

VI) STUDIO IN S DEL LEGAME INGRESSO/USCITA NEI SISTEMI LINEARI DISSIPATIVI

1. Richiami di teoria delle funzioni analitiche

In questo capitolo si suppongono noti i fatti fondamentali della teoria delle funzioni analitiche: in particolare la condizione di monogenità, il teorema di Cauchy, lo sviluppo in serie di Laurent, il concetto di punto singolare e quello di residuo.

Il primo paragrafo ha lo scopo di estendere taluni risultati noti da corsi precedenti e che saranno particolarmente utili nel seguito.

Def.1 Sia $\tilde{f}$ una funzione definita e continua in un aperto A del piano di Gauss, a valori vettoriali complessi:

$$\tilde{f}: A \rightarrow \mathbb{C}^m$$

Si dice che $\tilde{f}$ possiede la proprietà della media se per ogni cerchio C contenuto in A il valore di $\tilde{f}$ nel centro c di C è il valore medio dei valori assunti da $\tilde{f}$ sulla frontiera di C :

$$\tilde{f}(c) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi r} \tilde{f}(c+re^{j\theta}) d(\tau\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(c+re^{j\theta}) d\theta \quad (1.1)$$

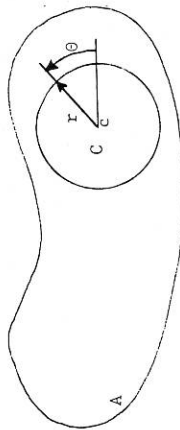


fig. 1.1

Teor.1 Se $\tilde{f}$ possiede la proprietà della media nell'aperto A , tale proprietà è posseduta separatamente da $\text{Re } \tilde{f}$ e da $\text{Im } \tilde{f}$ (parte reale e parte immaginaria di $\tilde{f}$), e viceversa.

prova. Basta spezzare (1.1) a primo e secondo membro nella parte reale e in quella immaginaria, ed eguagliare termine a termine. ■

Teor.2 Ogni funzione $\tilde{f}$ analitica nell'aperto A vi possiede la proprietà della media.

prova. Dalla formula di Cauchy

$$\tilde{f}(c) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{FC} \frac{\tilde{f}(s)}{s-c} ds \quad (1.2)$$

dove FC è la frontiera del cerchio C orientata in senso antiorario, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{f}(c) &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(c+re^{j\theta}) \frac{d}{d\theta} (c+re^{j\theta}) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(c+re^{j\theta}) j r e^{j\theta} d\theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Cor.1 La parte reale e quella immaginaria di una funzione $\tilde{f}$ analitica nell'aperto A vi posseggono la proprietà della media. ■

Si noti che la parte reale e quella immaginaria di una funzione $\tilde{f}$ analitica sull'aperto connesso A sono sempre continue, ma sono analitiche solo se $\tilde{f}$ è costante su A .

Il seguente teorema è di fondamentale importanza nelle applicazioni.

Teor.3 (DEL MASSIMO MODULO) Se D è un dominio limitato, contenuto nell'aperto A dove $\tilde{f}$ è continua e possiede la proprietà della media, allora il modulo di $\tilde{f}$ assume il massimo valore all'interno di D solo se $\tilde{f}$ è costante in D . ■

La prova è omessa (si veda, p.es., Schwartz [S.1]). Ci limitiamo a dedurre alcune notevoli conseguenze.

Cor.2 Se $\tilde{f}$ è analitica in A , e se $D \subset A$ è un dominio limitato, $\max_{s \in D} |\tilde{f}(s)|$ è raggiunto sulla frontiera di D . Se inoltre $\tilde{f}$ non è costante in D , $\max_{s \in D} |\tilde{f}(s)|$ è raggiunto esclusivamente sulla frontiera di D . ■

Cor.3 Se f è analitica a valori scalari, e se è ovunque diversa da zero nel dominio limitato D , $\min_{s \in D} |f(s)|$ è raggiunto sulla frontiera di D .

Se f non è funzione costante in D , tale minimo è raggiunto esclusivamente sulla frontiera.

prova. Si applichi il cor. 2 alla funzione $1/f$. ■

Esercizio 1. Si dimostri che cor. 3 non vale, in generale, quando $\tilde{f}$ è a valori in $\mathbb{C}^m$, $m > 1$. Suggerimento: si consideri la funzione $\tilde{f}: s \rightarrow (a, s)$ con $a \neq 0$, nel dominio $|s| \leq |a|$.

Teor. 4 Se f è analitica a valori scalari nel dominio limitato D , allora $\max_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$, $\min_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$, $\max_{s \in D} |\operatorname{Im} f(s)|$, $\min_{s \in D} |\operatorname{Im} f(s)|$ sono raggiunti sulla frontiera di D . Se f non è costante in D , massimi e minimi sono raggiunti esclusivamente sulla frontiera.

prova. Sia $g(s) = f(s) - \max_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$

$$h(s) = f(s) - \min_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$$

La parte reale di g è non positiva in D , la parte reale di h è non negativa in D .

Per il teor. 3, $\max_{s \in D} |\operatorname{Re} g(s)|$ e $\max_{s \in D} \operatorname{Re} h(s)$ sono raggiunti sulla frontiera di D .

Dove è massima $|\operatorname{Re} g(s)|$ è minima $\operatorname{Re} f(s)$ e dove è massima $\operatorname{Re} h(s)$ è massima pure $\operatorname{Re} f(s)$.

Inoltre, se f non è costante in D , non vi sono costanti né $\operatorname{Re} f$ né $\operatorname{Im} f$ e quindi per th. 3 $\max_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$ e $\min_{s \in D} \operatorname{Re} f(s)$ sono raggiunti soltanto sulla frontiera.

Prova analoga vale per $\operatorname{Im} f$.

2. Matrici hermitiane e forme hermitiane

Def. 1 Una matrice quadrata $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ è detta hermitiana se $M = M^T$.

In particolare ogni matrice reale è hermitiana se e solo se è simmetrica.

Lemma 1 Sia M una matrice in $\mathbb{C}^{m \times m}$.

Se per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$ risulta $v^T M v = 0$ allora $M = 0$.

prova. Proviamo dapprima che M è nulla se per ogni coppia $v, w \in \mathbb{C}^m$ risulta $w^T M v = 0$.

Se infatti fosse $M \neq 0$, esisterebbe un vettore v tale da aversi $Mv \neq 0$.

e poichè il prodotto interno su $\mathbb{C}^m$ definito dalla relazione $\langle x | y \rangle = x^T y$ non è degenere, esisterebbe un vettore w non ortogonale ad Mv .

Osserviamo ora che, nell'ipotesi del lemma, per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{C}^m$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= (v + w)^T M (v + w) = \\ &= v^T M v + w^T M v + v^T M w + w^T M w = \\ &= v^T M w + w^T M v \end{aligned} \quad (2.1)$$

Sostituendo v con jv , si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= (jv)^T M w + v^T M (jv) = \\ &= j(w^T M v - v^T M w) \end{aligned} \quad (2.2)$$

da cui

$$0 = -v^T M w + w^T M v$$

Sommando (2.1) e (2.2) si ottiene $v^T M v = 0$, $\forall v \in \mathbb{C}^m$, e quindi $M = 0$.

Teor. 1 Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ sia hermitiana è che sia reale il prodotto $v^T M v$ per ogni $v \in \mathbb{C}^m$.

prova. Se M è hermitiana, cioè se $M = M^T$, allora

$$\begin{aligned} (v^T M v)^T &= v^T M^T v = (v^T M v)^T = \\ &= v^T M^T v = v^T M v \end{aligned}$$

Poichè un numero complesso che coincide col suo coniugato è reale, $v^T M v$ è reale.

Viceversa; se $v^T M v$ è reale per ogni $v \in \mathbb{C}^m$, allora per ogni $v \in \mathbb{C}^m$ risulta:

$$\begin{aligned} 0 &= v^T M v - (v^T M v)^T = \\ &= v^T M v - v^T M^T v = \\ &= v^T M v - (v^T M^T v)^T = \\ &= v^T (M - M^T) v \end{aligned} \quad \forall v \in \mathbb{C}^m$$

Ma allora, per il lemma 1, $M = M^T$.

Def.2 Una matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ si dice antihermitiana se $M = -M^T$.

Teor.2 $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ è antihermitiana se e solo se per ogni $v \in \mathbb{C}^m$ $v^T M v$ risulta puramente immaginario

La prova è lasciata come esercizio.

Ogni matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ si decompone in modo unico nella somma di una matrice hermitiana M_H e di una matrice antihermitiana M_{AH} . Basta porre in fatti

$$M_H = (M + M^T) \frac{1}{2}; \quad M_{AH} = (M - M^T) \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

Si provi che effettivamente la decomposizione di M in parte hermitiana e in parte antihermitiana è unica.

Esercizio 1. Per ogni matrice $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ e per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$ si ha $\operatorname{Re}(v^T M v) = v^T M_H v$, $\operatorname{Im}(v^T M v) = v^T M_{AH} v$.

Esercizio 2. Gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali.

Def.3 Sia V uno spazio vettoriale sul corpo complesso. Una "forma hermitiana" su V è una applicazione

$$V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

che associa alla coppia ordinata (v, w) di elementi di V un numero complesso, che indicheremo con $(v|w)$

$$(v, w) \mapsto (v|w)$$

e che gode delle seguenti proprietà:

- $$\begin{aligned} (i) \quad & (v|w) = (w|v)^* \\ (ii) \quad & (u|v+w) = (u|v) + (u|w) \\ (iii) \quad & (\alpha u|v) = \alpha(u|v) \end{aligned} \quad (2.4)$$

qualunque siano u, v, w in V , α in $\mathbb{C}$.

Def.4. Due vettori $v, w \in V$ si dicono "ortogonali" (rispetto alla forma hermitiana considerata) se

$$(v|w) = 0$$

Un vettore ortogonale a sè stesso è detto "isotropo", ed un vettore ortogonale a tutto lo spazio V è detto "degenere". Se la forma hermitiana presenta vettori degeneri diversi da quello nullo, essa è detta "degenere".

Se V è spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$, e se $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ne è una base, una forma hermitiana è individuata dalla matrice dei prodotti $(e_i|e_j)$.

Infatti, se $v = \sum_i v_i e_i$, $w = \sum_j w_j e_j$, si ha

$$(v|w) = \left(\sum_i v_i e_i \middle| \sum_j w_j e_j \right) = \sum_{i,j} v_i \overline{w_j} (e_i|e_j)$$

Di conseguenza, rappresentando i vettori di V rispetto alla base presa scelta con matrici colonna di numeri complessi, si ha

$$(v|w) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \dots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \dots & (e_2|e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \dots & (e_n|e_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matrice $\|(e_i|e_j)\|$ è hermitiana, ed il prodotto è degenere se e solo se essa non ha rango completo.

Osservazione: si parla talvolta di forme hermitiane sopra spazi vettoriali. Esse si ottengono sostituendo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}$ nella definizione 3. E' ovvio che esse coincidono con i prodotti interni sugli spazi vettoriali reali e le matrici che le caratterizzano sono matrici reali simmetriche.

Si estendono alle forme hermitiane le nozioni di spazio ortogonale ad un sottospazio di V e la nozione di trasformazione aggiunta.

Esercizio 3. Per ogni vettore $x \in V$, $(x|x)$ è un numero reale.

Def.5 Sia $(\cdot|\cdot)$ una forma hermitiana su V . $(\cdot|\cdot)$ si dice definita positiva se

- $$\begin{aligned} (i) \quad & (x|x) > 0 \quad \forall x \in V \\ (ii) \quad & (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Si vale solo (i), $(\cdot|\cdot)$ si dice semidefinita positiva.

Le matrici hermitiane associate a forme hermitiane (semi)definite positive su spazi di dimensione finita sono dette (semi)definite positive.

Abbiamo così la seguente definizione:

Def.6 Una matrice hermitiana $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ è semidefinita positiva se $v^T M v \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{C}^m$.

Se l'uguaglianza vale solo per $w=0$, M si dice definita positiva.

Le matrici hermitiane contenute in $\mathbb{C}^{m \times m}$ sono un sottospazio su $\mathbb{C}$ dello spazio $\mathbb{C}^{m \times m}$. Su tale sottospazio si può introdurre una relazione di ordine parziale $\geq$ ponendo

$$M \geq N \quad (M, N \text{ hermitiane}) \quad (2.6)$$

se e solo se $M - N$ è semidefinita positiva.

Esercizio 4. Una matrice hermitiana è semidefinita positiva se e solo se i suoi autovalori sono non negativi

Un test comunemente usato per stabilire se una matrice hermitiana è semidefinita positiva è il seguente:

Teor.3 Una matrice hermitiana M è semidefinita positiva se e solo se ogni suo minore principale è non negativo.

Per la prova si veda, p. es. Cantmacher [G.1].

Proponiamo per concludere il seguente esercizio, che evidenzia quale ruolo essenziale giochi l'operazione di passaggio al coniugato nella teoria che abbiamo accennato.

Esercizio 5. Sia $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\mathbb{R}$ corpo qualsiasi con caratteristica > 2

1) M è antisimmetrica se e solo se per ogni $v \in \mathbb{R}^m$

$$v^T M v = 0$$

2) Se M è simmetrica, M non è nulla se e solo se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ tale da aversi

$$v^T M v \neq 0$$

3. Matrici limitate reali

Nei paragrafi 3-6 esporremo alcune proprietà di due classi di matrici particolarmente utili nello studio dei sistemi lineari passivi: le matrici limitate reali (bounded real matrices) e le matrici positive reali (positive real matrices). Come vedremo, le matrici positive reali caratterizzano alle $\mathcal{L}$ -trasformate il legame ingresso uscita dei sistemi lineari passivi e le matrici limitate reali caratterizzano, nei medesimi sistemi, il legame fra le grandezze di diffusione.

Def.1 Una matrice $m \times m$ $S(s)$ di funzioni razionali a coefficienti reali nella variabile complessa s è detta "limitata reale" (B.R.) se

(i) tutti i suoi elementi sono analitici per $\operatorname{Re} s > 0$

(ii) per $\operatorname{Re} s > 0$, $I_m - S^T(s)S(s)$ è (hermitiana) semidefinita positiva, cioè risulta $v^T (I_m - S^T(s)S(s)) v \geq 0$ per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$.

La condizione (ii) in certi casi potrebbe dar luogo ad apparenti difficoltà a cagione della sua dissimmetria. Il teorema seguente mostra che la dissimmetria non è intrinseca alla definizione di matrice B.R.

Teor.1 La matrice hermitiana $I_m - S^T S$ è semidefinita positiva se e solo se $I_m - S S^T$ è semidefinita positiva.

Prova. Useremo un risultato di teoria delle matrici che è dimostrato p. es. in [G.1]: se le matrici quadrate M ed N , a valori complessi, hanno eguale dimensione, allora MN ed NM hanno i medesimi autovalori. Applicando questo risultato, gli autovalori di $S S^T$ e di $S^T S$ coincidono. Quindi coincidono gli autovalori di $I_m - S^T S$ e quelli di $I_m - S S^T$, e basta applicare l'esercizio 4 del paragrafo precedente per concludere

La condizione (ii) di def. 1 può essere allora sostituita dalla

(ii') per $\operatorname{Re} s > 0$, $I_m - S(s)S^T(s)$ è semidefinita positiva.

Esercizio 1. Se $S_1(s)$ ed $S_2(s)$ sono matrici limitate reali di dimensioni $m \times m$, anche il prodotto $S_1(s)S_2(s)$ è una matrice limitata reale. Non è invece necessariamente vero che sia B.R. la somma $S_1(s) + S_2(s)$.

Il seguente teorema dimostra che, quando $S(s)$ è B.R., la sua analiticità si estende all'asse immaginario e che quando è noto che $S(s)$ è a

nalitica per $\text{Re } s > 0$, la verifica che $S(s)$ è B.R. si riduce ad un test relativo al solo asse immaginario.

Teor. 2 $S(s)$ è limitata reale se e solo se i suoi elementi sono funzionali razionali a coefficienti reali e

(i) tutti i suoi elementi sono analitici per $\text{Re } s > 0$

(ii) $\mathbb{V}_m - S^T(j\omega)S(j\omega)$ è hermitiana semidefinita positiva per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

prova. Supponiamo che $S(s)$ soddisfi le condizioni (i) e (ii) di def. 1 e proviamo dapprima che $S(s)$ è costituita da funzioni analitiche sull'asse immaginario. Infatti il termine diagonale di posto (i,i) in

$$\mathbb{V}_m - S^T(s)S(s)$$

è reale e non negativo per $\text{Re } s > 0$: reale perchè la diagonale di $S^T(s)S(s)$ è tutta costituita da elementi reali, e non negativo perchè deve essere non negativo il prodotto

$$\mathbb{V}_m^T (\mathbb{V}_m - S^T(s)S(s)) \mathbb{V}$$

quando $\mathbb{V}$ è il vettore $\begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0 \end{bmatrix}^T$.

Questo implica che per $\text{Re } s > 0$ risulti

$$1 - \sum_{j=1}^m |s_j(s)|^2 \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

e che quindi $|s_j(s)|$ non superi il valore 1 quando s varia nel semipiano $\text{Re } s > 0$. Allora $s_j(s)$ non può avere poli sull'asse immaginario, perchè nell'intorno di un polo il modulo della funzione diverge.

Inoltre poichè $S(s)$ è analitica per $s = j\omega$, si ha

$$S(j\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} S(\sigma + j\omega)$$

e quindi

$$0 \leq \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \mathbb{V}_m^T (\mathbb{V}_m - S^T(\sigma + j\omega)S(\sigma + j\omega)) \mathbb{V} = \mathbb{V}^T (\mathbb{V}_m - S^T(j\omega)S(j\omega)) \mathbb{V}$$

che prova la parte (ii) del teorema.

Viceversa se valgono le ipotesi (i) e (ii) del teorema, la funzione $S(s)$ è una funzione analitica a valori vettoriali in tutto il semipiano $\text{Re } s > 0$.

Per il teorema del massimo modulo riportato in par. 1, in qualunque dominio limitato $D \subseteq \text{Re } s > 0$ $\mathbb{V}_m^T S^T(s)S(s) \mathbb{V}$ taggiunge il valor massimo sulla frontiera di D . E' facile verificare su una sequenza di domini che invade il semipiano $\text{Re } s > 0$ che $\mathbb{V}_m^T S^T(s)S(s) \mathbb{V}$ raggiunge l'estremo superiore sull'asse immaginario e che pertanto per ogni s con parte reale positiva

$$\mathbb{V}_m^T (\mathbb{V}_m - S^T(s)S(s)) \mathbb{V} = \mathbb{V}_m^T \mathbb{V} - \mathbb{V}_m^T S^T(s)S(s) \mathbb{V} > \mathbb{V}_m^T \mathbb{V} - \sup_{\omega} \mathbb{V}_m^T S^T(j\omega)S(j\omega) \mathbb{V} > 0$$

In conclusione, per stabilire se $S(s)$ è B.R. è sufficiente verificare (i) che i suoi poli sono tutti con parte reale negativa, (ii) che sull'asse immaginario $\mathbb{V}_m - S^T(j\omega)S(j\omega)$ è (hermitiana) semidefinita positiva.

Esempio 1. La matrice

$$S(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ s-1 & 0 \\ s+1 & 0 \end{bmatrix}$$

è B.R. perchè è priva di poli per $\text{Re } s > 0$, ed inoltre

$$\mathbb{V}_m^T (\mathbb{V}_m - S^T(j\omega)S(j\omega)) \mathbb{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{-j\omega-1}{-j\omega+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{j\omega-1}{j\omega+1} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Esercizio 2. Si verifichi che

$$S(s) = \frac{1}{4s+5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4s-1 \end{bmatrix}$$

è B.R.

Esercizio 3. Si determini se la seguente funzione è B.R.:

$$S(s) = \frac{s^2 + 4s - 1}{2s^3 + 5s^2 + 6s + 3}$$

4. Matrici positive reali

Def.1 Una matrice $W(s)$ di funzioni razionali a coefficienti reali nella variabile complessa s è detta "positiva reale" (P.R.) se:

- (i) tutti i suoi elementi sono analitici per $\text{Re } s > 0$
- (ii) per $\text{Re } s > 0$ $\dot{W}^T(s) + W(s)$ è (hermitiana) semidefinita positiva, cioè $\dot{W}^T(s) + W(s) \geq 0$ per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$.

Esempio 1: $W(s) = 1/s$ è P.R. Infatti $W(s)$ è analitica per $\text{Re } s > 0$

$$W^T(s) + W(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{2\text{Re } s}{|s|^2} > 0 \quad \text{per } \text{Re } s > 0$$

Esercizio 1. La condizione (ii) di Def.1 equivale ad ammettere che per ogni $v \in \mathbb{C}^m$ e per ogni s con $\text{Re } s > 0$ risulti $\text{Re } (\dot{W}^T(s)v) \geq 0$.

Esercizio 2: Se $W_1(s), W_2(s)$ sono matrici P.R. di dimensione $m \times m$, $W_1(s) + W_2(s)$ è P.R.

Esercizio 3. Se $W(s)$ è P.R., $W^T(s)$ è P.R.

Esercizio 4. Se $W(s)$ è $m \times m$ e P.R., e se $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, allora $M^T W(s) M$ è $n \times n$ ed è P.R. [sugg.: $\dot{W}^T M^T W(s) M v = (Mv)^T W(s) (Mv)$: si applichi l'esercizio 1].

Il seguente teorema è fondamentale, in quanto fornisce un test per stabilire in modo relativamente semplice se una matrice è P.R.

Teor.1 Sia $W(s)$ una matrice $m \times m$ di funzioni razionali a coefficienti reali. $W(s)$ è P.R. se e solo se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- (i) $W(s)$ non ha poli per $\text{Re } s > 0$
- (ii) I poli sull'asse immaginario e all'infinito quando esistono sono semplici e il residuo è una matrice hermitiana semidefinita positiva.
- (iii) $\dot{W}^T(j\omega) + W(j\omega)$ è semidefinita positiva per ogni ω reale tale che $j\omega$ non sia polo di $W(s)$.

prova. Si suppongano valere le ipotesi (i), (ii), (iii). $W(s)$ è analitica nel semipiano $\text{Re } s > 0$: ci resta da provare che $\dot{W}^T(s) + W(s)$ è semidefinita positiva per $\text{Re } s > 0$, ossia che (cfr. Es. 1) $\text{Re}(\dot{W}^T(s)v) \geq 0$ per $\text{Re } s > 0$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^m$.

Si consideri un percorso che descriva l'asse immaginario per

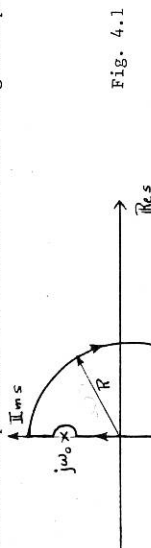


Fig. 4.1

valori di ω crescenti, aggirando a destra gli eventuali poli di $\dot{W}^T W(s)v$ con semicerchi di raggio arbitrariamente piccolo. Poiché i poli di $\dot{W}^T W(s)v$ sono compresi fra i poli di $W(s)$ e la loro molteplicità non supera quella dei poli corrispondenti di $W(s)$, sul semicerchio relativo al polo $j\omega_0$ di $\dot{W}^T W(s)v$ si ha

$$\dot{W}^T W(s)v \approx \frac{\dot{W}^T K v}{s - j\omega_0} \quad (4.1)$$

trascurando gli altri termini dello sviluppo in serie rispetto alla parte principale. (K è il residuo di $W(s)$ in $j\omega_0$).

Ma sul semicerchio di aggiramento del polo $j\omega_0$ risulta $s - j\omega_0 = \rho e^{j\theta}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$, e $\dot{W}^T K v > 0$ perché K è semidefinita positiva: quindi

$$\text{Re}(\dot{W}^T W(s)v) \approx (\dot{W}^T K v) \rho^{-1} \text{Re } e^{-j\theta} \geq 0$$

Inoltre, se per $s \rightarrow \infty$ $\dot{W}^T W(s)v$ ha un polo, per valori grandi di $|s|$ si ha:

$$\dot{W}^T W(s)v \approx s(\dot{W}^T K_\infty v) \quad (4.2)$$

dove con K_∞ si è indicato il residuo di $W(s)$ per $s \rightarrow \infty$ e dove si sono trascurati gli altri termini dello sviluppo nell'intorno del punto all'infinito. Allora, per $s \rightarrow \infty$

$$\operatorname{Re} \sqrt{v}^T W(s) v \approx \operatorname{Re} s \cdot (\sqrt{v}^T K_\infty v)$$

che ha lo stesso segno di $\operatorname{Re} s$.

Si conclude che sul contorno γ di fig. 4.1, pur di scegliere abbastanza piccoli i semicerchi di aggiramento e abbastanza grande il raggio R del cerchio di chiusura, risulta

$$\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v) \geq 0 \quad (4.3)$$

Per quanto visto nel par.1, il massimo e il minimo di $\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v)$ sono raggiunti sul contorno γ , essendo la funzione $\sqrt{v}^T W(s) v$ analitica all'interno di γ .

Poichè (4.3) è valida per ogni s tale che $\operatorname{Re} s > 0$ e per ogni $v \in \mathbb{C}^m$, si conclude che $W(s)$ è P.R.

Per provare che le condizioni (i) (ii) (iii) sono necessarie ad assicurare che $W(s)$ sia P.R., si supponga che $W(s)$ abbia un polo di ordine m per $s = j\omega_0$.

Nell'intorno del polo, $W(s)$ è approssimata, a meno di infiniti di ordine inferiore, da

$$W(s) \approx \frac{K}{(s - j\omega_0)^m} \quad (4.4)$$

e poichè K non è la matrice nulla, esiste un vettore $v \in \mathbb{C}^m$ tale che $\sqrt{v}^T K v \neq 0$ (cfr. lemma 1 di par. 2).

Quando $\operatorname{Re} s > 0$, $s - j\omega_0$ è esprimibile come $\rho e^{j\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, e si ha pertanto, nell'intorno di $s = j\omega_0$:

$$0 \leq \operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v) = \operatorname{Re} (\sqrt{v}^T K v \rho^{-m} e^{-jm\theta}) \quad (4.5)$$

E' chiaro che m deve valere 1: altrimenti $\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v)$ può assumere anche valori negativi perchè $m\theta$ può assumere tutti i valori angolari dell'angolo giro, e posto $(\sqrt{v}^T K v \rho^{-1}) = a + jb$

$$\operatorname{Re} \sqrt{v}^T W(s) v = a \cos m\theta + b \sin m\theta \quad (4.6)$$

è negativo per quei θ per cui a ha segno opposto a quello di $\cos m\theta$ e b ha segno opposto a quello di $\sin m\theta$.

La (4.5) vale poi, per continuità, anche quando $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, e questo implica che risultati contemporaneamente $b \geq 0$ e $-b \geq 0$: quindi b è nullo. Risultando $\sqrt{v}^T K v$ reale e non negativo per ogni $v \in \mathbb{C}^m$, K è hermitiana semidefinita positiva. Ragionamenti analoghi consentono di verificare che, se $W(s)$ ha all'infinito un polo, esso è semplice, ed il suo residuo è una matrice hermitiana semidefinita positiva.

Infine la condizione (iii) si ottiene passando al limite per $\sigma \rightarrow 0^+$ sulla relazione

$$\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(\sigma + j\omega) v) \geq 0 \quad \text{per } \sigma > 0$$

Quando $W(s)$ è scalare, la def.1 dà l'usuale definizione di funzione positiva reale: infatti

Teor.2 La funzione razionale a coefficienti reali $W(s)$ è P.R. sse

- (i) è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$
- (ii) per $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} W(s) \geq 0$

prova. Se valgono le ipotesi (i) e (ii) dell'enunciato, risulta, per ogni $v \in \mathbb{C}$ e per $\operatorname{Re} s > 0$

$$\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v) = \operatorname{Re} (W(s) \sqrt{v}^T v) = (\operatorname{Re} W(s)) |\sqrt{v}|^2 \geq 0 \quad (4.7)$$

e per l'esercizio 1 $W(s)$ è allora P.R. Se viceversa $W(s)$ è P.R., l'esercizio 1 assicura che $\operatorname{Re} (\sqrt{v}^T W(s) v)$ è sempre non negativo, e quindi è non negativo $(\operatorname{Re} W(s)) |\sqrt{v}|^2$ per ogni s con parte reale positiva. Donde facilmente la conclusione ■

Coroll.1 Una funzione razionale a coefficienti reali $W(s)$ è positiva reale se e solo se:

- (i) i suoi poli hanno parte reale non positiva
- (ii) i poli immaginari e all'infinito sono semplici con residuo reale e positivo
- (iii) $\operatorname{Re} W(j\omega) \geq 0$ quando $j\omega$ non è polo di $W(s)$.

prova. La condizione (ii) di teor.1 implica che il residuo k in un polo immaginario verifichi, per ogni $v \in \mathbb{C}$, la

$$\mathbf{v}^T \mathbf{k} \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \quad k > 0$$

Quindi k è un numero reale positivo.

La condizione (iii) di teor.1 diventa, nel caso scalare, per $\mathbf{v} \in \mathbb{C}$:

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{W}(\mathbf{j}\omega) + \mathbf{W}(\mathbf{j}\omega)) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T 2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(\mathbf{j}\omega) \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(\mathbf{j}\omega) \geq 0$$

Quindi $\operatorname{Re} \mathbf{W}(\mathbf{j}\omega)$ è non negativo. ■

Il corollario 1 giustifica l'applicazione dei test di Hurwitz e di Sturm, noti dal corso di Controlli Automatici, per verificare se una funzione di trasferimento scalare è P.R.

Il teor. 3 ha notevole importanza nella sintesi, come vedremo quando affronteremo lo studio delle reti passive.

Premettiamo un lemma, che sarà applicato anche nei paragrafi seguenti.

Lemma 1 Se $\mathbf{W}(s)$ è una matrice $m \times m$ P.R. e se nel punto s_0 , con $\operatorname{Re} s_0 > 0$, risulta

$$\operatorname{rank} \mathbf{W}(s_0) = m' < m,$$

esiste una matrice invertibile costante $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ per cui risulta

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \quad (4.8)$$

$m' \qquad m-m'$

prova. Non è restrittivo supporre che in $\mathbf{W}(s_0)$ le ultime $m-m'$ colonne dipendano linearmente dalle prime m' (se così non fosse, basta riordinare le colonne - e, in modo simmetrico, le righe - sì da ridursi ad avere le prime m' colonne indipendenti).

Posto allora

$$\mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(s) & \mathbf{W}_{12}(s) \\ \mathbf{W}_{21}(s) & \mathbf{W}_{22}(s) \end{bmatrix}$$

esiste una matrice costante (complessa) $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m' \times (m-m')}$ per cui risulta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{12}(s_0) \\ \mathbf{W}_{22}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(s_0) \\ \mathbf{W}_{21}(s_0) \end{bmatrix} \mathbf{H}$$

e la matrice $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{I}_{m-m'} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

soddisfa la relazione $\mathbf{W}(s_0) \mathbf{G} = \mathbf{0}$.

Si introduca la matrice complessa invertibile τ

$$\tau = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m'} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{m-m'} \end{bmatrix}$$

e si definisca

$$\bar{\mathbf{W}}(s) \triangleq \tau^T \mathbf{W}(s) \tau = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(s) & \mathbf{W}_{12}(s) \\ \mathbf{W}_{21}(s) & \mathbf{W}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$\mathbf{E}'$ immediato osservare che

- 1) $\bar{\mathbf{W}}(s)$ è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$
- 2) gli eventuali suoi poli immaginari sono semplici, con residuo hermitiano semidefinito positivo.
- 3) per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{m-m'}$ e per $\operatorname{Re} s > 0$ risulta $\operatorname{Re}(\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v}) \geq 0$.

Vogliamo provare, usando questi fatti, che $\bar{\mathbf{W}}_{12}(s) = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{W}}_{21}(s) = \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{W}}_{22}(s) = \mathbf{0}$.

Poichè la funzione $\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v}$ è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$, e poichè $\bar{\mathbf{W}}_{22}(s_0) = \mathbf{G}^T \mathbf{W}(s_0) \mathbf{G} = \mathbf{0}$, la funzione $\operatorname{Re}(\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v})$ assume per $\operatorname{Re} s > 0$ il valore minimo nel punto s_0 . Ciò è possibile solo se $\operatorname{Re}(\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v})$ è nulla in tutto il semipiano $\operatorname{Re} s > 0$ (esercizi!). Sempre per l'analiticità di $\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v}$, $\operatorname{Im}(\mathbf{v}^T \bar{\mathbf{W}}_{22}(s) \mathbf{v})$ è costante in $\operatorname{Re} s > 0$, e quindi nulla (annullandosi in s_0).

Si conclude che per ogni $v \in \mathbb{C}^{m-m'}$ e per $\operatorname{Re} s > 0$

$$v^T \bar{W}_{22}(s) v = 0$$

che implica $\bar{W}_{22}(s) = 0$ per il lemma 1 di VI.2.

Se $\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^{m \times 1}$, è ovvio che risulta per $\operatorname{Re} s > 0$

$$\operatorname{Re} \left(\begin{bmatrix} v_1^T & v_2^T \end{bmatrix} \bar{W}(s) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right) \geq 0 \quad (4.11)$$

ossia anche

$$v_1^T (\bar{W}_{11}^T + \bar{W}_{11}) v_1 + v_2^T (\bar{W}_{21}^T + \bar{W}_{21}) v_1 + v_1^T (\bar{W}_{12}^T + \bar{W}_{12}) v_2 + v_2^T (\bar{W}_{22}^T + \bar{W}_{22}) v_2 \geq 0$$

Fissato v_1 , per ogni v_2 e per $\operatorname{Re} s > 0$ è

$$2 \operatorname{Re} (v_2^T (\bar{W}_{21}(s) + \bar{W}_{21}^T) v_1) + v_1^T (\bar{W}_{11}^T + \bar{W}_{11}) v_1 \geq 0$$

Ciò è possibile soltanto se per $\operatorname{Re} s > 0$ risulta

$$(\bar{W}_{21}(s) + \bar{W}_{21}^T(s)) v_1 = 0 \quad (4.12)$$

e poichè (4.12) deve valere per ogni v_1 , si perviene alla

$$\bar{W}_{21}(s) = -\bar{W}_{21}^T(s), \quad (4.13)$$

valida per $\operatorname{Re} s > 0$, e, per continuità, per $\operatorname{Re} s \geq 0$. Restrignendo

$$\begin{aligned} \bar{W}_{21}(s) &= W_{11}(s)H - W_{12}(s) \\ \bar{W}_{12}(s) &= H^T W_{11}(s) - W_{21}(s) \end{aligned} \quad (4.14)$$

all'asse immaginario e tenendo presente (4.13), si ha

$$\bar{W}_{21}(j\omega) = W_{11}(j\omega)H - W_{12}(j\omega) = -W_{11}^T(-j\omega)H + W_{21}^T(-j\omega) = -\bar{W}_{21}^T(-j\omega)$$

Per continuazione analitica, la funzione $\bar{W}_{21}(s) + \bar{W}_{21}^T(-s)$ è nulla

$$\bar{W}_{21}(s) = -\bar{W}_{21}^T(-s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (4.15)$$

cosicchè gli eventuali poli di $\bar{W}_{21}(s)$ sono immaginari e semplici. Lo stesso vale, ovviamente, per i poli di $\bar{W}_{12}(s)$.

Se $j\omega$ è un polo immaginario per la matrice $\bar{W}(s)$, e se A_{11} , A_{12} e A_{21} sono i residui in $j\omega$ di $\bar{W}_{11}$, $\bar{W}_{12}$, $\bar{W}_{21}$ rispettivamente, la matrice

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

è hermitiana, e quindi $A_{12} = A_{21}^T$. Ma per (4.13) è anche $A_{12} = -A_{21}^T$, cosicchè $A_{12} = 0 = A_{21}^T$.

Si conclude che $\bar{W}_{12}(s)$ e $\bar{W}_{21}(s)$ sono costanti nel piano di Gauss: per (4.9) e (4.14) sono nulle in s_0 , e quindi nulle ovunque.

La matrice T di (4.8) è allora τ^{-1} . ■

Teor. 3 Se $W(s)$ è P.R. e se è invertibile sul corpo delle funzioni razionali $\mathbb{R}(s)$, allora $W^{-1}(s)$ è P.R.

prova. Se $W^{-1}(s)$ esiste, ha al più un numero finito di poli per $\operatorname{Re} s > 0$ (corrispondenti ad eventuali zeri del determinante di $W(s)$ che appartengono a $\operatorname{Re} s > 0$).

Con riferimento ad ogni punto di $\operatorname{Re} s > 0$ in cui esiste $W^{-1}(s)$ si ha

$$\operatorname{Re} (v^T W^{-1}(s) v) = \operatorname{Re} z^T W^{-1}(s) W(s) z = \operatorname{Re} z^T W^T(s) z \quad (4.16)$$

dove si è indicato con z il vettore che soddisfa l'equazione

$$W(s)z = v$$

Ricordando che $\operatorname{Re} z^T W^T(s) z = \operatorname{Re} z^T W(s) z$, si ha per ogni vettore v e per $\operatorname{Re} s > 0$

$$\operatorname{Re} (v^T W^{-1}(s) v) \geq 0 \quad (4.17)$$

La prova della regolarità di $W^{-1}(s)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ è una conseguenza

diretta del lemma: infatti se in qualche punto s_0 , con $\operatorname{Re} s > 0$, è $\det W(s_0) = 0$, risulta vera la (4.8) su tutto il piano di Gauss e quindi $W(s)$ non ha rango pieno e non è invertibile. ■

Coroll. 2 Una funzione razionale $W(s)$ P.R. è priva di zeri nel semipiano $\operatorname{Re} s > 0$.

prova. Infatti la sua inversa W^{-1} è P.R. per il teor. 3, ed i poli di W^{-1} sono gli zeri di W . ■

Esercizio 5. Le matrici residue negli (eventuali) poli all'infinito e nello zero di una matrice $W(s)$ P.R. sono matrici reali simmetriche semidefinite positive.

Esercizio 6. Se $j\omega_i$ è un polo con residuo K_i di $W(s)$ P.R., allora anche $-j\omega_i$ è un polo, e il residuo relativo è K_i .

Esercizio 7. Se D_0 è la matrice costante nello sviluppo in frazioni parziali di $W(s)$ P.R., allora la parte simmetrica di D_0 è semidefinita positiva. Suggerimento: si supponga dapprima $W(\infty) \neq \infty$.

Esercizio 8. Se $W(s)$ è P.R., sono P.R. le sue componenti diagonali.

5. Relazioni fra matrici P.R. e matrici B.R.

E' utile per molte applicazioni conoscere i legami che intercorrono fra le matrici P.R. e le matrici B.R. Premettiamo il seguente:

Lemma 1 Se $W(s)$ è P.R., $W + W(s)$ è invertibile su $R(s)$.

prova. Se $W + W(s)$ non fosse invertibile su $R(s)$, esisterebbero punti in $\operatorname{Re} s > 0$ in cui $W + W(s)$ non ha rango pieno. Detto s_0 uno di tali punti, esiste $v \neq 0$ tale che

$$v^T W(s_0) v + v^T v = 0$$

Poiché d'altra parte è $v^T W(s_0) v \geq 0$, essendo $W(s)$ P.R., si ha l'assurdo $v^T v \leq 0$. ■

Teor. 1 Se $W(s)$ è P.R., la matrice $S(s)$ definita da

$$S(s) = (W - W(s))(W + W(s))^{-1} \quad (5.1)$$

è B.R.

prova. Per il lemma 1, $W + W(s)$ è invertibile, ed è d'altra parte evidente che $W + W(s)$ è anche P.R.

Per il teor. 3 di par. 4, la matrice inversa $(W + W(s))^{-1}$ è ancora P.R.

Quindi $S(s)$ esiste, ed è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$. Inoltre, per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^m$ si ha

$$v^T (W - W(s)) v = v^T (W - (W^T + W)^{-1} (W - W^T) (W + W)^{-1}) v$$

Posto allora $w = (W + W)^{-1} v$ (*)

$$\begin{aligned} v^T (W - W(s)) v &= w^T (W - W^T) (W + W) w - w^T (W - W^T) (1 - W) w = \\ &= w^T (W + W + W^T + W^T) w + w^T (W - W^T) w = \\ &= 2 w^T (W + W) w \geq 0 \end{aligned}$$

essendo $W(s)$ P.R. ■

Teor. 2 Se la matrice $S(s)$, di dimensioni $m \times m$, è B.R. e se

$(W_m + S(s))$ è invertibile sul corpo $R(s)$, allora è positiva reale la matrice

$$W(s) = [W_m + S(s)]^{-1} [W_m - S(s)] \quad (5.2)$$

prova. Spezziamo la prova in 2 parti.

(i) $W(s)$ è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$.

Infatti $W(s)$ può avere dei poli per $\operatorname{Re} s > 0$ solo se $(W + S)^{-1}$ oppure $(W - S)$ hanno dei poli per $\operatorname{Re} s > 0$.

Poiché S è B.R. e quindi $(W - S)$ non hanno singolarità per $\operatorname{Re} s > 0$. Quanto all'analiticità di $(W + S)^{-1}$, per il teor. 3 di par. 4 sarà sufficiente far vedere che $(W + S(s))$ è positiva reale. Ora, è ovvio che $(W + S(s))$ è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$, e per mostrare che risulta $\operatorname{Re}(v^T (W + S) v) \geq 0 \forall v$ basta porre $S(s) = C(s) - W$ e con

(*) Per un assegnato vettore v , w dipende dal punto s .

siderare la catena di relazioni

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{v}^T (\mathbf{I} - (\mathbf{C} - \mathbf{I})^T (\mathbf{C} - \mathbf{I})) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T (2\mathbf{C}_H^T - \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \mathbf{v} \leq \\ &\leq 2\mathbf{v}^T (\mathbf{I} + \mathbf{S})_H \mathbf{v} = 2 \operatorname{Re}(\mathbf{v}^T (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \mathbf{v}) \end{aligned}$$

(ii) $\mathbf{W}(s) + \mathbf{W}^T(s)$ è (hermitiana) semidefinita positiva per $\operatorname{Re} s > 0$.

Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T (\mathbf{W}(s) + \mathbf{W}^T(s)) \mathbf{v} &= [\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(s)] [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \mathbf{S}(s)]^{-1} \mathbf{v} = \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)]^{-1} \{ [\mathbf{I} - \mathbf{S}(s)] [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(s)] \} [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v} = \\ &= 2 [\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)]^{-1} \{ [\mathbf{I} - \mathbf{S}(s)] \mathbf{S}^T(s) \} [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v} \end{aligned}$$

e per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{W}(s) + \mathbf{W}^T(s)) \mathbf{v} = 2 \{ [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v}^T [\mathbf{I} - \mathbf{S}(s)] \mathbf{S}^T(s) \} \{ [\mathbf{I} + \mathbf{S}^T(s)]^{-1} \mathbf{v} \}$$

che è non negativo perchè $\mathbf{S}(s)$ è B.R.

Coroll. 1. Se le matrici $\mathbf{S}(s)$ e $\mathbf{W}(s)$ sono legate dalla relazione

$$\mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)) (\mathbf{I} + \mathbf{W}(s))^{-1} \quad (5.1)$$

allora $\mathbf{S}(s)$ è B.R. se e solo se $\mathbf{W}(s)$ è P.R.

Prova. $\mathbf{W}(s) \text{PR} \Rightarrow \mathbf{S}(s) \text{BR}$ è il contenuto del teor. 1.

Peraltro se vale (5.1) vale anche (5.2). Infatti si ha

$$\mathbf{S}(s) (\mathbf{I} + \mathbf{W}(s)) = \mathbf{I} - \mathbf{W}(s)$$

e quindi

$$\mathbf{I} - \mathbf{S}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)) \mathbf{W}(s)$$

e per concludere basta mostrare che $\mathbf{I} + \mathbf{S}(s)$ è invertibile

Ciò deriva dalla catena di uguaglianze

$$\mathbf{I} + \mathbf{S}(s) = \mathbf{I} + (\mathbf{I} - \mathbf{W}(s)) (\mathbf{I} + \mathbf{W}(s))^{-1} =$$

$$= [\mathbf{I} + \mathbf{W}(s) + \mathbf{I} - \mathbf{W}(s)] [\mathbf{I} + \mathbf{W}(s)]^{-1} = 2 [\mathbf{I} + \mathbf{W}(s)]^{-1}$$

$\mathbf{S}(s) \text{BR} \Rightarrow \mathbf{W}(s) \text{PR}$ è ora il contenuto del teor. 2.

Esercizio 1. Si provi che

$$(\mathbf{I} + \mathbf{W})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{W}) = (\mathbf{I} - \mathbf{W}) (\mathbf{I} + \mathbf{W})^{-1}$$

[Sugg.: si osservi che $(\mathbf{I} + \mathbf{W})$ ed $(\mathbf{I} - \mathbf{W})$ commutano].

6. Matrici B.R. e P.R. senza perdite

Introduciamo qui due sottoclassi delle classi delle matrici B.R. e P.R., che applicheremo allo studio dei sistemi lineari dissipativi senza perdite.

Def. 1. Una matrice $\mathbf{S}(s)$ è detta limitata reale senza perdite (LBR) se: lossless bounded real se:

(i) è limitata reale

(ii) $\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(j\omega) \mathbf{S}(j\omega)$ è nullo per ogni ω reale.

Il teor. 1 fornisce condizioni equivalenti alla def. 1.

Teor. 1. La matrice quadrata $\mathbf{S}(s)$ di funzioni razionali a coefficienti reali è LBR se e solo se

a) è analitica per $\operatorname{Re} s \geq 0$

b) $\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(-s) \mathbf{S}(s) = 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ (6.1)

prova. Se valgono a) e b), $\mathbf{S}$ è LBR perchè $\mathbf{S}^T(j\omega) = \mathbf{S}^T(-j\omega)$ (le funzioni razionali hanno coefficienti reali).

Viceversa, se vale la def. 1, su tutto l'asse immaginario è soddisfatta b), risultando $\mathbf{I} - \mathbf{S}^T(j\omega) \mathbf{S}(j\omega) = \mathbf{I} - \mathbf{S}^T(-j\omega) \mathbf{S}(j\omega) = 0$. Una funzione razionale nulla sull'asse immaginario è nulla su tutto il piano complesso, e quindi sussiste b). ■

Def.2 Una matrice $W(s)$ è detta P.R. senza perdite (L.P.R. = lossless positive real) se

(i) è positiva reale

(ii) $W^T(j\omega) + W(j\omega) = 0$ per ogni ω reale tale che $j\omega$ non sia polo di $W(s)$.

Teor.2 Una matrice quadrata $W(s)$ di funzioni razionali a coefficienti reali è L.P.R. se e solo se

(a) i poli di $W(s)$ sono immaginari e semplici (*) e i residui nei poli sono matrici hermitiane semidefinite positive.

(b) $W^T(-s) + W(s) = 0$ (6.2)

prova. Se $W(s)$ è L.P.R., risulta $W^T(j\omega) = -W(j\omega)$ e quindi $W^T(-j\omega) = W(j\omega)$. Allora $W^T(-s) = W(s)$ perchè due matrici di funzioni razionali coincidenti sull'asse immaginario coincidono ovunque. Inoltre, se s_0 è polo di $W(s)$, $-s_0$ è polo di $W(-s)$, di $W^T(-s)$ e pertanto di $W(s)$: così i poli sono tutti immaginari, perchè $W(s)$ è analitica per $\text{Re } s > 0$.

Viceversa, se valgono (a) e (b) sono soddisfatte le condizioni del teor.1, par.4, e quelle della def.2: quindi $W(s)$ è L.P.R. ■

Esercizio 1. Se $W(s)$ è LPR ed è invertibile, $W^{-1}(s)$ è LPR. Suggerimento: si consideri il prodotto $W(s) [W^{-1}(s) + W^{-1}(-s)] W(-s)$.

Teor.3 Nelle ipotesi del Coroll.1 di par.5, $S(s)$ è L.B.R. sse $W(s)$ è L.P.R.

prova. Basterà provare che

$$(W - S^T(j\omega)S(j\omega)) = 0 \Leftrightarrow W^T(j\omega) + W(j\omega) = 0$$

Poichè risulta

$$W(s) = (W + S(s))^{-1} (W - S(s))$$

(*) Il polo all'infinito è considerato polo immaginario.

con facili manipolazioni si ottiene

$$\begin{aligned} W^T(j\omega) + W(j\omega) &= \\ &= [I - S^T(j\omega)] [I + S^T(j\omega)]^{-1} + [I + S(j\omega)]^{-1} [I - S(j\omega)] = \\ &= [I + S(j\omega)]^{-1} \{ [I - S(j\omega)] [I + S^T(j\omega)] + [I + S(j\omega)] [I - S^T(j\omega)] \} [I + S^T(j\omega)]^{-1} \\ &= 2 [I + S(j\omega)]^{-1} \{ I - S(j\omega) S^T(j\omega) \} [I + S^T(j\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

La (6.3), considerata come funzione di ω , è definita quasi ovunque per ω reale (perchè $I + S(s)$ è singolare soltanto in un numero finito di punti). Quindi l'annullarsi di $I - S^T(j\omega)S(j\omega)$ è sufficiente ad assicurare q.o. l'annullarsi di $W^T(j\omega) + W(j\omega)$ e viceversa. ■

Concludiamo questo paragrafo con l'analisi dello sviluppo in frazioni parziali di una matrice $W(s)$ L.P.R.

Per il teor.2, e per gli esercizi 5,6,7 di par. 4 possiamo affermare che

- tutti i poli sono immaginari, semplici, con residuo hermitiano semidefinito positivo.
- se $j\omega_i$ è un polo, con residuo K_i , $-j\omega_i$ è un polo, con residuo K_i^T .
- l'origine e il punto all'infinito sono poli (eventuali) semplici, ed il residuo ivi è una matrice reale simmetrica semidefinita positiva.

- la matrice costante D_0 è antisimmetrica (esercizio!).

Quindi una generica matrice L.P.R. $W(s)$ ha lo sviluppo in frazioni parziali

$$W(s) = D_0 s + D_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{K_i^T}{s - j\omega_i} + \frac{K_i}{s + j\omega_i} \right) \quad (6.4)$$

Si lascia come esercizio provare che viceversa ogni sviluppo (6.4), con i vincoli suelencati per le matrici D_0, K_i, K_i^T , corrisponde ad una matrice L.P.R.

Nella (6.4) la coppia di addendi relativa alla coppia $\pm j\omega_i$ può mettersi nella forma:

$$\frac{K_i}{s-j\omega_i} + \frac{\sum_{i=1}^N \frac{s(K_i + K_i^*) + \omega_i(jK_i - jK_i^*)}{s^2 + \omega_i^2}}{s^2 + \omega_i^2} = \frac{sH_i + \omega_i E_i}{s^2 + \omega_i^2} \quad (6.5)$$

e si lascia come esercizio provare che $H_i = K_i + K_i^*$ è reale simmetrica semidefinita positiva e che $E_i = j(K_i - K_i^*)$ è reale antisimmetrica.

Esercizio 2. Una matrice quadrata costante antisimmetrica è LPR.

7. Matrice di diffusione

I concetti che qui introdurremo in modo puramente formale hanno un riscontro assai interessante in una tecnica di studio delle reti elettriche.

Ritorniamo in seguito sull'origine dei parametri di diffusione, sul loro significato e sul loro impiego: per ora ci accontentiamo di porre alcune definizioni e di ricavare alcune formule utili per l'indagine della passività nei sistemi lineari.

Def.1 Sia Σ un sistema lineare con m ingressi ed n uscite, e siano u ed y rispettivamente il vettore degli ingressi ed il vettore delle uscite.

Si definiscono "vettore onda incidente" e "vettore onda riflessa" rispettivamente i vettori

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{2}(u+y) \\ v_r &= \frac{1}{2}(u-y) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Se Σ è un (G)LS, il legame fra u ed y è esprimibile alle $\mathcal{L}$ -trasformate, pur di supporre che per $t=0$ Σ parta da condizioni iniziali nulle, utilizzando la funzione di trasferimento $W(s)$:

$$Y(s) = W(s)U(s) \quad (7.2)$$

Se consideriamo le $\mathcal{L}$ -trasformate corrispondenti di v_i e di v_r , purchè la matrice $(I+W(s))$ sia invertibile su $R(s)$ e purchè si intenda che per $t=0$ Σ si trovi nello stato zero, il legame fra $\mathcal{L}(v_i) = V_i(s)$ ed $\mathcal{L}(v_r) = V_r(s)$ è espresso da una matrice di funzioni razionali

nali in s , detta "matrice di diffusione".

Si ha infatti:

$$V_i(s) = \frac{1}{2}(U(s) + W(s)U(s)) = \frac{1}{2}(I + W(s))U(s)$$

$$V_r(s) = \frac{1}{2}(U(s) - W(s)U(s)) = \frac{1}{2}(I - W(s))U(s)$$

$$V_r(s) = (I - W(s))(I + W(s))^{-1}V_i(s)$$

La matrice

$$S(s) = (I - W(s))(I + W(s))^{-1} \quad (7.3)$$

è detta la matrice di diffusione (scattering matrix), e può essere pensata come funzione di trasferimento di un sistema lineare (eventualmente generalizzato) Σ' in cui v_i e v_r sono rispettivamente i vettori d'ingresso e di uscita.

Esercizio 1. Si assuma come funzione di alimentazione per Σ la usuale $w = u'y$. Si ottiene

$$w = v_i'v_i - v_r'v_r$$

Quindi ad ogni istante, l'alimentazione fornita è la differenza fra il quadrato della norma dell'onda incidente e il quadrato della norma dell'onda riflessa.

Esercizio 2. Se in $W(s) = D_0 + C(sI - A)^{-1}B$ non ha rango pieno la matrice $(I + D_0)$, la matrice di diffusione, quando esiste, ha un polo all'infinito. Quindi, in generale, anche se Σ è un LS, Σ' può essere un GLS.

Esercizio 3. Si verifichi che la funzione di trasferimento si ottiene dalla matrice di diffusione secondo la relazione

$$W(s) = (I + S(s))^{-1}(I - S(s)) \quad (7.4)$$

E' naturale a questo punto chiedersi quali classi di sistemi siano suscettibili di descrizione mediante la matrice di diffusione.

Il seguente teor. 1 individua una classe, certamente non esauriva, di funzioni di trasferimento cui si possono associare matrici di diffusione.

Teor. 1 Il GLS $\Sigma = (A, B, C, D_0, D_1)$ abbia $W(s) = D_1 s + D_0 + C(sI - A)^{-1} B$ come funzione di trasferimento. Allora

- i) se $W(s) \in P.R.$, Σ ammette matrice di diffusione B.R.;
- ii) se Σ ammette matrice di diffusione B.R., $W(s) \in P.R.$.

La prova è una conseguenza diretta dei risultati stabiliti in par. 5. ■

Il teorema 2, unitamente ai risultati dei paragrafi 4 e 6, prova che ogni GLS dissipativo ammette matrice di diffusione.

Teor. 2 Se nel GLS $\Sigma = (A, B, C, D_0, \dots, D_d)$ per ogni $t_1 \geq 0$ e per ogni ingrosso $u \in \mathcal{U}$ soddisfacente $u(0) = u'(0) = \dots u^{(d-1)}(0) = 0$ risulta:

$$\int_0^{t_1} < u(t) | y(t) > dt \geq 0$$

allora Σ ammette una matrice $S(s)$ di diffusione.

prova. Poiché la funzione di trasferimento e la matrice di diffusione sono legate dalla relazione (7.3), $S(s)$ non sarà definita soltanto se $W(s) + I$ non è invertibile sul corpo delle funzioni razionali $R(s)$.

Se $W(s) + I$ è non invertibile, esiste un vettore colonna $U(s) \in R(s)^m$ le cui funzioni razionali componenti non sono tutte nulle e tale che

$$(W(s) + I)U(s) = 0 \quad (7.5)$$

Inoltre non è restrittivo supporre che i gradi dei denominatori delle componenti di $U(s)$ superino di $d+1$ i gradi dei corrispondenti numeratori (ciò si ottiene moltiplicando $U(s)$ per una funzione razionale $1/q(s)$ avente deg q sufficientemente elevato), cosicché $u(t) = \mathcal{L}^{-1}(U(s))$ è una funzione (a valori vettoriali) del tempo soddisfacente $u(0) = u'(0) = \dots u^{(d-1)}(0) = 0$. Da (7.5) si trae subito

$$\begin{aligned} W(s)U(s) &= -U(s) \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = -\mathcal{L}^{-1}(U(s)) = -u(t) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Ma allora, poichè u non è nulla, esiste un istante t_1 per cui risulta

$$\int_0^{t_1} < u | y > dt = \int_0^{t_1} < u | -u > dt < 0$$

contro l'ipotesi. ■

Esercizio 4. La matrice di diffusione $S(s)$ (quando esiste) ha lo stesso grado di McMillan della funzione di trasferimento $W(s)$ [Sugg.: si provi che $S(s) = 2(M+W)^{-1} - I$].

8. Condizioni di dissipatività per un (G)LS nel dominio s.

Siamo ora in grado di analizzare quali vincoli impone la condizione di dissipatività sulla struttura della funzione di trasferimento e della matrice di diffusione di un LS $\Sigma = (A, B, C, D_0)$. Il risultato fondamentale è che la matrice di diffusione di un LS dissipativo (matrice la cui esistenza ci è garantita dal teor. 2 di par. 7) è B.R., e che viceversa ogni sistema lineare controllabile, la cui matrice di diffusione sia B.R., è dissipativo.

L'estensione ai GLS dei risultati ottenuti è lasciata in esercizio.

Torna utile, per taluni aspetti formali delle dimostrazioni, estendere la definizione di LS, assumendo che un LS possa accettare non soltanto funzioni del tempo a valori reali ma anche a valori complessi. $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è allora considerato sul corpo $\mathbb{C}$, e gli stati sono vettori di $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 1. Se $u = \operatorname{Re} u + j \operatorname{Im} u$ è un ingresso "esteso" di Σ e se $y = \operatorname{Re} y + j \operatorname{Im} y$ è l'uscita corrispondente a partire dallo stato zero, $\operatorname{Re} y$ ed $\operatorname{Im} y$ sono le uscite corrispondenti rispettivamente a $\operatorname{Re} u$ ed $\operatorname{Im} u$ partendo dallo stato zero.

Lemma 1 Se nel sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ per ogni ingresso reale $u \in \mathcal{U}$ risulta

$$\int_0^{t_1} u^T(t) y(t) dt \geq 0 \quad (8.1)$$

allora per ogni ingresso complesso risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^{t_1} u^T(t) y(t) dt &\geq 0 \\ &\text{e viceversa.} \end{aligned} \quad (8.2)$$

prova. Dalla

$$\operatorname{Re}(u^T y) = \operatorname{Re} u^T \operatorname{Re} y + \operatorname{Im} u^T \operatorname{Im} y$$

si ha subito

$$\operatorname{Re} \int_0^{t_1} u^T(t) y(t) dt = \int_0^{t_1} \operatorname{Re} u^T \operatorname{Re} y dt + \int_0^{t_1} \operatorname{Im} u^T \operatorname{Im} y dt$$

e poichè per l'esercizio 1 $\operatorname{Re} y$ è la risposta a $\operatorname{Re} u$ ed $\operatorname{Im} y$ è la risposta a $\operatorname{Im} u$, da (8.1) segue (8.2).

La prova dell'inverso è ovvia.

Lemma 2. Se nel sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ per ogni ingresso complesso u risulta

$$\operatorname{Re} \int_0^{t_1} u^T(t) y(t) dt \geq 0 \quad (8.2)$$

allora onda incidente e onda riflessa (complesse) soddisfanno la condizione

$$\int_0^{t_1} (v_i^T v_i - v_r^T v_r) dt \geq 0 \quad (8.3)$$

e viceversa.

Prova. Poichè si ha

$$v_i = \frac{y+u}{2} \quad v_r = \frac{y-u}{2}$$

risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u^T y &= \operatorname{Re} (v_i^T - v_r^T)^T (v_i + v_r) = \\ &= \operatorname{Re} (v_i^T v_i - v_r^T v_r + v_i^T v_r - v_r^T v_i) = \\ &= v_i^T v_i - v_r^T v_r \end{aligned} \quad (8.4)$$

Infatti

$$\begin{aligned} v_i^T v_r - v_r^T v_i &= v_i^T v_r - (v_r^T v_i)^T = \\ &= v_i^T v_r - (v_i^T v_r)^T = 0 \end{aligned}$$

è immaginario puro in quanto differenza di un numero complesso e del suo coniugato.

E' chiaro allora che (8.2) e (8.3) sono equivalenti.

Teor. 1 Se il sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è dissipativo, la sua matrice di diffusione è limitata reale.

prova. E' noto che se Σ è dissipativo, allora per ogni ingresso $u \in \mathcal{U}$

$$\int_0^{t_1} |u|^2 dt \geq 0 \quad 0 \rightarrow$$

Questa condizione è sufficiente, come abbiamo visto in par. 7, ad assicurare l'esistenza di $S(s)$. Vogliamo ora provare che

(i) $S(s)$ è priva di poli per $\operatorname{Re} s > 0$

(ii) $1 - S^T(s)S(s)$ è hermitiana semidefinita positiva per $\operatorname{Re} s > 0$.

(i) Dal lemma 2 risulta, per ogni ingresso v_i ed ogni $t_1 \geq 0$

$$\int_0^{t_1} (v_i^T v_i - v_r^T v_r) dt \geq 0$$

e quindi per ogni ingresso $v_i \in (L^2 \cap \mathcal{D}_0)^m$ si ha (*)

$$\infty > \int_0^{\infty} v_i^T v_i dt \geq \int_0^{\infty} v_r^T v_r dt \geq 0 \quad (8.5)$$

Perciò se v_i appartiene a $(L^2 \cap \mathcal{D}_0)^m$, a tale spazio appartiene l'onda riflessa v_r quando il sistema parte dallo stato zero per $t=0$.

Poichè la $\mathcal{L}$ -trasformata di una funzione in $L^2 \cap \mathcal{D}_0$ è analitica per $\operatorname{Re} s > 0$ e poichè esistono funzioni in $L^2 \cap \mathcal{D}_0$ la cui $\mathcal{L}$ -trasformata è priva di zeri per $\operatorname{Re}(s) > 0$ (si veda [N.1] pg. 372), dalla

$$V_r(s) = S(s)V_i(s) \quad (8.6)$$

si vede che l'elemento di posto (j, k) in $S(s)$ è rapporto fra la j -esima componente di $V_r(s)$ e la k -esima componente di $V_i(s)$ quando $V_i(s)$ ha nulla tutte le altre componenti:

$$[S(s)]_{jk} = [V_r(s)]_j / [V_i(s)]_k \quad [V_i(s)]_h = 0, \quad h \neq k \quad (8.7)$$

(*) L^2 è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile e $\mathcal{D}_0$ delle funzioni regolari (i.e. indefinitamente differenziabili) nulle fino al tempo zero.

e basterà scegliere una $\bar{V}_i(s)$ priva di zeri nel semipiano $\text{Re } s > 0$ per concludere nel senso voluto.

(ii) La prova è imperniata sulla considerazione di una famiglia di ingressi complessi, a supporto finito, e con andamento esponenziale su t_a le supporto.

Sia $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ un punto del semipiano $\text{Re } s > 0$ e sia z un vettore in $\mathbb{C}^m$. Consideriamo l'onda incidente (complessa)

$$v_i(t) = z e^{s_0(t-\tau)} \pi[\bar{0}, \tau] \quad (8.8)$$

dove $\pi[\bar{0}, \tau]$ indica l'impulso rettangolare di ampiezza unitaria sull'intervallo $[0, \tau]$: la Laplace-trasformata di $v_i(t)$ è

$$V_i(s) = \frac{e^{-s_0\tau} - e^{-s\tau}}{s - s_0} z \quad (8.9)$$

e quella della corrispondente onda riflessa è

$$V_r(s) = S(s) z \frac{e^{-s_0\tau} - e^{-s\tau}}{s - s_0} \quad (8.10)$$

Vogliamo calcolare l'antitrasformata di $V_r(s)$ utilizzando il metodo dei residui.

Cominciamo con l'osservare che per $\text{Re}(s-s_0) > 0$ $V_r(s)$ è funzione analitica, e quindi la sua antitrasformata può ottenersi eseguendo un'integrale di linea entro il semipiano (tratteggiato) $\text{Re}(s-s_0) > 0$, nel quale converge la $\mathcal{L}$ -trasformata di $v_r(t)$:

$$v_r(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V_r(s) e^{st} ds \quad (8.11)$$

Per $t < \tau$ l'integrale (2.11) si può spezzare nella differenza di due integrali

$$v_r(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{s(t-\tau)} ds \quad (8.12)$$

Ora, detti $\vec{\gamma}_1$ e $\vec{\gamma}_2$ gli archi di cerchio che chiudono il cammino di integrazione ($c-j\infty$, $c+j\infty$) rispettivamente nel semipiano $\text{Re } s > c$ e nel semipiano $\text{Re } s \leq c$, quando il loro raggio r tende all'infinito si verifica che:

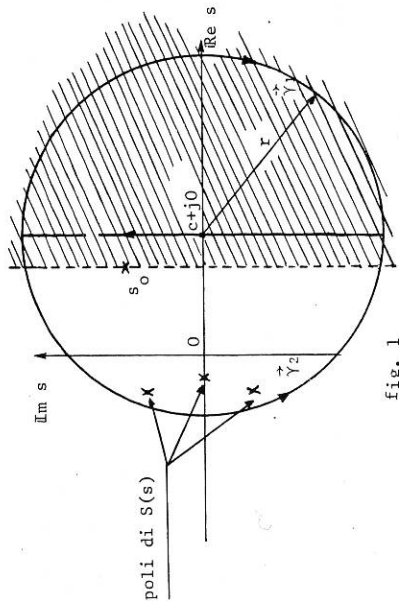


fig. 1

$$\int_{\vec{\gamma}_1} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{s(t-\tau)} ds = 0 \quad (8.13)$$

$$\int_{\vec{\gamma}_2} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} ds = 0 \quad (8.14)$$

Ciò deriva dal fatto che se una funzione $f(s)$ è continua per $|s| > R$ e se

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} f(s) = 0$$

l'integrale $\int f(s) e^{-s} ds$ esteso all'arco di cerchio di centro l'origine e di raggio r contenuto in $\text{Re } s > 0$ tende a zero quando $r \rightarrow \infty$ (la prova è un interessante esercizio [C. I]).

Applichiamo il teorema dei residui alla funzione $\{S(s)z/s-s_0\} e^{s(t-\tau)}$ e teniamo conto di (8.13):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{s(t-\tau)} ds + \int_{\vec{\gamma}_1} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{s(t-\tau)} ds = \\ &= \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{s(t-\tau)} ds = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Quindi il secondo integrale di (8.12) è nullo.

Applichiamo poi il teorema dei residui alla funzione $\{S(s)z/s-s_0\} e^{st-s_0\tau}$ e teniamo conto di (8.14):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_2} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} ds = \\
& = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} ds = \mathcal{L} \operatorname{Res} \left(\frac{S(s)z}{s-s_0} e^{st-s_0\tau} \right)
\end{aligned} \quad (8.16)$$

dove la somma è estesa ai residui nei poli di $\{S(s)z/s-s_0\} e^{st-s_0\tau}$ contenuti nel semipiano $\operatorname{Re} s < c$.

Da (8.12), (8.15) e (8.16) abbiamo allora che la somma in (8.16) esprime $v_r(t)$.

Se spezziamo la somma in (8.16) mettendo in evidenza il residuo in s_0 , otteniamo

$$v_r(t) = S(s_0)z e^{s_0(t-\tau)} + e^{-s_0\tau} \sum_{s_i \neq s_0} K_i z e^{s_i t} \quad (8.17)$$

Le matrici K_i ($i \neq 0$) denotano i residui di $S(s)/s-s_0$ nei poli diversi da s_0 : questi poli soddisfano tutti la condizione $\operatorname{Re} s_i < \operatorname{Re} s_0$ per ogni $i \neq 0$.

Le formule (8.8) e (8.17) implicano

$$\begin{aligned}
0 & \leq \int_0^T v_1^T v_1 - v_1^T v_1^T dt = \\
& = \int_0^T z^T e^{2\operatorname{Res}_0(t-\tau)} dt + \int_0^T z^T S(s_0) z e^{2\operatorname{Res}_0(t-\tau)} dt + \\
& + \int_0^T e^{-2\operatorname{Res}_0\tau} \left(\sum_{ij} z^T K_i K_j z e^{(s_i+s_j)\tau} + \sum_i z^T K_i S(s_0) z e^{(s_0+s_i)\tau} + \right. \\
& \left. + \sum_i z^T S(s_0) K_i z e^{(s_0+s_i)\tau} \right) dt
\end{aligned} \quad (8.18)$$

Al crescere di τ , il terzo integrale di (8.18) è infinitesimo, cosicché

$$\begin{aligned}
0 & \leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^T v_1^T v_1 - v_1^T v_1^T dt = \\
& = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} z^T (I - S^T(s_0) S(s_0)) z \cdot \int_0^T e^{2\operatorname{Res}_0(t-\tau)} dt = \\
& = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} z^T (I - S^T(s_0) S(s_0)) z \frac{1 - e^{-2\operatorname{Res}_0 T}}{2\operatorname{Res}_0} = \\
& = z^T (I - S^T(s_0) S(s_0)) z \frac{1}{2\operatorname{Res}_0}
\end{aligned} \quad (8.19)$$

Poiché z è un elemento arbitrario di $\mathbb{C}^m$, si conclude che $(I - S^T(s_0) S(s_0))$ è hermitiana semidefinita positiva.

Osservazione. Nella prova si è fatto uso di una famiglia di funzioni di "test" parametrizzata in τ (per z ed s_0 assegnati).

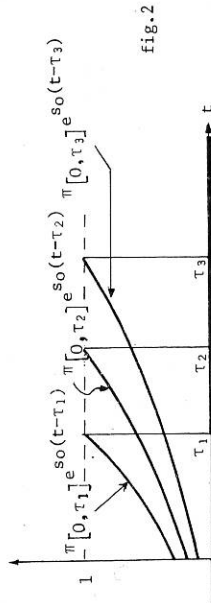


fig. 2

La fig. 2 riporta alcuni elementi della famiglia, per $m=1$, s_0 reale e $z=1$. È interessante osservare che l'alimentazione fornita in $[0, \tau]$, espressa da $\int_0^{\tau} v_1^T v_1 - v_1^T v_1^T dt$, ha un limite per $\tau \rightarrow +\infty$ che non è l'alimentazione corrispondente all'ingresso limite, dato che l'ingresso limite è chiaramente l'ingresso nullo!

Teor. 2 Se la matrice di diffusione del LS $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è limitata reale

$$\text{le, allora } \int_0^T v_1^T v_1 - v_1^T v_1^T dt \geq 0, \forall v_1, \forall T > 0.$$

prova. Ricordiamo che:

- (i) La Fourier trasformata di una funzione di L^2 è una funzione di L^2 (cfr. p.es. Titchmarsh $\int_{-\infty}^{\infty}$).
- (ii) Il prodotto di una funzione di L^2 per una funzione limitata localmente integrabile è una funzione di L^2 (esercizio).
- (iii) Se $S(s)$ è matrice limitata reale, è analitica e limitata per $s=j\omega$ (cfr. par. 3).

Da questi fatti deriva subito che se $v_1 \in L^2$ allora $S(j\omega) v_1(j\omega) = V_1(j\omega)$ appartiene ad L^2 , e quindi $v_1 \in L^2$.

Poiché per le funzioni di L^2 vale l'eguaglianza di Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_1^T v_1 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_1^T(f) V_1(f) df \quad f \in L^2 \quad (8.20)$$

allora per $v_1 \in L^2$, con $v_1(t) = 0$ per $t < 0$, si ha

$$\int_0^{+\infty} (\dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{V}_1^T(j\omega) (1 - S^T(j\omega)) \dot{V}_1(j\omega) d\omega$$

Poichè $S(s)$ è B.R., dal par. 3 risulta

$$\dot{V}^T (1 - S^T(j\omega)) S(j\omega) \dot{V} \geq 0 \quad \forall \dot{V} \in \mathbb{C}^m$$

e quindi, per ogni $v_i \in L^2$ con supporto sul semiasse positivo:

$$\int_0^{+\infty} \dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r dt \geq 0 \quad (8.21)$$

Poichè Σ è causale, per ogni $\tau > 0$ il valore di

$$\int_0^\tau \dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r dt$$

non dipende dall'andamento di v_i per $t > \tau$.

Considerando allora un'onda incidente nulla per $t > \tau$, si ha

$$0 \leq \int_0^\tau \dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r dt + \int_\tau^{+\infty} \dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r dt \leq \int_0^\tau \dot{V}_1^T \dot{V}_1 - \dot{V}_r^T \dot{V}_r dt \quad (8.22)$$

Infatti v_i è in questo caso un elemento di L^2 , ed è valida (8.21).

Un immediato corollario del teor. 2 e del par. V.4 è il

Coroll.1 Se il LS $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è completamente controllabile e se la sua matrice di diffusione esiste ed è B.R., allora Σ è dissipativo.

Quindi, se un sistema è dissipativo esso ammette matrice di diffusione B.R., se un sistema ammette matrice di diffusione B.R. e in più è controllabile, allora è dissipativo.

Abbiamo visto inoltre in par. 5 che $W(s)$ è P.R. se e solo se esiste la matrice di diffusione corrispondente ed essa è B.R..

Questo rende immediati per la funzione di trasferimento gli analoghi dei teoremi 1, 2 e del coroll.1. Si perviene così al seguente fondamentale

Teor.3 Sia dato il sistema lineare (eventualmente generalizzato) $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ ($\Sigma = (A, B, C, D_0, D_1, \dots, D_d)$), completamente controllabile.

Sono allora equivalenti i seguenti fatti:

- i) Σ è dissipativo
- ii) $W(s)$ è P.R.
- iii) esiste la matrice di diffusione $S(s)$ ed essa è B.R.

(Se manca la controllabilità, si ha la seguente catena di implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), ossia viene meno la possibilità di verificare la dissipatività sulla sola struttura delle matrici che danno il legame ingresso/uscita).

Osservazione. E' noto che la dissipatività di un sistema generalizzato $\Sigma = (A, B, C, D_0, \dots, D_d)$ si riconduce a quella del sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ con, in più, la condizione $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_d = 0$. Applicando il teor. 3, si ritrova il fatto (noto per altra via) che $W(s)$ è P.R. se e solo se lo è la sua parte regolare all'infinito e se inoltre il polo all'infinito (quando c'è) è semplice con residuo semidefinito positivo.

Quando il sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è una realizzazione minima (i.e. controllabile ed osservabile), la relazione intercorrente fra la funzione di trasferimento e la realizzazione è espressa dal

Teor.4 Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ una realizzazione minima di $W(s)$. C.n.e.s. perchè Σ sia dissipativo è che valgono simultaneamente

- (i) $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$
- (ii) i poli sull'asse immaginario $j\omega_i$ sono semplici, e le matrici residue di $W(s)$ in corrispondenza ai poli $j\omega_i$

$$K_i = \lim_{s \rightarrow j\omega_i} W(s)(s - j\omega_i)$$

sono hermitiane semidefinite positive.

(iii) $W^T(j\omega) + W(j\omega)$ è semidefinita positiva per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto per $j\omega \in \lambda(A)$

prova. Ricordiamo preliminarmente che se Σ è realizzazione minima, lo spettro di A coincide con l'insieme dei poli di $W(s)$ (cap. II, par. 4). Se inoltre Σ è dissipativo, $W(s)$ è P.R. per il teor. 3, ed (i) $\wedge$ (iii) sono immediata conseguenza del teor. 1 di par. 4.

Viceversa, se valgono (i) $\wedge$ (iii) e Σ è realizzazione minima, i poli di $W(s)$ sono contenuti in $\text{Re } s \leq 0$, e sono soddisfatte tutte le condizioni perchè $W(s)$ sia P.R.

Quindi, per teor. 3, Σ è dissipativo. ■

Esercizio 2. Alla condizione (ii) del teor. 4 può essere sostituita la seguente

"gli autovalori immaginari sono semplici, e le matrici residue di $W(s)$ in corrispondenza ad essi sono hermitiane semidefinite positive"?

Si giustificichi la risposta.

9. Studio dei sistemi lineari senza perdite nel dominio s .

In questo paragrafo vogliamo particularizzare i risultati ottenuti nel par. precedente ai sistemi lineari senza perdite.

Faremo vedere che le matrici LBR ed LPR sono le sottoclassi delle classi delle matrici B.R. e P.R. necessarie e sufficienti per studiare i L.S. senza perdite.

Teor. 1 Se il LS Σ è dissipativo e senza perdite, allora la matrice di fusione $S(s)$ è L.B.R.

prova. Si consideri un'onda incidente v_i la quale, sull'intervallo $[0, t_1]$ faccia descrivere a Σ una traiettoria nello spazio degli stati con origini e termine nello stato zero. Per $t > t_1$, $v_i(t) = 0$. Risulta allora, per il teorema di Parseval e per il teor. 1 di (V.5)

$$0 = \int_{0 \rightarrow +\infty} \dot{w}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (v_i^T v_i - v_r^T v_r) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_i^T(j\omega) (1 - S^T(j\omega) S(j\omega)) V_i(j\omega) d\omega \quad (9.1)$$

Si può dimostrare che, per ogni $z \in \mathbb{C}^m$ e per ogni $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$, esiste un'onda incidente v_i a supporto limitato $[0, t_1]$ che

- i) porta Σ dallo stato 0 per $t=0$ allo stato 0 per $t=t_1$
- ii) soddisfa la condizione sulla Fourier-trasformata

$$\mathcal{F}(v_i) \Big|_{\omega=\bar{\omega}} = V_i(j\bar{\omega}) = z \quad (9.2)$$

Questo ci consente di provare che la matrice $1 - S^T(j\omega) S(j\omega)$ è nulla per ogni $\omega \in \mathbb{R}$. Se per assurdo per $\omega = \bar{\omega}$ fosse $1 - S^T(j\bar{\omega}) S(j\bar{\omega}) \neq 0$, sarebbe possibile per (9.2) determinare un'onda incidente v_i tale che la sua $\mathcal{F}$ -trasformata dia

$$V_i^T(j\bar{\omega}) [1 - S^T(j\bar{\omega}) S(j\bar{\omega})] V_i(j\bar{\omega}) \neq 0$$

In tal caso l'integrando dell'ultimo membro di (9.1) sarebbe positivo in un intorno di $\bar{\omega}$, e l'integrale (9.1) non potrebbe annullarsi. Quindi $S(s)$ soddisfa per ogni ω reale alla condizione

$$1 - S^T(j\omega) S(j\omega) = 0$$

ed $S(s)$ è LBR. ■

Esercizio 1. Si dimostri che effettivamente, nella prova del teor. precedente, l'ingresso v_i tale che $V_i(j\bar{\omega}) = z$ esiste.

Utilizzando i risultati di par. 6, e quanto è noto dal cap. V sui LS senza perdite, si ha il seguente

Teor. 2 Sia dato il LS $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ completamente controllabile (oppure il GLS $\Sigma = (A, B, C, D_0, D_1)$ completamente controllabile).

Sono equivalenti i seguenti fatti

- i) Σ è dissipativo senza perdite
- ii) $W(s)$ è L.P.R.
- iii) $S(s)$ esiste ed è L.B.R.

La prova è immediata, ed è lasciata come esercizio.

Ancora come esercizio si lascia lo studio di come si modifica l'enunciato del teor. 2 quando viene meno la controllabilità.