

IV) TECNICHE DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI RICCATI

1. Soluzione dell'equazione differenziale di Riccati

Già abbiamo visto che la soluzione dell'equazione differenziale scalare di Riccati può essere ricondotta alla soluzione di un sistema di due equazioni differenziali lineari. Qui vogliamo generalizzare quel risultato all'equazione differenziale matriciale.

Teor. 1 Si associ alla equazione differenziale matriciale di Riccati

$$\frac{dK}{dt} = -A^T K - KA - Q + KBR^{-1}B^T K; \quad K(t_1) = K_1 \quad (1.1)$$

l'equazione matriciale lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ X_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ K_1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Se la soluzione $\Pi(t, K_1, t_1)$ ad (1.1) esiste sull'intervallo $[t_0, t_1]$, sul medesimo intervallo è invertibile la soluzione $X_1(t)$ ad (1.2), e risulta

$$\Pi(t, K_1, t_1) = X_2(t)X_1^{-1}(t) \quad (1.3)$$

Viceversa se sull'intervallo $[t_0, t_1]$ $X_1(t)$ è invertibile, allora (1.1) vi è risolubile, ed (1.3) fornisce la soluzione.

prova. Si supponga dapprima invertibile $X_1^{-1}(t)$ sull'intervallo $[t_0, t_1]$ e si consideri la derivata di $X_2 X_1^{-1}$:

$$\frac{d}{dt} (X_2 X_1^{-1}) = \left(\frac{d}{dt} X_2 \right) X_1^{-1} + X_2 \frac{d}{dt} X_1^{-1} = \dot{X}_2 X_1^{-1} - X_2 X_1^{-1} \dot{X}_1 X_1^{-1}$$

Sostituendo ad $\dot{X}_1$ ed $\dot{X}_2$ le espressioni fornite da (1.2), si ha

$$\frac{d}{dt} (X_2 X_1^{-1}) = (-QX_1^{-1} - A^T X_2) X_1^{-1} - X_2 X_1^{-1} (AX_1^{-1} - BR^{-1}B^T X_2) X_1^{-1}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} (X_2 X_1^{-1}) = -A^T (X_2 X_1^{-1}) - (X_2 X_1^{-1}) A - Q + (X_2 X_1^{-1}) BR^{-1} B^T (X_2 X_1^{-1})$$

Inoltre

$$(X_2 X_1^{-1})(t_1) = K_1 I = K_1$$

Quindi

$$X_2 X_1^{-1}(t) = \Pi(t, K_1, t_1) \text{ su } [t_0, t_1]$$

Viceversa supponiamo che su $[t_0, t_1]$ sia risolubile (1.1), e consideriamo la soluzione dell'equazione differenziale lineare

$$\frac{dZ}{dt} = A - BR^{-1}B^T \Pi(t, K_1, t_1) Z \quad Z(t_1) = I$$

sull'intervallo $[t_0, t_1]$. Com'è noto, tale soluzione si ottiene utilizzando la matrice di transizione $\Phi(t, t_1)$:

$$Z(t) = \Phi(t, t_1) Z(t_1) = \Phi(t, t_1)$$

Vogliamo provare che la soluzione di (1.2) è data da

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t, t_1) \\ \Pi(t, K_1, t_1) \Phi(t, t_1) \end{bmatrix}$$

Infatti

i) le condizioni al contorno sono soddisfatte (si ricordi che

$$\Phi(t_1, t_1) = I)$$

ii) $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{dZ}{dt} = AZ - BR^{-1}B^T \Pi Z = A\Phi - BR^{-1}B^T (\Pi\Phi)$

$$\frac{d(\Pi\Phi)}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} \Phi + \Pi \frac{d\Phi}{dt} = -A^T (\Pi\Phi) - Q\Phi$$

Inoltre $\Phi(t, t_1)$ è invertibile sull'intervallo $[t_0, t_1]$, e quindi vi è invertibile $X_1(t)$. ■

La soluzione di (1.1), equazione non lineare nella matrice incognita $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è così ricondotta alla soluzione di (1.2), equazione lineare nelle matrici incognite X_1 ed $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Poiché i coefficienti A, B, Q, R sono costanti, la matrice di transizione $\Phi(t, t_1)$ associata all'equazione (1.2) è esponenziale:

$$\theta(t, t_1) = \exp \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} (t - t_1)$$

ed è quindi ottenibile analiticamente.

Partizionando $\theta(t, t_1)$ in quattro sottomatrici $n \times n$,

$$\theta(t, t_1) = \begin{bmatrix} \theta_{11}(t, t_1) & \theta_{12}(t, t_1) \\ \theta_{21}(t, t_1) & \theta_{22}(t, t_1) \end{bmatrix}$$

si ha

$$X_1(t) = \theta_{11}(t, t_1) + \theta_{12}(t, t_1)K_1$$

$$X_2(t) = \theta_{21}(t, t_1) + \theta_{22}(t, t_1)K_1$$

e quindi

$$\Pi(t, K_1, t_1) = (\theta_{21}(t, t_1) + \theta_{22}(t, t_1)K_1)(\theta_{11}(t, t_1) + \theta_{12}(t, t_1)K_1)^{-1}$$

Esempio 1. Consideriamo l'equazione di Riccati

$$\frac{dK}{dt} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} K + K \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

con la condizione iniziale $K(0) = 0$.

La equazione lineare associata è allora la seguente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X_1(0) \\ X_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La cui soluzione è immediata una volta che si sia costruita la matrice di transizione

$$\theta(t, 0) = \exp U t \quad (1.4)$$

Come abbiamo visto in A.2, (1.4) è calcolabile passando, con una trasformazione di similitudine, dalla matrice dei coefficienti alla sua

forma canonica di Jordan.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono +1 e -1, entrambi con molteplicità 2.

Applicando p. es. il metodo descritto in A3 si ottiene la forma canonica di Jordan:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la matrice invertibile M consente di ricavare J secondo la relazione $MJM^{-1} = U$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1 & -\sqrt{2}-2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Poichè risulta

$$\exp Jt = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

si ha, con calcoli lunghi ma banali

$$\theta(t, 0) = \exp(Jt) = M^{-1} \exp(Jt) M =$$

$$0 = -Q - A^T K - K A + K B B^T K \quad (2.1)$$

siano soddisfatte le condizioni elencate in (III.9.1).

Allora esiste ed è unica la soluzione definita positiva $\bar{\Pi}$ di (A.R.E.) ed essa coincide necessariamente con la soluzione Π_∞ del problema del regolatore.

Vogliamo ora descrivere alcune tecniche di calcolo che consentano di ricavare $\bar{\Pi}$ senza richiedere la determinazione preliminare dell'intero insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni di (2.1) e la successiva estrazione da $\mathcal{S}$ della unica matrice definita positiva. In questo paragrafo prenderemo in considerazione una procedura basata sulla costruzione della forma di Jordan di una matrice ottenuta dalla equazione (2.1) mentre nel paragrafo seguente vedremo una tecnica numerica.

Cominciamo con alcune proprietà della cosiddetta matrice hamiltoniana $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$:

$$U = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

(U è già stata utilizzata in (1.2)).

Prop.1 La matrice U è simile alla matrice triangolare a blocchi

$$\begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -A^T + \bar{\Pi}BR^{-1}B^T \end{bmatrix}$$

prova. E' sufficiente verificare, tenuto conto di (2.1), che

$$\begin{bmatrix} \bar{\Pi} & 0 \\ 0 & \bar{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Pi} & 0 \\ 0 & \bar{\Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -A^T + \bar{\Pi}BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dalla (2.3) e da $\text{Re} \lambda(A - BR^{-1}B^T) < 0$ segue che

1. U non possiede autovalori immaginari puri

2. se λ è autovalore di U , con molteplicità ν_λ , anche $-\lambda$ è autovalore di U , con la stessa molteplicità.

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - te^t & e^{-t} - te^t & -3e^{-t} + te^t & \sqrt{2}e^{-t} + (1+\sqrt{2})te^t \\ 2e^{-t} + te^{-t} & -e^{-t} - te^t & +3e^{-t} + te^{-t} & +\sqrt{2}e^{-t} + (\sqrt{2}-1)te^{-1} \\ e^{-t} - (\sqrt{2}-1)te^t & (2-\sqrt{2})e^{-t} - (\sqrt{2}-1)te^t & -\sqrt{2}e^{-t} + (\sqrt{2}-1)te^t & -e^{-t} + te^t \\ -e^{-t} + (\sqrt{2}+1)te^{-t} & + (2+\sqrt{2})e^{-t} - (\sqrt{2}+1)te^{-1} & +\sqrt{2}e^{-t} + (\sqrt{2}+1)te^{-t} & +e^{-t} + te^{-1} \\ e^{-t} + te^t & te^{-t} - te^{-t} & 2e^{-t} - te^t & -e^{-t} - (1+\sqrt{2})te^t \\ +e^{-t} + te^{-t} & & +2e^{-t} + te^{-t} & +e^{-t} + (\sqrt{2}-1)te^{-t} \\ -te^{-t} + te^{-1} & -e^{-t} - te^t & -e^{-t} + te^t & (2+\sqrt{2})e^{-t} + (\sqrt{2}+1)te^t \\ & +e^{-t} - te^{-t} & +e^{-t} + te^{-t} & + (2-\sqrt{2})e^{-t} + (\sqrt{2}-1)te^{-t} \end{bmatrix}$$

soluzione dell'equazione di Riccati è allora

$$\Pi(t, 0, 0) = \theta_{21}(t, 0) \theta_{11}(t, 0)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} - te^{-t} \\ -te^{-t} + te^{-t} & -e^{-t} + te^{-t} + e^{-t} - te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2e^{-t} - te^{-t} + 2e^{-t} + te^{-t} & e^{-t} - te^{-t} - e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} - (\sqrt{2}-1)te^{-t} + e^{-t} + (\sqrt{2}+1)te^{-t} & (2-\sqrt{2})e^{-t} - (\sqrt{2}-1)te^{-t} + (2+\sqrt{2})e^{-t} - (\sqrt{2}+1)te^{-t} \end{bmatrix}^{-1}$$

riccio.1. Si valuti, se esiste, il limite della soluzione dell'esempio precedente per $t \rightarrow -\infty$.

riccio 2. Si risolva la seguente equazione di Riccati:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} K - K \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} K$$

la condizione iniziale $K(0) = 0$

soluzione di (A.R.E.) mediante la forma di Jordan

orremo in questo e nel successivo paragrafo che nell'equazione algebrica di ati associata al problema del regolatore

La forma di Jordan di U può allora essere scritta nella forma

$$J = \begin{bmatrix} \Lambda_+ & 0 \\ 0 & \Lambda_- \end{bmatrix}^n$$

dove Λ_+ e Λ_- contengono rispettivamente tutti i blocchi di Jordan relativi ad autovalori con parte reale positiva e negativa. Si noti che Λ_+ , Λ_- e le matrici che operano la similitudine da U a J sono a valori complessi: in ogniqualvolta U possiede un autovalore complesso. Tuttavia, applicando quanto descritto nella seconda appendice alla prima parte, è possibile ottenere una forma "modificata" $\tilde{J}$ della matrice di Jordan, in cui non compaiono elementi complessi: in $\tilde{J}$ restano immutati rispetto a J i blocchi reali di Jordan, ed ogni blocco complesso in J , accoppiato con il proprio coniugato, per similitudine dà in $\tilde{J}$ un blocco reale d'ordine doppio. Ad esempio si ha:

$$\begin{bmatrix} \lambda + j\mu & 1 \\ \lambda - j\mu & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix}$$

con la similitudine indotta dalla matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & j/\sqrt{2} \\ j/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Poiché la trasformazione da U a $\tilde{J}$ si esegue utilizzando matrici sul campo reale

$$M^{-1}UM = \tilde{J}, \quad M \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

tenuto conto di (2.4), si ha

Prop. 2 Esiste una matrice M a valori reali per cui si ha

$$M^{-1}UM = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}_- \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$\tilde{\Lambda}_+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha tutti gli autovalori con parte reale positiva e

$\tilde{\Lambda}_- \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ha tutti gli autovalori con parte reale negativa.

Consideriamo ora l'equazione differenziale lineare

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k_1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

che in par. 1 abbiamo utilizzato per risolvere l'equazione differenziale di Riccati

$$\dot{K} = -A^TK - KA - Q + KBR^{-1}B^TK, \quad K(t_1) = K_1 \quad (2.6)$$

Se assumiamo la condizione iniziale $K_1 = \bar{K}$, si ha per ogni t

$$x_2(t) = \Pi(t, \bar{K}, t_1)x_1(t) = \bar{\Pi}x_1(t) \quad (2.7)$$

e quindi da

$$\frac{dx_1}{dt} = AX_1 - BR^{-1}B^TX_2 = (A - BR^{-1}B^T\bar{\Pi})x_1$$

tenuto conto che è $\text{Re}(A - BR^{-1}B^T\bar{\Pi}) < 0$ si conclude che per $t \rightarrow +\infty$ $x_1(t)$ è infinitesima.

Utilizziamo ora la matrice invertibile M^{-1} di (2.4) per porre

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

e trasformiamo l'equazione (2.5):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{\Lambda}_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_1(t_1) \\ z_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} + M_{12}\bar{\Pi} \\ M_{21} + M_{22}\bar{\Pi} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

E' chiaro che per $t \rightarrow +\infty$

$$Z_1(t) = \exp(\tilde{A}_+(t-t_1))Z_1(t_1) = \exp(\tilde{A}_+(t-t_1))(M_{11} + M_{12}\tilde{\Pi})$$

diverge in qualche sua componente, a meno che non sia $M_{11} + M_{12}\tilde{\Pi} = 0$, per ch  tutti gli autovalori di $\tilde{A}_+$ hanno parte reale positiva. D'altra parte si ha anche

$$Z_1(t) = M_{11}X_1(t) + M_{12}X_2(t) = (M_{11} + M_{12}\tilde{\Pi})X_1(t)$$

e poich  per $t \rightarrow +\infty$ $X_1(t)$   infinitesima, tale   anche $Z_1(t)$. Si conclude che deve essere

$$M_{11} + M_{12}\tilde{\Pi} = 0 \quad (2.10)$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Pi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} + M_{22}\tilde{\Pi} & M_{22} \end{bmatrix}$$

  invertibile, perch  prodotto di due matrici invertibili, ed   triangolare a blocchi. Quindi sono invertibili i blocchi della diagonale secondaria e in particolare   invertibile M_{12} .

Da (2.10) si pu  ricavare la soluzione $\tilde{\Pi}$ di (A.R.E.):

$$\tilde{\Pi} = -M_{12}^{-1} M_{11} \quad (2.11)$$

Abbiamo cos  provata la

Prop. 3 La soluzione definita positiva di (A.R.E.) si ottiene

i) diagonalizzando (a blocchi) la matrice U nella forma (2.4)

$$M^{-1}UM = \begin{bmatrix} K_+ & 0 \\ 0 & \tilde{K}_- \end{bmatrix}$$

ii) partizionando la matrice N^{-1} conformemente ad U

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

e ponendo

$$\tilde{\Pi} = -M_{12}^{-1} M_{11}$$

Esempio 1. Si consideri l'equazione algebrica di Riccati

$$K \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} (K - K) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} K + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

associata all'equazione differenziale studiata in esempio 1 di par. 1.

Dalla matrice

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

si ottiene la forma di Jordan

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice N^{-1} per cui risulta $J = M^{-1}UM$ si pu  ottenere con la procedura descritta nella appendice alla parte prima. Qui, pi  semplicemente, baster  invertire la matrice M calcolata in es. 1 di par. 1.

$$M^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 4 \\ -4 & -4 & 4 & 4\sqrt{2}+4 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & 4\sqrt{2}-4 \end{bmatrix}$$

In conclusione

$$\bar{\Pi} = - \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & 4\sqrt{2}+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{2} & 3-2\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} & 6-4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Si verifichi che $\bar{\Pi}$ coincide con il limite, per $t \rightarrow -\infty$, della soluzione trovata in esempio 1 di par. 1.

Osservazione. Il procedimento che abbiamo descritto, utilizzando la forma di Jordan di U , coinvolge la fattorizzazione del polinomio caratteristico della matrice $U \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

Di esso esistono alcune varianti, sulle quali non ci soffermiamo rinviando, p. es., al testo di Anderson [A.17].

Vale la pena di notare che, comunque, le varianti coinvolgono la soluzione di un'equazione algebrica e che quando il grado dell'equazione è superiore a quattro, le tecniche numeriche sono indispensabili.

3. Soluzione di (A.R.E.) con metodi iterativi

Come abbiamo osservato, la tecnica del par. 2 può richiedere la soluzione di equazioni algebriche di grado elevato e perciò, quando le dimensioni del sistema sono grandi, per la sua applicazione non sono sufficienti gli algoritmi di tipo finito. In altre parole, al crescere di n , la tecnica di par. 2 diventa inevitabilmente un ibrido fra metodi strettamente "analitici" e metodi "numerici".

L'algoritmo che ora considereremo si sviluppa invece fin dall'inizio in un'ottica completamente numerica.

L'inesco dell'algoritmo è condizionato dall'aver una matrice A stabile. Quando ciò non succede, si può sostituire alla matrice A una matrice $A_0 = A - BR^{-1}B^T \Pi_0$ in cui Π_0 sia stata scelta sì da avere stabile A_0 .

La possibilità di disporre sempre di una siffatta matrice Π_0 è assicurata dalla prop. 1, che dà esplicitamente una (certamente non l'unica) matrice Π_0 .

Prop. 1 $\exists \Pi_0 = \Pi_{0,ij}$ e se $\beta \in \mathbb{R}$ soddisfa la disuguaglianza

$$\beta > \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + a_{ji})^2} \quad (3.1)$$

allora la soluzione simmetrica (di

$$(A + \beta I)X + X(A + \beta I)^T = 2BR^{-1}B^T \quad (3.2)$$

è definita positiva e la matrice

$$\Pi_0 = G^{-1}$$

rende stabile $A - BR^{-1}B^T \Pi_0$

prova. Le ipotesi su β sono sufficienti per la stabilità della matrice $-(A + \beta I)$. Infatti per la disuguaglianza di Schur riportata in esercizio 1 gli autovalori di $-A$ hanno parte reale non superiore a $1/2 \sqrt{\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + a_{ji})^2}$ e poiché gli autovalori di $-A - \beta I$ si ottengono da quelli di $-A$ per traslazione di β secondo il verso negativo dell'asse reale, si ha subito che la scelta (3.1) per β rende stabile $-A - \beta I$.

La soluzione simmetrica S dell'equazione (3.2) è data, per il lemma 2 di III.8, da

$$G = 2 \int_0^{+\infty} \exp((-A - \beta I)^T t) BR^{-1}B^T \exp((-A - \beta I)t) dt \quad (3.3)$$

Poiché la coppia $(A + \beta I, B)$ è controllabile, (3.3) è definita positiva in quanto coincide col gramiano di controllabilità (a meno della inessenziale R^{-1}).

Sostituendo G in (3.2), si ha

$$(A - BR^{-1}B^T C^{-1})G + G(A^T - C^{-1}B^T R^{-1}B^T) = 2\beta I$$

ed applicando il lemma di Lyapunov si conclude

$$\operatorname{Re} \lambda(A - BR^{-1}B^T \Pi_0) < 0$$

Esercizio 1. DISUGUAGLIANZE DI SCHUR. Per ogni matrice $H = \|h_{ij}\| \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gli autovalori λ_i (contati con la rispettiva molteplicità algebrica) soddisfano le disuguaglianze:

$$\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |(h_{ij} + \bar{h}_{ji})/2|^2 \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^n |\operatorname{Im} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |(h_{ij} - \bar{h}_{ji})/2|^2 \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |h_{ij}|^2 \quad (3.6)$$

[cenno della prova. Una matrice $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è "unitaria" se $U^T U = I_n$. Ora, se $H \in \mathbb{C}^{n \times n}$, essa può essere ridotta ad una matrice triangolare superiore T con gli autovalori lungo la diagonale principale da una trasformazione di similarità eseguita con matrici unitarie. Infatti, sia v_1 un autovettore di H per cui risulta $v_1^T v_1 = 1$, $H v_1 = \lambda_1 v_1$. Si può costruire una matrice U_1 unitaria avente v_1 come sua prima colonna usando l'analogo complesso del procedimento di Gram-Schmidt, e risulta

$$\begin{aligned} \text{col}_1(U_1^T U_1) &= (U_1^T H) \text{col}_1 U_1 = \lambda_1 U_1^T v_1 = \lambda_1 U_1^T (\text{col}_1 U_1) = \\ &= \lambda_1 \text{col}_1(U_1^T U_1) = \lambda_1 \text{col}_1 I_n = [\lambda_1 0 \dots 0]^T \end{aligned}$$

Quindi

$$U_1^T H U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ed una facile induzione rispetto ad n prova la tringolarizzabilità. Sia quindi U una matrice unitaria per cui risulta

$$U^T H U = T \quad (T \text{ triangolare})$$

Da $U^T H^T U = T^T$ e dall'invarianza della traccia per similitudine si ha:

$$\text{tr}(H H^T) = \text{tr}(T T^T)$$

e quindi $\sum_{i,j=1}^n |h_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \sum_{i < j} |t_{ij}|^2$ che prova (3.6).

Per dimostrare (3.4) e (3.5) si verifichi che

$$\frac{1}{2} U^T (H \pm H^T) U = \frac{1}{2} (T \pm T^T)$$

si considerino le seguenti eguaglianze sulle tracce

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[(T + T^T) (T + T^T)^T \right] &= \text{tr} \left[(H + H^T) (H + H^T)^T \right] \\ \text{tr} \left[(T - T^T) (T - T^T)^T \right] &= \text{tr} \left[(H - H^T) (H - H^T)^T \right] \end{aligned}$$

La diseguaglianza (3.6) non può essere raffinata, perchè è verificata come eguaglianza da tutte e sole le matrici H che soddisfano la condizione (detta di normalità) $H H^T = H^T H$.

Il secondo passo dell'algoritmo costruisce una sequenza di matrici $n \times n$

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots \quad (3.7)$$

che converge a $\bar{\Pi}$.

Si considerino le equazioni

$$A_i = A - B R^{-1} B^T \Pi_i \quad (3.8)$$

$$\Pi_{i+1} A_i + A_i^T \Pi_{i+1} = -Q - \Pi_i R^{-1} B^T \Pi_i \quad (3.9)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Assegnata la matrice Π_0 , il sistema può essere risolto determinando successivamente $A_0, \Pi_1, A_1, \Pi_2, \dots$

Prop. 2 La sequenza (3.4) ottenuta risolvendo il sistema (3.8), (3.9) converge a $\bar{\Pi}$ se la matrice Π_0 rende stabile $A_0 = A - B R^{-1} B^T \Pi_0$.

prova. Anzitutto verifichiamo che è

$$\Pi_1 \geq \bar{\Pi} \quad (3.10)$$

Infatti dalla eguaglianza

$$(\Pi_1 - \bar{\Pi}) (A - B R^{-1} B^T \Pi_0) + (A^T - \Pi_0 B R^{-1} B^T) (\Pi_1 - \bar{\Pi}) = -(\Pi_0 - \bar{\Pi}) B R^{-1} B^T (\Pi_0 - \bar{\Pi})$$

per il lemma 2 di III.8 si ha

$$(\Pi_1 - \bar{\Pi}) = \int_0^{+\infty} \exp(A_0^T t) (\Pi_0 - \bar{\Pi}) B R^{-1} B^T (\Pi_0 - \bar{\Pi}) \exp(A_0 t) dt \geq 0$$

Assumiamo ora induttivamente per $i \geq 1$ le ipotesi

$$\operatorname{Re} \lambda(A_{i-1}) < 0 \quad (3.11)$$

$$\Pi_i \geq \bar{\Pi} \quad (3.12)$$

Dalla identità

$$\begin{aligned} & \Pi_i (A - BR^{-1}B^T \Pi_i) + (A^T - \Pi_i BR^{-1}B^T) \Pi_i = \\ & = -Q - (\Pi_{i-1} - \Pi_i) BR^{-1}B^T (\Pi_{i-1} - \Pi_i) - \Pi_i BR^{-1}B^T \Pi_i \end{aligned}$$

segue

$$\begin{aligned} & \Pi_i^{-1} (A^T - \Pi_i BR^{-1}B^T) + (A - BR^{-1}B^T \Pi_i) \Pi_i^{-1} = \\ & = -\Pi_i^{-1} Q \Pi_i^{-1} - \Pi_i^{-1} (\Pi_i - \Pi_{i-1}) BR^{-1}B^T (\Pi_i - \Pi_{i-1}) \Pi_i^{-1} BR^{-1}B^T \Pi_i^{-1} \end{aligned}$$

Poichè la coppia $(A^T - \Pi_i BR^{-1}B^T, \sqrt{R}^{-1}B^T)$ è osservabile e poichè Π_i^{-1} è definita positiva, per il lemma di Lyapunov è $\operatorname{Re} \lambda(A_i) < 0$. Inoltre si ha $\Pi_{i-1} \geq \bar{\Pi}$ (la prova è la stessa di (3.10)).

La sequenza $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ è pertanto limitata inferiormente dalla matrice $\bar{\Pi}$, e la sequenza $A_0, A_1, A_2, \dots$ è tutta costituita di matrici stabili.

Dalla eguaglianza

$$(\Pi_{i+1} - \Pi_i) A_i + A_i^T (\Pi_{i+1} - \Pi_i) = (\Pi_i - \Pi_{i-1}) BR^{-1}B^T (\Pi_i - \Pi_{i-1})$$

tenuto conto della stabilità della matrice A_i si ha

$$\Pi_{i+1} - \Pi_i = - \int_0^{+\infty} \exp(A_i^T t) (\Pi_i - \Pi_{i-1}) BR^{-1}B^T (\Pi_i - \Pi_{i-1}) \exp(A_i t) dt \leq 0$$

che prova la monotonicità della sequenza $\Pi_1, \Pi_2, \dots$:

$$\Pi_1 \geq \Pi_2 \geq \Pi_3 \geq \dots \quad (3.13)$$

Poichè la sequenza (3.7) di matrici positive reali è decrescente ed inferiormente limitata da $\bar{\Pi}$, ne esiste il limite ed è:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \Pi_i = L \geq \bar{\Pi} \quad (3.14)$$

D'altra parte, passando al limite per $i \rightarrow +\infty$ sulla (3.9) si ha

$$L(A - BR^{-1}B^T L) + (A^T - LBR^{-1}B^T)L = -Q - LBR^{-1}B^T L$$

cosicchè la matrice L è una soluzione definita positiva di (A.R.E.) e deve coincidere con $\bar{\Pi}$.

Esercizio 2. Si dimostri che esiste la matrice limite L e che risulta $L \geq \bar{\Pi}$.

Osservazione. Il metodo numerico descritto è una applicazione dell'algoritmo di Newton-Raphson, noto dal corso di Analisi Numerica.