui ogni elemento è multiplo di $\gamma_1(s)$, e può essere supposto monico.

Il processo può essere continuato fino all'ottenimento di $\Gamma(s)$. ■

Abbiamo osservato che ogni matrice elementare ha determinante costante e non nullo. E' ovvio che la stessa proprietà vale per un prodotto di matrici elementari in numero arbitrario.

Il teor. 1 consente di invertire questo risultato.

Teor. 2 Ogni matrice quadrata $W(s) \in F[s]^{m \times m}$ con determinante unpolinomio non nullo di grado 0 è un prodotto di opportune matrici elementari.

prova. Esistono pel teorema 1, matrici elementari E_i, E'_j tali da $W(s)$ versi

$$W(s) = E_t E_{t-1} \dots E_1 \Gamma(s) E'_1 \dots E'_t, \quad (8.14)$$

con $\Gamma(s)$ della forma (8.11). Ricordando che il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti,

$$\det W(s) / \det E_t \det E_{t-1} \dots \det E_1 \det E'_1 \dots \det E'_t = \det \Gamma(s)$$

Perciò $\det \Gamma(s)$ è una costante non nulla, e data la struttura diagonale di $\Gamma(s)$ ciò è ammissibile se e solo se tutti i suoi elementi diagonali sono costanti non nulli.

Allora $\Gamma(s)$ è un prodotto di matrici elementari del tipo (8.11), e si ha la conclusione ■

Per provare che le matrici (8.11) costituiscono un insieme di forme canoniche per la relazione di equivalenza indotta su $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$ dalle operazioni elementari basta far vedere che due distinte matrici del tipo (8.11) non sono mai equivalenti.

Siano infatti $\Gamma(s)$ e $\bar{\Gamma}(s)$ nella forma (8.11):

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

$$\bar{\Gamma}(s) = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\gamma}_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\Gamma(s)$ e $\bar{\Gamma}(s)$ sono equivalenti, non può essere $t \neq \bar{t}$. Supponiamo, infatti che si abbia, p. es., $t > \bar{t}$. Esistono allora matrici polinomiali con determinante costante e non nullo $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ per cui è $\bar{\Gamma}(s) = \mathcal{E}\Gamma(s)\mathcal{F}$.

Partizionando, si ha

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_t(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\gamma}_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_t(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\gamma}_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = E_{11} \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_t(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} F_{11} \quad (8.17)$$

Ma il determinante del primo membro in (8.17) è non nullo, mentre è nullo quello del secondo: ciò è assurdo. Pertanto $t = \bar{t}$, e

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\gamma}_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{H} \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_t(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \mathcal{L} \quad (8.18)$$

con $\mathcal{H}$ ed $\mathcal{L}$ matrici polinomiali.

Sia k compreso fra 1 e t ; partizionando le matrici di (8.18) nella forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & \dots & \bar{\gamma}_k(s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{\gamma}_k(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{\gamma}_t(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \gamma_k(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \gamma_t(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

e indicando con $h_1, h_2, \dots, h_t$ le colonne di H_1 , otteniamo

$$\begin{bmatrix} \bar{\gamma}_1(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\gamma}_{k-1}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{\gamma}_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 h_1 & \gamma_2 h_2 & \dots & \gamma_k h_k & \dots & \gamma_t h_t \\ \gamma_1 h_1 & \gamma_2 h_2 & \dots & \gamma_k h_k & \dots & \gamma_t h_t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_1 h_1 & \gamma_2 h_2 & \dots & \gamma_k h_k & \dots & \gamma_t h_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_t \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

Ponendo $k=1$ in (8.19) si ha evidentemente che $\bar{\gamma}_1$ è multiplo di γ_1 , e scambiando i ruoli di $\Gamma(s)$ e di $\bar{\Gamma}(s)$, si ha che γ_1 è multiplo di $\bar{\gamma}_1$: imponendo a $\gamma_1(s)$ e $\bar{\gamma}_1(s)$ di essere monici, si ricava:

$$\gamma_1(s) = \bar{\gamma}_1(s) \lambda \quad (8.20)$$

Assumiamo induttivamente $\gamma_i(s) = \bar{\gamma}_i(s)$ $i = 1, 2, \dots, k-1$, ed applichiamo a (8.19) il teorema di Binet per il calcolo del determinante di un prodotto:

$$\bar{\gamma}_1(s) \cdot \bar{\gamma}_2(s) \cdot \dots \cdot \bar{\gamma}_k(s) = \sum_i (\det \bar{\gamma}_i) (\det \lambda_i) \quad (8.21)$$

dove μ_i descrive tutte le sottomatrici d'ordine k di $H_1 \Gamma(s)$ e λ_i le corrispondenti sottomatrici d'ordine k di L_1 .

Ricordando che γ_1 divide γ_2 , γ_2 divide γ_3 etc..., si vede subito che ogni $\det \mu_i$ è multiplo di $\gamma_1(s) \cdot \gamma_2(s) \cdot \dots \cdot \gamma_k(s)$: quindi per l'ipotesi induttiva è multiplo di $\tilde{\gamma}_1(s) \cdot \tilde{\gamma}_2(s) \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_{k-1}(s) \cdot \gamma_k(s)$ e la (8.21) implica che $\tilde{\gamma}_k(s)$ sia multiplo di $\gamma_k(s)$. Scambiando i ruoli di $\Gamma(s)$ e di $\tilde{\Gamma}(s)$ ed imponendo a $\gamma_k(s)$ e $\tilde{\gamma}_k(s)$ di essere monici, si ha

$$\gamma_k(s) = \tilde{\gamma}_k(s) \quad (8.22)$$

In conclusione $\Gamma(s) = \tilde{\Gamma}(s)$, e vale il seguente

Teor. 3 Le matrici (8.11) costituiscono un insieme di forme canoniche che sull'insieme $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$ rispetto alla relazione di equivalenza indotta dalle operazioni elementari a destra e sinistra.

Esercizio 3. Si provi che in (8.18) $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{L}$ hanno determinante costante e non nullo, e quindi sono prodotti di matrici elementari.

Esercizio 4. Una matrice polinomiale $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{p \times m}$ può sempre essere trasformata con operazioni elementari a sinistra in una delle forme seguenti

$$\begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \dots & w_{1p}(s) & \dots & w_{1m}(s) \\ 0 & w_{22}(s) & \dots & w_{2p}(s) & \dots & w_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{pp}(s) & \dots & w_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad p \leq m \quad (8.23.1)$$

$$\begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \dots & w_{1p}(s) \\ 0 & w_{22}(s) & \dots & w_{2p}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{pp}(s) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad p \geq m \quad (8.23.2)$$

in cui i polinomi $w_{1k}(s) w_{2k}(s) \dots w_{k-1,k}(s)$ sono di grado inferiore a quello di $w_{kk}(s)$ se $w_{kk}(s) \neq 0$, e sono tutti identicamente nulli se $w_{kk}(s) = 0$ ($k = 2, 3, \dots, \min(m, p)$).

Le matrici (8.23.1) e (8.23.2) sono un insieme di forme canoniche per la relazione "equivalente a sinistra".

Dati un insieme $\mathcal{S}$, un insieme $\mathcal{M}$ ed una relazione d'equivalenza R su $\mathcal{S}$, una funzione

$$f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M}$$

è detta un invariante (di R) quando $xRy \Rightarrow f(x) = f(y)$ per ogni x, y in $\mathcal{S}$. In altre parole f è un invariante se e solo se è costante su ciascuna classe di equivalenza di R .

Una famiglia di funzioni

$$f_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

è detto un sistema completo di invarianti (per R) quando ogni f_i è un invariante ed $f_i(x) = f_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, N$ implica xRy .

In particolare la funzione f è un invariante completo quando $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

E' ovvio che l'assegnazione di R può essere fatta mediante un qualsiasi sistema completo di invarianti per R , poichè le classi di equivalenza di R si ottengono come i sottoinsiemi di $\mathcal{S}$ su cui sono contemporaneamente costanti $f_1, f_2, \dots, f_N$.

E' ovvio da quanto fino ad ora esposto che data $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{p \times m}$, i polinomi $\gamma_1(s), \dots, \gamma_t(s)$ di (8.11) caratterizzano completamente la classe di equivalenza cui $W(s)$ appartiene. Pertanto è evidente il

Coroll. 1 Sullo spazio $\mathbb{F}[s]^{p \times m}$ si considerino le funzioni $f_1, f_2, \dots, f_v$, $v = \min(m, p)$, $f_i: \mathbb{F}[s]^{p \times m} \rightarrow \mathbb{F}[s]$ $f_i: W(s) \mapsto \gamma_i(s)$ (se $i > t$, $\gamma_i(s) = 0$).

Allora $f_1, f_2, \dots, f_v$ sono un sistema completo di invarianti per l'equivalenza indotta dalle operazioni elementari.

I polinomi $\gamma_1(s), \dots, \gamma_t(s)$ sono chiamati i polinomi invarianti della matrice $W(s)$.

Se consideriamo una matrice nella forma (8.11), si vede che $\gamma_1(s)$ è il M.C.D. dei minori di ordine 1, $\gamma_1(s) \gamma_2(s)$ è il

M.C.D. dei minori di ordine $2, \dots, \gamma_1(s) \gamma_2(s) \dots \gamma_t(s)$ è il M.C.D. dei minori d'ordine t , mentre ogni minore d'ordine più grande di t è nulla.

Questa proprietà non è valida soltanto per la matrice $\Gamma(s)$, ma per ogni matrice $W(s)$ ad essa equivalente, com'è precisato nel seguente

Teor. 4 Sia $W(s) \in \mathbb{F}[s]^{p \times m}$, e sia $r(s)$ la forma canonica ad essa equi-

valente:

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1(s) & 0 & \dots & \dots & \dots & \gamma_1(s) \\ 0 & \gamma_2(s) & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_L(s) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Allora $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_t(s), 0, \dots, 0$ sono i
M.C.D. dei minori di $W(s)$ d'ordine $1, 2, \dots, t, \dots, \min(m, p)$.

prova. Si lascia come esercizio (applicazione del teorema di Binet) provare che nel prodotto di due matrici polinomiali,

$$P(s) = F_1(s) F_2(s)$$

il M.C.D. di tutti i minori d'ordine k di uno dei fattori è un divisore (non necessariamente il M.C.D.) di tutti i minori d'ordine k del prodotto $P(s)$.

E' ovvio che questa proprietà si estenda al prodotto di un numero qualsivoglia di matrici polinomiali. In particolare, dalla

$$W(s) = \mathcal{L} \Gamma(s) \mathcal{F}$$

si trae che i minori d'ordine k di $W(s)$ hanno M.C.D. multiplo di $\gamma_1(s) \cdot \gamma_2(s) \dots \gamma_k(s)$, e dalla

$$\Gamma(s) = \mathcal{E} \cdot W(s) \mathcal{E}^T$$

si ha che $\gamma_1(s) \gamma_2(s) \dots \gamma_k(s)$ (in quanto M.C.D. dei minori d'ordine k di $W(s)$). La conclusione è immediata. ■

E' noto che, dato un polinomio $p(s) \in \mathbb{F}[s]$, esiste una ed una sola (a meno di fattori in $\mathbb{F}$) decomposizione di $p(s)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{F}$.

Decomponiamo allora i polinomi invarianti $\gamma_1(s), \dots, \gamma_t(s)$ di $W(s)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} \gamma_1(s) &= \begin{bmatrix} \phi_1(s) & c_{11} & \phi_2(s) & c_{12} & \dots & \phi_k(s) \end{bmatrix}^{c_{1k}} \\ \gamma_2(s) &= \begin{bmatrix} \phi_1(s) & c_{21} & \phi_2(s) & c_{22} & \dots & \phi_k(s) \end{bmatrix}^{c_{2k}} \\ &\vdots \\ \gamma_t(s) &= \begin{bmatrix} \phi_1(s) & c_{t1} & \phi_t(s) & c_{tt} & \dots & \phi_k(s) \end{bmatrix}^{c_{tk}} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Poichè $\gamma_i(s)$ divide $\gamma_{i+1}(s)$, si ha

$$c_i^j < c_{i+1}^j, j = 1, 2, \dots, k \quad (8.25)$$

Def. 3 I polinomi $[\phi_j(s)]^{c_{ij}}$, con $c_{ij} \neq 0$, di (8.24) sono chiamati i divisori elementari di $W(s)$ sul corpo F ($^\circ$)

Osservazione. Il teorema 4 fornisce una delle tecniche più comunemente utilizzate per il computo dei polinomi invarianti: basta infatti procedere al calcolo dei minori di $W(s)$ d'ordine k , considerarli loro M.C.D., e fare ciò per ogni k compreso fra l e $\min(m, p)$. Dalla sequenza $D_1(s), D_2(s), \dots, D_k(s), \dots$ si ottengono

$$\begin{aligned}\gamma_1(s) &= D_1(s) \\ \gamma_2(s) &= D_2(s)/D_1(s) \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_k(s) &= D_k(s)/D_{k-1}(s) \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

(°) Si lascia come esercizio far vedere che la stessa matrice $W(s)$ considerata su un corpo F' diverso da F (su cui abbia senso considerarla) può avere divisori elementari diversi.

Quando si considera l'insieme dei divisori elementari della matrice $W(s)$, il divisore $[\phi_r(s)]^b$, $b \neq 0$, andrà contato tante volte quanti sono i valori dell'indice i per cui risulta $c_{ir} = b$. Tenuto conto di questa osservazione è un facile esercizio verificare che la conoscenza dell'insieme dei divisori elementari di $W(s)$ è sufficiente per determinare i polinomi invarianti di $W(s)$.

Il seguente esercizio ha carattere di lemma nella deduzione della forma canonica di Jordan riportata in A.3.

Esercizio 6. L'insieme dei divisori elementari della matrice $W(s) \in \mathbb{F}^{p \times m}$

$$W(s) = \begin{bmatrix} w_1(s) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & w_2(s) \end{bmatrix} \quad (8.26)$$

è l'unione degli insiemi dei divisori elementari di $w_1(s)$ e di $w_2(s)$, contando ogni div. secondo la somma delle molteplicità con cui compare nei due insiemi $\text{Sugg. } \phi_j: c_{ij}^n \text{ e } \phi_j^{c_{ij}^n}, i = 1, 2, \dots, t_1, h=1, 2, \dots, t_2, j = 1, 2, \dots, k$ siano i polinomi corrispondenti alla fattorizzazione dei polinomi invarianti di $w_1(s)$ e $w_2(s)$ (vedi (8.24)). Si ordinino in sequenza crescente i valori non nulli degli esponenti c_{ij}^n e $c_{ij}^{c_{ij}^n}$: $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_b$ e si verifichi che $W(s)$ è equivalente a $\text{diag}((*) \dots (*), \underbrace{\phi_1^{g_1} (*), \phi_2^{g_2} (*), \dots, \phi_b^{g_b} (*)}_{t_1+t_2})_{p \times m}$, con (*) polinomio generico primo con ϕ_1 . Usando la (8.24) si provi che i polinomi invarianti di $W(s)$ sono $\gamma_{t_1+t_2}(s) = \phi_1^{g_1} (*), \gamma_{t_1+t_2-1}(s) = \phi_1^{g_2} (*), \dots$ etc. Si proceda allo stesso modo per $\phi_2, \phi_3, \dots, \phi_{k-1}$.

Esercizio 7. Se in (8.26) è nota la struttura dei polinomi invarianti di $w_1(s)$ e di $w_2(s)$, che cosa si può dire dei polinomi invarianti di $W(s)$?

9. Forma canonica di Smith-Mc Millan per una matrice razionale

Vogliamo estendere la teoria esposta nel paragrafo precedenti alle matrici con elementi sul corpo delle funzioni razionali $\mathbb{F}(s)$, per ricavare una tecnica di realizzazione.

Indichiamo con $F(s)^{p \times m}$ l'insieme delle matrici di dimensioni $p \times m$ ad elementi in $\mathbb{F}(s)$.

Se $W(s) \in \mathbb{F}(s)^{p \times m}$, indichiamo con $p(s)$ un denominatore comune monico degli elementi di $W(s)$. Allora

$$V(s) = p(s)W(s) \quad (9.1)$$

è una matrice polinomiale, dotata di una (unica!) forma canonica di Smith:

$$V(s) = \mathcal{E}(s) \Gamma(s) \mathcal{F}(s) \quad (9.2)$$

con $\mathcal{E}(s)$ ed $\mathcal{F}(s)$ matrici polinomiali con determinante costante e non nullo, e

$$\Gamma(s) = \text{diag}\{\gamma_1(s), \dots, \gamma_t(s)\}_{p \times m}$$

Si definiscano i polinomi $\chi_i(s)$, $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, t$, ponendo

$$\frac{\gamma_i(s)}{p(s)} = \frac{\chi_i(s)}{\psi_i(s)} \quad (9.3)$$

con le condizioni seguenti:

- (i) $\chi_i(s)$ e $\psi_i(s)$ sono privi di fattori comuni, $i = 1, 2, \dots, t$
- (ii) $\psi_i(s)$ e $\chi_i(s)$ sono monici, $i = 1, 2, \dots, t$.

E' immediato che $\gamma_i(s)$ e $p(s)$ individuano allora univocamente $\chi_i(s)$ e $\psi_i(s)$, ed è un facile esercizio verificare inoltre che

- (i) $\chi_i(s)$ divide $\chi_{i+1}(s)$
- (ii) $\psi_{i+1}(s)$ divide $\psi_i(s)$

soddisfacenti le condizioni (9.6) costituiscono un insieme di forme canoniche per l'equivalenza indotta dalle operazioni elementari, dette f.c. di Smith Mc Millan. ■

Chiameremo i polinomi $\chi_i(s)$ e $\psi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, k$ rispettivamente i numeratori ed i denominatori invarianti della assegnata $W(s)$.

E' chiaro che quando in $W(s)$ si siano scritte tutte le funzioni razionali componenti ridotte ai minimi termini (i.e. con numeratore e denominatore privi di fattori comuni), $\psi_1(s)$ è il minimo comune denominatore di tutte tali funzioni.

Questo risultato è un caso particolare del

Teor.2 Il minimo comune denominatore dei minori d'ordine k di $W(s)$ ridotti ai minimi termini è il denominatore $\Delta(s)$ di

$$\frac{\chi_1 \chi_2 \dots \chi_k}{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_k} \quad (9.10)$$

quando siano stati cancellati tutti i fattori comuni.

prova. E' una facile applicazione del teorema di Binet provare che nel prodotto di una matrice polinomiale $P(s)$ per una matrice razionale $R(s)$

$$\Pi(s) = P(s)R(s) \quad (9.11)$$

ogni denominatore comune dei minori d'ordine k di $R(s)$ è un denominatore dei minori d'ordine k di $\Pi(s)$ quando tutti i minori siano stati ridotti ai minimi termini. Tale proprietà si estende al prodotto di un numero qualsiasi di matrici polinomiali per una matrice razionale $R(s)$.

In

$$W(s) = \mathcal{O}(s) \left[X(s) \Psi(s) \right] \mathcal{G}(s) \quad (9.12)$$

il minimo comune denominatore dei minori d'ordine k di $X(s)\Psi(s)$ è dato ovviamente da $\Delta(s)$: pertanto $\Delta(s)$ è anche un comune denominatore dei minori d'ordine k di $W(s)$ ridotti ai minimi termini.

Per opportune trasformazioni elementari, risulta

$$X(s)\Psi(s) = \hat{\mathcal{O}}(s)W(s)\hat{\mathcal{P}}(s) \quad (9.13)$$

Quindi ogni comune denominatore dei k -minori di $W(s)$ è denominatore comune dei k -minori di $X(s)\Psi(s)$ ridotti ai minimi termini: in particolare è multiplo di $\Delta(s)$. ■

Esercizio 1. Se $W(s)$ è propria, $\deg \psi_1 > \deg \chi_1$. Si verifichi sulla matrice

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

che $X(s)\Psi(s)$ può non essere propria anche se è propria $W(s)$. Ne consegue che quando $W(s)$ è propria, non è in generale vero che $\deg \psi_i > \deg \chi_i$, $i = 2, 3, \dots$.

10. Realizzazione con l'uso della f.c. di Smith Mc-Millan

Il grado di Mc Millan di una matrice razionale $W(s)$ può essere collegato alla struttura della forma canonica. Tale forma canonica consente inoltre, quando $W(s)$ è propria, di costruire direttamente una realizzazione minima. Questo paragrafo sarà dedicato allo studio di tali problemi.

Va osservato preliminarmente che il grado di Mc Millan si è definito per matrici razionali ad elementi in $\mathbb{R}(s)$ o in $\mathbb{C}(s)$, vincolando al concetto di realizzazione di $W(s)$ (esteso a coprire anche i casi in cui $W(s)$ non è regolare all'infinito). Le realizzazioni di $W(s)$ propria sono, com'è noto, tutti i sistemi lineari continui Σ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (10.1)$$

la cui funzione di trasferimento è $W(s)$.

Quando F non è il corpo $\mathbb{R}(o \mathbb{C})$, la derivazione rispetto al tempo può non essere possibile, e la definizione di realizzazione tramite i sistemi continui perde significato. In realtà, poiché nei casi reale e complesso (10.1) realizza la matrice propria $W(s)$ se e solo se $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$, le realizzazioni di $W(s)$ propria possono definirsi tutte quelle terne (A, B, C) tali da aversi

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (10.2)$$

Questa definizione è meno intuitiva, ma ha il grosso vantaggio di valere qualunque sia il corpo F su cui con dati i coefficienti di $W(s)$ e su cui prendono valori le matrici A, B, C .

Del resto questo approccio è meno astratto di quel che potrebbe sembrare.

Infatti il sistema lineare discreto sul corpo F generico

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \\ y_t = Cx_t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z} \quad (10.3)$$

ha funzione di trasferimento alle z -trasformate data da

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B \quad (10.4)$$

cosicché le realizzazioni di $W(z)$ si possono pensare come tutti i sistemi lineari discreti con f di t . $W(z)$.

Si estendono al corpo generico le nozioni di realizzazione minima, le proprietà della matrice di Hankel, il grado di Mc Millan per $W(s)$ propria e non, ed è un facile esercizio verificare che le prove fin qui date in argomento valgono indipendentemente dal corpo F .

CONSTRUZIONE DI UNA REALIZZAZIONE PER $W(s)$ PROPRIA

Se $F[s]$ è l'anello dei polinomi nell'indeterminata s su F , (F è ora un corpo qualsiasi) e se $\psi, p \in F[s]$, indichiamo con $\mathcal{P}_\psi(p)$ il polinomio resto della divisione di p per ψ . È ovvio che $\mathcal{P}_\psi$ è una mappa lineare, anzi una proiezione ($\mathcal{P}_\psi = \mathcal{P}_\psi \mathcal{P}_\psi$) ed è lasciato per esercizio

provare che

$$\mathcal{P}_\psi(p_1 \cdot p_2) = \mathcal{P}_\psi(p_1) \cdot \mathcal{P}_\psi(p_2) \quad p_1, p_2 \in F[s] \quad (10.5)$$

Sia $W(s) \in F(s)^{p \times m}$ una matrice propria, e sia $X(s) \psi(s)$ la sua forma canonica:

$$W(s) = \mathcal{E}(s) \operatorname{diag} \left\{ \frac{x_1}{\psi_1}, \frac{x_2}{\psi_2}, \dots, \frac{x_t}{\psi_t} \right\} \mathcal{F}(s) \quad (10.6)$$

Poiché, se $W(s)$ è propria, $\psi_1 W$ è una matrice polinomiale i cui elementi hanno tutti grado inferiore al grado di ψ_1 , da (10.5) e (10.6) si ha:

$$\begin{aligned} \psi_1 W &= \mathcal{P}_1(\psi_1 W) = \mathcal{P}_1 \left(\sum_{k=1}^t \operatorname{col}_k(\mathcal{E}X) \psi_k^{-1} \psi_1 \operatorname{row}_k(\mathcal{F}) \right) = \\ &= \sum_{k=1}^t \mathcal{P}_1 \left(\operatorname{col}_k(\mathcal{E}X) \psi_k^{-1} \psi_1 \operatorname{row}_k(\mathcal{F}) \right) \end{aligned} \quad (10.7)$$

Se g denota l'elemento generico della matrice $\operatorname{col}_k(\mathcal{E}X) \operatorname{row}_k(\mathcal{F})$, con lo algoritmo di divisione si ottiene

$$g = \psi_k q + \mathcal{P}_{\psi_k}(g), \quad \deg \mathcal{P}_{\psi_k}(g) < \deg \psi_k$$

cosicché il generico elemento in (10.7) assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 \left(g \frac{\psi_1}{\psi_k} \right) &= \mathcal{P}_1 \left((\psi_k q + \mathcal{P}_{\psi_k}(g)) \frac{\psi_1}{\psi_k} \right) = \mathcal{P}_{\psi_1}(\psi_1 q + \frac{\psi_1}{\psi_k} \mathcal{P}_{\psi_k}(g)) = \\ &= \mathcal{P}_{\psi_1}(\mathcal{P}_{\psi_k}(g) \frac{\psi_1}{\psi_k}) = \mathcal{P}_{\psi_k}(g) \frac{\psi_1}{\psi_k} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Quindi:

$$\psi_1 W = \sum_k \psi_1 \psi_k^{-1} \mathcal{P}_{\psi_k} \left[\operatorname{col}_k(\mathcal{E}X) \operatorname{row}_k(\mathcal{F}) \right]$$

e dividendo per ψ_1

$$W(s) = \sum_k \psi_k^{-1} \mathcal{P}_{\psi_k} \left[\operatorname{col}_k(\mathcal{E}X) \operatorname{row}_k(\mathcal{F}) \right] \quad (10.9)$$

La forma (10.9) consente di costruire direttamente una realizzazione di

A questo punto è chiaro quali sono i "passi" da compiere per costruire una realizzazione di una assegnata $W(s)$ propria usando la f.c. di Smith Mc Millan:

1 - si ricerca la forma canonica:

$$W(s) = \mathcal{E}(s)X(s)Y(s)\mathcal{F}(s)$$

2 - si pone

$$W(s) = \sum_{k=1}^t \psi_k^{-1} \mathcal{P}_k ((\mathcal{P}_k \text{col}_k(\mathcal{E}X)) (\mathcal{P}_k \text{row}_k(\mathcal{F})))$$

3 - si costruiscono le realizzazioni di

$$\psi_k^{-1} \mathcal{P}_k ((\mathcal{P}_k \text{col}_k(\mathcal{E}X)) (\mathcal{P}_k \text{row}_k(\mathcal{F}))) \quad k = 1, 2, \dots, t$$

usando la tecnica descritta nel teor. 1

4 - se $(A_k, B_k, C_k, 0)$, $k = 1, 2, \dots, t$, sono le realizzazioni così ottenute, $W(s)$ è realizzata da

$$(\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_t), \text{col}(B_1, B_2, \dots, B_t), \text{row}(C_1, C_2, \dots, C_t), 0) \quad (10.13)$$

Tale realizzazione ha dimensione $\sum_{k=1}^t \deg \psi_k$

MINIMALITA' DELLA REALIZZAZIONE

La realizzazione ottenuta per una $W(s)$ propria (o per la propria di una $W(s)$ generica) usando la f.c. di Smith Mc Millan ha interesse soprattutto perchè essa è controllabile ed osservabile e quindi minima: si eliminano così le procedure di riduzione che si rendono necessarie quando, ottenuta la realizzazione di par. 4, si intenda ottenerne una minima.

Per provare che effettivamente (10.13) non è ulteriormente riducibile, applicheremo il seguente:

Lemma 2 Sia $\bar{W}(s) = \mathcal{E}(s)W(s)\mathcal{F}(s)$, con $W(s) \in F(s)^{p \times m}$, $\mathcal{E}(s) \in F[s]^{p \times p}$, $\mathcal{F}(s) \in F[s]^{m \times m}$.

Allora $\delta \left[\bar{W}^R(s) \right] \geq \delta \left[\bar{W}^R(s) \right]$
 prova. Poniamo $\bar{W}(s) = \bar{W}^R(s) + W(s, \infty)$, $\bar{W}(s) = \bar{W}^R(s) + \bar{W}(s, \infty)$, con

$$\bar{W}^R(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{M}_i s^{-i-1} \quad \bar{M}_i \in F^{p \times m}$$

$$\mathcal{E}(s) = \sum_{h=0}^v E_h s^h \quad E_h \in F^{p \times p}$$

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{k=0}^u F_k s^k \quad F_k \in F^{m \times m}$$

$$\bar{W}^R(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{M}_i s^{-i} \quad \bar{M}_i \in F^{p \times m}$$

E' immediato verificare che il legame fra le matrici di Hankel di $\bar{W}^R(s)$ e di $\bar{W}^R(s)$ è dato dalla relazione

$$\mathcal{H}_{\bar{W}^R} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 & \dots \\ 0 & E_1 & E_2 & \dots \\ 0 & 0 & E_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \mathcal{H}_{\bar{W}^R} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & \dots \\ F_2 & F_1 & 0 & \dots \\ F_3 & F_2 & F_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

in quanto risulta

$$\bar{W}(s) = \sum_{h,k,i} E_h M_i F_s^{h+k-i} + \mathcal{E}(s)W(s, \infty)\mathcal{F}(s)$$

Da (10.14) si ha immediatamente

$$\text{rank} \mathcal{H}_{\bar{W}^R} \leq \text{rank} \mathcal{H}_{\bar{W}^R}$$

Teor. 2 Se $W(s) \in F(s)^{p \times m}$ sono equivalenti nell'equivalenza in dotta dalle trasformazioni elementari, allora

$$\delta \left[\bar{W}^R(s) \right] = \delta \left[\bar{W}^R(s) \right]$$

prova. Basta applicare il lemma 2 alle relazioni

$$\bar{W}(s) = \mathcal{E}(s)W(s)\mathcal{F}(s); \quad W(s) = \mathcal{E}(s)\bar{W}(s)\mathcal{F}(s)$$

con $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ matrici polinomiali.

Coroll. 1 La realizzazione (10.13) è minima.

prova. $W(s)$ e $\text{diag}\left\{\frac{x_1}{\psi_1}, \frac{x_2}{\psi_2}, \dots, \frac{x_t}{\psi_t}\right\}_{p \times m}$ sono equivalenti nella equivalenza indotta dalle trasformazioni elementari.

Inoltre la parte realizzabile della forma canonica è

$$\text{diag}\left\{\frac{\mathcal{P}_1(x_1)}{\psi_1}, \frac{\mathcal{P}_2(x_2)}{\psi_2}, \dots, \frac{\mathcal{P}_t(x_t)}{\psi_t}\right\}_{p \times m} \quad (10.15)$$

ed è $\mathcal{P}_i(x_i)$ primo con ψ_i (perchè?)

Poichè (10.15) ha come dimensione minima di realizzazione la somma delle dimensioni minime di realizzazione delle funzioni componenti,

$$\delta \left[\text{diag}\left\{\frac{\mathcal{P}_1(x_1)}{\psi_1}, \dots, \frac{\mathcal{P}_t(x_t)}{\psi_t}\right\} \right] = \sum_{i=1}^t \deg \psi_i$$

Ed ora basta applicare il teor. 2.

Se $W(s)$ è propria, per quanto detto finora $\delta[W(s)]$ è dato dalla somma dei gradi dei denominatori nella forma canonica; se $W(s)$ contiene una parte polinomiale non costante, è sempre possibile applicare una trasformazione bilineare che renda costante tale parte polinomiale. Il grado di Mc Millan non è alterato dalla trasformazione (cfr. par. 6): si ricerca allora la forma canonica della nuova matrice ottenuta e si sommano i gradi dei denominatori.

Esempio 1. Si consideri la matrice propria

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Il m.c.m. dei denominatori è $p(s) = (s+1)(s+2)$, e la forma canonica della matrice polinomiale

$$V(s) = p(s)W(s) = \begin{bmatrix} 2s+2 & s+2 \\ s+1 & 2 \end{bmatrix},$$

si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2s+2 & s+2 \\ s+1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & s+1 \\ s+2 & 2s+2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{s}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & s+1 \\ s+2 & 2s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{s}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{s^2}{2} + s + 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{s^2}{2} + s + 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - s - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{s}{2} + 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+s & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{F}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{2} + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{2} + \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

si ha

$$V(s) = \mathcal{E}(s) \Gamma(s) \mathcal{F}(s) = \mathcal{E}(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - s - 2 \end{bmatrix} \mathcal{H}(s)$$

I polinomi $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = s^2 - s - 2$ sono, com'è noto, i polinomi invarianti di $V(s)$ (e si potevano calcolare direttamente a partire dai M.C.D. dei minori di $V(s)$).

Dalle relazioni

$$\begin{aligned} x_1/\psi_1 &= \gamma_1/p = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ x_2/\psi_2 &= \gamma_2/p = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-2}{s+2} \end{aligned}$$

si ricava la forma canonica per $W(s)$

$$W(s) = \mathcal{E}(s) X(s) \Psi(s) \mathcal{H}(s)$$

con

$$X(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Siamo ora in grado di applicare l'algoritmo di realizzazioni descritto nel par. 10.

Dalla (10.9), abbiamo

$$W(s) = \psi_1^{-1} \phi_1 (\text{col}_1(\mathcal{E}X) \text{row}_1(\mathcal{H})) + \psi_2^{-1} \phi_2 (\text{col}_2(\mathcal{E}X) \text{row}_2(\mathcal{H}))$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \phi_1 \begin{bmatrix} 2+s \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+s \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \phi_2 \begin{bmatrix} 1-s \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con le formule (10.11) costruiamo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = -2; \quad C_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi la realizzazione di $W(s)$ è la seguente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III) ELEMENTI DI TEORIA DEI MINIMI QUADRATI

Per lo studio dei sistemi lineari dissipativi che svolgeremo in seguito, abbiamo bisogno di concetti e risultati della teoria dei minimi quadrati, che esporremo succintamente in questo capitolo.

Il concetto di forma su uno spazio vettoriale risulta a questo proposito fondamentale. Per dare almeno qualche informazione dicheremo alcuni paragrafi alle forme bilineari simmetriche (o prodotti interni) su spazi vettoriali (generalmente di dimensione finita).

Accenneremo nei paragrafi successivi ad alcuni problemi di ottimizzazione nei sistemi lineari, utilizzando come tecniche di soluzione l'equazione differenziale e l'equazione algebrica di Riccati.

1. Forme bilineari

Dato uno spazio vettoriale V su un corpo F , ed assunta una base in V , diremo forme su V quelle funzioni da V in F che possono essere espresse come funzioni polinomiali omogenee delle coordinate dei punti di V rispetto alla base prescelta.

Noi saremo interessati alle forme bilineari (in particolare, a quelle simmetriche) e, più avanti, alle forme hermitiane.

Def. 1 Siano W, W' spazi vettoriali sul corpo F . Una forma bilineare su $W \times W'$ è una applicazione

$$f: W \times W' \rightarrow F$$

$$f: (v, v') \mapsto f(v, v')$$

che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{aligned} f(v+w, v') &= f(v, v') + f(w, v') \\ f(v, v'+w') &= f(v, v') + f(v, w') \\ f(\alpha v, v') &= \alpha f(v, v') \\ f(v, \alpha v') &= \alpha f(v, v') \end{aligned} \quad (1.1)$$