

VII) STRUTTURA ALGEBRICA DEI SISTEMI LINEARI DISSIPATIVI

I risultati ottenuti nel capitolo precedente restringono la classe delle funzioni di trasferimento realizzabili da GLS dissipativi alle matrici positive reali, e precisano inoltre che ogni realizzazione controllabile di tali matrici è un sistema dissipativo.

Restano così completamente classificati i legami ingresso-uscita che si possono ottenere utilizzando tali sistemi (e in particolare utilizzando reti elettriche lineari passive).

Scopo di questo capitolo è di approfondire l'indagine, già iniziata in V.4, sui vincoli che l'ipotesi di dissipatività impone alle matrici $A, B, C, D_0, D_1, \dots, D_d$ del sistema, sui legami che intercorrono fra la funzione di trasferimento positiva reale e le sue realizzazioni dissipative, e sulle relazioni che le funzioni energia ammissibili hanno con la funzione di trasferimento e con le matrici dei sistemi che la realizzano.

Sarà utile, per evitare una notazione eccessivamente pesante, restringersi ai sistemi lineari non generalizzati: questa non è una effettiva limitazione, in quanto sappiamo che un GLS è dissipativo se e solo se

i) la sua parte regolare (A, B, C, D_0) è dissipativa

ii) $D_1 \geq 0$

iii) $D_2 = D_3 = \dots = D_d = 0$

Quindi i sistemi generalizzati dissipativi sono tutti e soli quelli che si ottengono dagli LS dissipativi aggiungendo un termine del tipo $D_1 \frac{du}{dt}$ nell'equazione di read-out, con $D_1 \geq 0$.

1. Il lemma positivo reale e la funzione di dissipazione

Nel par. 4 di cap.V abbiamo provato una condizione necessaria e sufficiente di dissipatività relativa alle matrici A, B, C, D_0 di un LS.

E' facile verificare che essa può essere riformulata, anziché mediante una disequazione matriciale lineare, per mezzo di un sistema di equazioni o con una disequazione quadratica:

Teor.1 Sia dato il L.S. $\Sigma = (A, B, C, D_0)$. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

(o) Σ è dissipativo

(i) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_1$ delle matrici $\Pi \geq 0$ per cui la forma quadratica $S(x) = x^T \frac{\Pi}{2} x$ è funzione energia per Σ .

ii) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_2$ delle soluzioni semidefinite positive della disequazione in K

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_0^T & C - B^T K \\ C^T - KB & -A^T K - KA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^T \\ H^T \end{bmatrix} > 0 \quad (1.1)$$

iii) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_3$ delle matrici Π semidefinite positive tali che per qualche $H \in J$ siano soddisfatte le eguaglianze

$$\begin{aligned} \Pi A + A^T \Pi &= -H^T H \\ \Pi B &= C^T - H^T J \\ J^T J &= D_0 + D_0^T \end{aligned} \quad (1.2)$$

iv) Se $D_0 + D_0^T$ è invertibile, non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_4$ delle soluzioni semidefinite positive della disequazione quadratica

$$KA + A^T K + (KB - C^T)(D_0 + D_0^T)^{-1}(B^T K - C) \leq 0 \quad (1.3)$$

Se $D_0 + D_0^T$ non è invertibile, non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_4' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{S}_4$ dove $\mathcal{S}_4'$ denota l'insieme delle soluzioni semidefinite positive della disequazione quadratica

$$KA + A^T K + (KB - C^T)(D_0 + D_0^T + \epsilon I_m)(B^T K - C) \leq 0 \quad (1.4)$$

Gli insiemi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ (o $\mathcal{S}_4'$) coincidono.

prova. L'equivalenza di (o), (i) e (ii) e la coincidenza di $\mathcal{S}_1$ e di $\mathcal{S}_2$ è già stata provata nel cap. V. Se $\Pi > 0$ è soluzione di (1.1), esiste una fattorizzazione del tipo

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_0^T & C - B^T \Pi \\ C^T - \Pi B & -\Pi A - A^T \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T \\ H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ H \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

perché il primo membro è una matrice semidefinita positiva. Eguagliando i blocchi corrispondenti si ottengono le (1.2). Se viceversa valgono le (1.2) per qualche terna (Π, H, J) con $\Pi > 0$, esse possono scriversi nella forma (1.5) e perciò il primo membro è semidefinito positivo. Resta così provata l'equivalenza (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) e la coincidenza di $\mathcal{S}_2$ con $\mathcal{S}_3$.

Se $(D_0 + D_0^T)$ è invertibile e se (Π, H, J) soddisfa (1.3) con $\Pi \geq 0$, allora è invertibile $J^T J$ e lo spettro di $(J^T J)^{-1} J^T$ contiene soltanto gli autovalori

lori 0 ed 1. Infatti se λ è un autovettore di $J(J^T J)^{-1} J$ e $v \neq 0$ è un autovettore corrispondente, si ha

$$\lambda v = (J^T J)^{-1} J^T v \Rightarrow \lambda J^T v = J^T v$$

Se $J^T v \neq 0$, λ vale 1; se $J^T v = 0$, v è nullo e quindi λ vale 0.

Gli autovettori di $\mathbb{I}_m - J(J^T J)^{-1} J^T$ sono 0 od 1: quindi $\mathbb{I}_m - J(J^T J)^{-1} J^T$ è semidefinita positiva e

$$H^T J(J^T J)^{-1} J^T H \leq H^T H$$

Da (1.3) segue

$$\Pi A + A^T \Pi = -H^T H \leq -H^T J(J^T J)^{-1} J^T H = -(\Pi B - C^T)(D + D^T)^{-1}(B^T \Pi - C^T)$$

Se viceversa $\Pi > 0$ soddisfa la disequazione (1.4), esiste una matrice N per cui si ha

$$\Pi A + A^T \Pi + (\Pi B - C^T)(D + D^T)^{-1}(B^T \Pi - C) = -N^T N$$

e basta porre

$$H^T = \begin{bmatrix} -(\Pi B - C^T)(D + D^T)^{-1/2} & N^T \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$$J = \begin{bmatrix} (D + D^T)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

per verificare (1.3).

Quindi quando $D + D^T$ è invertibile è certamente $\mathcal{G}_4 = \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_2$.

Se $D + D^T$ non è invertibile, per ogni $\epsilon > 0$ risulta invertibile $D + D^T + \epsilon \mathbb{I}_m$. E' chiaro che, se $\mathcal{G}_{2\epsilon}$ denota l'insieme delle soluzioni semidefinite positive di

$$0 \leq \begin{bmatrix} D + D^T + \epsilon \mathbb{I}_m & C - B^T K \\ C^T - KB & -A^T K - KA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D + D^T & C - B^T K \\ C^T - KB & -A^T K - KA \end{bmatrix},$$

per ogni $\epsilon > 0$ si ha

$$\mathcal{G}_{2\epsilon} = \mathcal{G}_{4\epsilon} = \mathcal{G}_{3\epsilon} \quad (1.8)$$

Poichè $\mathcal{G}_{2\epsilon}$ è una famiglia di insiemi indicata in ϵ che per $\epsilon \rightarrow 0^+$ decresce monotonicamente, si ottiene facilmente

$$\mathcal{G}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{2\epsilon} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{G}_{2\epsilon} \quad (1.9)$$

e grazie a (1.8)

$$\mathcal{G}_4 \triangleq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{4\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}_{2\epsilon} = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_3 \quad \blacksquare$$

L'equivalenza fra (o) e (iii) va comunemente sotto il nome di LEMMA POSITIVO REALE.

Se (Π, H, J) con $\Pi > 0$ è una qualsiasi soluzione del lemma positivo reale,

$$S(x) \triangleq x^T \frac{\Pi}{2} x$$

è allora una funzione energia del sistema. Possiamo attribuire un significato anche alle matrici H e J . Ponendo infatti

$$d(x, u) \triangleq \frac{1}{2} \|Ju + Hx\|^2 = \frac{1}{2} (Ju + Hx)^T (Ju + Hx) \quad (1.10)$$

si verifica che lungo le soluzioni di $\dot{x} = Ax + Bu$ risulta soddisfatta l'eguaglianza

$$w(u, y) = u^T y = \frac{d}{dt} \left(x^T \frac{\Pi}{2} x \right) + d(x, u) \quad (1.11)$$

Quindi $d(x, u)dt$ rappresenta la quota del lavoro $w(u, y)dt$ fornita al sistema nel tempo dt che non viene trasformata in energia immagazzinata, ma viene, per così dire, dissipata irreversibilmente.

Chiameremo $d(x, u)$ FUNZIONE DI DISSIPAZIONE.

Se $D + D^T$ è invertibile, si ha subito da (1.3)

$$d(x, u) \geq \frac{1}{2} \|u - R^{-1}(B^T - C)x\|_R^2 \quad (1.12)$$

e se Π soddisfa (1.3) come uguaglianza, anche la (1.12) è soddisfatta come uguaglianza. Si noti che quando Π soddisfa (1.3) come uguaglianza, lungo le traiettorie individuate da

$$u - R^{-1}(B^T - C)x = 0$$

la dissipazione è nulla, e quindi il lavoro fornito all'ingresso del sistema eguaglia la variazione di energia immagazzinata. Questo non im-

plica che Σ sia necessariamente senza perdite in quanto la condizione di assenza di perdite

$$d(u, x)dt = 0 \quad (1.13)$$

deve valere lungo qualsiasi traiettoria del sistema!

Le matrici considerate J ed H hanno dimensioni rispettivamente $r \times m$ ed $r \times n$: non esiste in realtà nessun limite superiore per l'intero r nel senso che, fissato Π , se la fattorizzazione (1.5) ha luogo con matrici $(m+n) \times r$ ed $r \times (m+n)$, essa può aver luogo con matrici $(m+n) \times (r+k)$ ed $(r+k) \times (m+n)$ qualunque sia l'intero positivo k . Esiste invece, ovviamente, un limite inferiore per r dato dal rango della matrice (1.1) in corrispondenza alla matrice Π considerata. Torneremo ancora su questo problema. Qui osserviamo che se $D_0 + D_1^T$ è invertibile, dalla (1.2.3) si trae $r \geq m$, e il valore limite è raggiunto se e solo se Π soddisfa (1.4) come uguaglianza.

Gli esercizi 1-3 mettono in evidenza alcune interessanti relazioni fra lo spettro della matrice A in un L.S. $\Sigma = (A, B, C, D_0)$, la dissipatività di Σ e le proprietà di controllabilità e di osservabilità.

Esercizio 1. Com'è noto, data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la condizione $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ è equivalente a supporre che ogni soluzione di $\dot{x} = Ax$ sia infinitesima per $t \rightarrow +\infty$.

Spesso però si è interessati ad una condizione meno stringente, sul comportamento asintotico delle soluzioni di $\dot{x} = Ax$, che si desiderano non più infinitesime ma soltanto limitate per $t \rightarrow +\infty$. Si verifichi che una c.n.e.s. perché ciò accada è che sia $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$ e che nella forma di Jordan di A i blocchi corrispondenti agli autov. imm. abbiano dimensione 1x1. Riservando l'attributo di "stabile" ad A quando $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$, diremo in questo secondo caso che A è "bounded-stabile".

Si cerchi di caratterizzare la bounded-stabilità nello spirito del lemma di Lyapunov, provando che se esiste una matrice $X > 0$ soddisfacente la relazione

$$A^T X + X A \leq 0$$

allora A è bounded-stabile [Sugg.: si ponga $V(x) = x^T X x$ e si derivi $V(x)$ lungo la traiettoria di $\dot{x} = Ax$].

Esercizio 2. Nei sistemi lineari dissipativi e controllabili ma non osservabili, la matrice A può possedere autovalori con parte reale strettamente positiva [Sugg.: basta considerare una realizzazione controllabile e non osservabile

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & D_0 \end{bmatrix}$$

di $W(s)$ PR. Sullo spettro di A_{22} non esistono vincoli.]

Esercizio 3. Nei sistemi lineari dissipativi ed osservabili la matrice A è bounded-stabile [Sugg.: si applichi alla prima equazione del lemma positivo reale il risultato dell'esercizio 1].

Più in generale, ogni sistema dissipativo che ammette una funzione energia definita positiva ha la matrice A bounded-stabile.

Esercizio 4. Se nel sistema dissipativo $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è invertibile la matrice $R = D_0 + D_1^T$, e se poniamo $\hat{A} = A - BR^{-1}C$, allora

i) se Σ ammette una funzione energia definita positiva, $\hat{A}$ è bounded stabile

ii) se inoltre Σ è controllabile e/o osservabile, $\hat{A}$ è stabile.

E' vero che quando Σ è controllabile $\hat{A}$ è stabile a prescindere dalla esistenza di funzioni energia definite positive?

Esercizio 5. Se il sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è dissipativo e ammette una funzione energia S definita positiva, è garantita la dissipatività del sistema duale $\bar{\Sigma} = (A^T, C^T, B^T, D_0)$ (in particolare $\bar{\Sigma}$ è dissipativo se Σ è osservabile).

[Sugg. si costruisca un'energia $\bar{S}$ per $\bar{\Sigma}$ a partire da S]

Se le soluzioni di (1.1) per Σ sono comprese fra Π_d e Π_r con $0 < \Pi_d < \Pi_r$, entro quali limiti sono comprese le soluzioni di (1.1) per $\bar{\Sigma}$?

2. Soluzioni limite del lemma positivo reale

Il teor. 1 di par. 1 fornisce varie condizioni equivalenti di dissipatività, ed in corrispondenza ad ogni soluzione di (1.1) o (1.2) si ha una ben definita funzione energia.

Ci poniamo ora il problema di studiare le soluzioni minima e massima di (1.1), corrispondenti al lavoro disponibile S_d e al lavoro richiesto

$S_{t,0}$ assumendo a priori che $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ sia dissipativo (ad esempio, perchè realizzazione controllabile di una matrice P.R.).

LAVORO DISPONIBILE.

Com'è noto, è finita per Σ la funzione lavoro disponibile, Essa è una forma quadratica semidefinita positiva:

$$S_d(x) = -\inf_{u \geq 0} \int_0^{t_1} u^T y \, dt = x^T \frac{\Pi_d}{2} x \quad (2.1)$$

e la matrice Π_d è la minima tra le soluzioni semidefinite positive di (1.1) e (1.2). Se assumiamo $D_0 D_0^T$ invertibile, Π_d è anche la minima soluzione semidefinita positiva della disequazione (1.3):

$$KA + A^T K + (KB - C^T)(D_0 + D_0^T)^{-1}(B^T K - C) \leq 0$$

Vogliamo far vedere che Π_d è la minima soluzione semidefinita positiva dell'equazione associata ad (1.3):

$$KA + A^T K + (KB - C^T)(D_0 + D_0^T)^{-1}(B^T K - C) = 0 \quad (2.2)$$

Si noti che, posto $R = D_0 + D_0^T$, l'equazione (2.2) può essere arrangiata nella forma

$$K(A - BR^{-1}C) + (A - BR^{-1}C)^T K + KBR^{-1}B^T K + C^T R^{-1}C = 0 \quad (2.3)$$

e quindi (2.2) è una equazione algebrica di Riccati.

Teor.1 Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ dissipativo e sia invertibile $R = D_0 + D_0^T$. Si consideri la equazione differenziale di Riccati:

$$\frac{dK}{dt} = -A^T K - KA + KBR^{-1}B^T K - \hat{Q}$$

$$\text{con } \hat{A} = A - BR^{-1}C, \quad \hat{Q} = -C^T R^{-1}C.$$

Per ogni matrice K_1 che verifichi $0 \leq K_1 \leq \Pi_d$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t, -K_1, 0)$$

esiste finito e coincide con $-\Pi_d$

prova. Si consideri la funzione $h: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$h(x_0, t_1) = \inf_{u \geq 0} \left(\int_0^{t_1} 2u^T y \, dt - x^T(t_1) K_1 x(t_1) \right) \quad (2.5)$$

Per la scelta di K_1 e poichè S_d è una funzione energia, vale la catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} 2u^T y \, dt - x^T(t_1) K_1 x(t_1) &\geq \\ \int_0^{t_1} 2u^T y \, dt - x^T(t_1) \Pi_d x(t_1) &\geq -x_0^T \Pi_d x_0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

e si verifica che $h(x_0, t_1)$ ha, per ogni $t_1 \geq 0$, $-x_0^T \Pi_d x_0$ come confine inferiore.

Dalla definizione di lavoro disponibile, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste un T_ε tale che per $t_1 > T_\varepsilon$ e per una opportuna scelta dell'ingresso so

$$\int_0^{t_1} 2u^T y \, dt \leq -x_0^T \Pi_d x_0 + \varepsilon$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} -x_0^T \Pi_d x_0 &\leq \int_0^{t_1} 2u^T y \, dt - x^T(t_1) K_1 x(t_1) \leq -x_0^T \Pi_d x_0 - x^T(t_1) K_1 x(t_1) + \varepsilon \\ &\leq -x_0^T \Pi_d x_0 + \varepsilon \end{aligned}$$

Ma allora, per $t_1 > T_\varepsilon$

$$-x_0^T \Pi_d x_0 \leq h(x_0, t_1) \leq -x_0^T \Pi_d x_0 + \varepsilon$$

e passando al limite per $t_1 \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} h(x_0, t_1) = -x_0^T \Pi_d x_0 \quad (2.7)$$

Sostituendo ora $y = Cx + D_0 u$ in (2.5) ricaviamo

$$h(x_0, t_1) = \inf_{u \geq 0} \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & C^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt \quad (2.8)$$

con la condizione $\dot{x} = Ax + Bu$.

Com'è noto dal cap.III, la ricerca dell'estremo inferiore in (2.8) è e

quivalente alla ricerca di

$$\inf_{\substack{u \\ 0}} \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} \dot{x}^T & \dot{x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & -C^T R^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt \quad (2.9)$$

con la condizione $\dot{x} = (A - BR^{-1}C)x + \hat{B}u = \hat{A}x + \hat{B}u$.

Poichè questo problema ammette soluzione finita per ogni $t_1 \geq 0$, come si desume da (2.6), l'equazione differenziale di Riccati (2.4) con la condizione iniziale $K(t_1) = -K_1$ ammette soluzione sull'intervallo $[0, t_1]$ qualunque sia $t_1 \geq 0$, ed è

$$h(x_0, t_1) = x_0^T \Pi(0, -K_1, t_1) x \quad (2.10)$$

Passando al limite per $t_1 \rightarrow +\infty$, tenendo conto di (2.7) abbiamo

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x_0^T \Pi(0, -K_1, t_1) x_0 = -x_0^T \Pi_d x_0 \quad (2.11)$$

La (2.11) vale per ogni $x_0 \in X$. E' allora facile concludere che

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \Pi(0, -K_1, t_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(t, -K_1, 0) = -\Pi_d \quad (2.12)$$

Sostituito K con $\Pi(t, -K_1, 0)$ nella (2.4), passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ si prova il

Coroll.1 Π_d è la minima soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati (2.2).

Osservazione 1. Una volta ottenuta Π_d , è facile passare alla soluzione del lemma positivo reale.

Essendo infatti $R = D_0^T D_0$ definita positiva, esistono matrici invertibili J e J che soddisfano la

$$J^T J = R \quad (2.13)$$

e dalla (1.3), verificata come eguaglianza da Π_d , si ha

$$\Pi_d^A + A^T \Pi_d = -(\Pi_d B - C^T) J^{-1} (J^T)^{-1} (B^T \Pi_d - C) \quad (2.14)$$

Posto allora

$$H = (J^T)^{-1} (B^T \Pi_d - C) \quad (2.15)$$

la terna (Π_d, H, J) è soluzione del lemma.

Quando $D_0 + D_0^T$ è matrice singolare, l'enunciato del teor.1 perde significato.

Posto $D_\varepsilon = D_0 + \frac{\varepsilon}{2} \Pi_d$, per ogni ε positivo consideriamo il sistema dissipativo $\Sigma_\varepsilon = (A, B, C, D_\varepsilon)$. La corrispondente funzione lavoro disponibile $S_{d,\varepsilon}$ si esprime, per quanto abbiamo provato, come

$$S_{d,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2} x^T \Pi_{d,\varepsilon} x$$

dove $\Pi_{d,\varepsilon}$ si ottiene risolvendo un'equazione di Riccati.

Osserviamo, che comunque si scelgano $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$, si ha

$$\begin{aligned} S_d(x) &= \sup_{\substack{u \\ 0}} - \int_0^{t_1} u^T (Cx + D_0 u) dt \geq \sup_{\substack{u \\ t_1 \geq 0}} - \int_0^{t_1} u^T (x + D_0 u) dt = \\ &= S_{d,\varepsilon_1}(x) \geq \sup_{\substack{u \\ t_1 \geq 0}} - \int_0^{t_1} u^T (Cx + D_0 u) dt = S_{d,\varepsilon_2}(x) \end{aligned} \quad (2.16)$$

cosicchè $S_{d,\varepsilon}(x)$ è per ogni x funzione crescente al decrescere di ε e limitata superiormente da $S_d(x)$.

Allora esiste una matrice $\bar{\Pi} > 0$, tale da aversi:

$$S_d(x) > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_{d,\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \Pi_{d,\varepsilon} x = \frac{1}{2} x^T \bar{\Pi} x \quad (2.17)$$

Se in (2.17) valesse il segno di disuguaglianza, per la definizione di $S_d(x)$ esisterebbero un ingresso u ed un istante $t_1 > 0$ per cui

$$\int_0^{t_1} u^T (Cx + D_0 u) dt > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_{d,\varepsilon}(x)$$

e quindi esisterebbero un intervallo non puntiforme $(0, \delta]$ di valori di ε ed una costante positiva k per cui:

$$\int_0^{t_1} u^T (Cx + D_0 u) dt > S_{d,\varepsilon}(x) + k$$

Fissiamo un valore di ε abbastanza piccolo da avere

$$\int_0^{t_1} u^T \varepsilon u dt < k \quad \varepsilon < \delta$$

Risulta subito

$$\int_0^{t_1} u^T (Cx + Du) dt > S_{d,\varepsilon}(x)$$

e quindi

$$\sup_{\substack{u \\ t_1 > 0}} \int_0^{t_1} u^T (Cx + Du) dt > S_{d,\varepsilon}(x)$$

che è manifestamente assurda.

Perciò

$$S_d(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_1} u^T x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^T \Pi_{d,\varepsilon} x \quad (2.18)$$

con Π_d computabile (almeno in linea di principio) come

$$\Pi_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_{d,\varepsilon}$$

Abbiamo così provato il

Teor. 2. Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ dissipativo e sia $D_0 + D_0^T$ singolare. Se $S_{d,\varepsilon}$ è nota per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione lavoro disponibile del sistema $\Sigma_\varepsilon = (A, B, C, D_0 + \frac{1}{2}\varepsilon I_m)$, il lavoro disponibile S_d di Σ si ottiene dal limite

$$S_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{d,\varepsilon}$$

Osservazione 2. Vedremo, con riferimento ai problemi di sintesi, che questo teorema non ha interesse dal punto di vista computazionale. Infatti si possono sempre eseguire su una assegnata $W(s)$ P.R. alcune operazioni preliminari (il cosiddetto "preambolo di Foster") in modo da ridursi alla sintesi di una $W(s)$ soddisfacente la condizione $D_0 + D_0^T > 0$.

Esempio 1. Si consideri il sistema $\Sigma = (-1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{s+1})$, realizzazione minima della funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s+1}$.

Poiché $W(s)$ è P.R., Σ è dissipativo.

La funzione lavoro disponibile si determina ricercando la minima soluzione semidefinita positiva dell'equazione in k

$$kA + A^T k + (kB - C^T)(D_0 + D_0^T)^{-1}(B^T k - C) = 0$$

Sostituendo ad A, B, C, D_0 i rispettivi valori, otteniamo l'equazione

$$k^2 - 4k + 1 = 0 \quad (2.19)$$

le cui radici sono $2 \pm \sqrt{3}$. Esse sono entrambe positive, per cui quella da scegliere è la minore. Si ha così

$$S_d(x) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3})x^2$$

Se si desidera determinare tutte le funzioni energia, si deve risolvere la disequazione

$$k^2 - 4k + 1 \leq 0$$

che è soddisfatta per ogni k nell'intervallo $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$. E' chiaro che $S_{r,0}(x) = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3})x^2$.

Esercizio 1. Si risolva il lemma positivo reale in corrispondenza alle due radici dell'equazione (2.19).

Esercizio 2. Si determini la soluzione dell'equazione differenziale di Riccati

$$\frac{dk}{dt} = k^2 + 4k + 1, \quad k(t_1) = 0 \quad (2.20)$$

e si verifichi che $-1(t, 0, t_1)$ tende a $2 - \sqrt{3}$ per $t_1 \rightarrow +\infty$.

LAVORO RICHIESTO

Supponiamo che il sistema dissipativo $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ sia controllabile. Allora certamente la funzione lavoro richiesto (a partire dallo stato zero) è ovunque finita, ed esiste una matrice semidefinita positiva Π_r , tale che

$$S_r(x) = \frac{1}{2} x^T \Pi_r x$$

Vogliamo far vedere che quando $D_0 + D_0^T$ è invertibile, Π_r soddisfa la (1.3) come eguaglianza, e può essere ottenuta come limite per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione di (2.4) per una opportuna scelta della condizione iniziale.

A tale scopo associamo al sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ il funzionale

$$\chi(u, x_1) = - \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x_1 \end{bmatrix} dt + x^T(t_0) K_0 x(t_0) \quad (2.22)$$

che viene calcolato lungo le traiettorie in X che nell'intervallo $[t_0, t_1]$ hanno termine in x_1 (esistono sempre siffatte traiettorie?).

Assumiamo che R sia definita positiva e consideriamo l'equazione di Riccati

$$\dot{K} = -A^T K - KA - Q + KBR^{-1}B^T K \quad (2.23)$$

con la condizione iniziale $K(t_0) = K_0$.

Con i metodi già applicati nel cap. III è facile provare il seguente

Lemma 1 Se sull'intervallo $[t_0, t_1]$ l'equazione (2.23) ammette soluzione per la condizione iniziale $K(t_0) = K_0$, risulta

$$\sup_u \chi(u, x_1) = x_1^T \Pi(t_1, K_0, t_0) x_1 \quad (2.24)$$

Se viceversa l'estremo superiore esiste finito per ogni t_1 con $t_0 \leq t_1 \leq T$, allora (2.23) ammette soluzione sull'intervallo $[t_0, T]$ per la condizione iniziale $K(t_0) = K_0$.

cenno della prova. Dal lemma 1 di III.5 si ha

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & B^T \Pi \\ \Pi B & -Q + \Pi B R^{-1} B^T \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt - x^T \Pi x \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (2.25)$$

Sottraendo (2.25) da (2.22)

$$\begin{aligned} \chi(u, x_1) &= - \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} u^T & x_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & B^T \Pi \\ \Pi B & \Pi B R^{-1} B^T \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix} dt + x_1^T \Pi(t_1, K_0, t_0) x_1 = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} (u + R^{-1} B^T \Pi x)^T R (u + R^{-1} B^T \Pi x) dt + x_1^T \Pi(t_1, K_0, t_0) x_1 \end{aligned}$$

ed è immediata la conclusione.

E' lasciata in esercizio la prova della seconda parte del lemma. ■

Teor.3 Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ dissipativo e controllabile, e sia invertibile $R = D_0 + D^T$. L'equazione differenziale di Riccati

$$\frac{dK}{dt} = -\hat{A}^T K - K \hat{A} - \hat{Q} + KBR^{-1}B^T K \quad (2.26)$$

con $\hat{A} = A - BR^{-1}C$, $\hat{Q} = -C^T R^{-1}C$ ammette soluzioni su tutto il semiasse positivo dei tempi quando la condizione iniziale è una matrice $-K_0$ con $K_0 \geq \Pi_r$, e risulta

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} -\Pi(t, -K_0, 0) = -\Pi_r \quad (2.27)$$

prova. Si consideri la funzione $g: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x_1, t_1) = \sup_u \left(- \int_0^{t_1} 2u^T y dt - x^T(0) K_0 x(0) \right) \quad (2.28)$$

Per la scelta di K_0 e perchè S_r è una funzione energia, sussiste la catena di disuguaglianze

$$- \int_0^{t_1} 2u^T y dt - x(0)^T K_0 x(0) \leq - \int_0^{t_1} 2u^T y dt - x(0)^T \Pi_r x(0) \leq -x_1^T \Pi_r x_1 \quad (2.29)$$

e quindi $g(x_1, t_1)$ ha per ogni $t_1 \geq 0$ $-x_1^T \Pi_r x_1$ come confine superiore.

Dalla definizione di lavoro richiesto a partire dallo stato zero, fissato un $\epsilon > 0$ esiste un T_ϵ tale che, per $t_1 > T_\epsilon$ e per una opportuna scelta dell'ingresso u , si ha:

$$- \int_0^{t_1} 2u^T y dt \geq -x_1^T \Pi_r x_1 - \epsilon$$

e quindi

$$-x_1^T \Pi_r x_1 \geq - \int_0^{t_1} 2u^T y dt - x^T(0) K_0 x(0) \geq -x_1^T \Pi_r x_1 - \epsilon$$

Ma allora

$$-x_1^T \Pi_r x_1 \geq g(x_1, t_1) \geq -x_1^T \Pi_r x_1 - \epsilon$$

e passando al limite per $t_1 \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} g(x_1, t_1) = -x_1^T \Pi_r x_1 \quad (2.30)$$

Riscriviamo (2.28) nella forma

$$g(x_1, t_1) = \sup_{\tilde{u}} (-\int_{t_1}^{t_1} [\tilde{u}^T \tilde{x}] \left[\begin{array}{cc} R & 0 \\ 0 & -C^T R^{-1} C \end{array} \right] \tilde{x} dt - \tilde{x}^T(0) K_0 x(0))$$

$$\dot{\tilde{x}} = (A - BR^{-1}C)\tilde{x} + B\tilde{u} = \hat{A}\tilde{x} + \hat{B}\tilde{u}$$

Poichè l'estremo superiore esiste finito per ogni $t_1 \geq 0$ (cfr. (2.29)), la equazione differenziale

$$\dot{\tilde{K}} = -\hat{A}^T \tilde{K} - \hat{K} \hat{A} - \hat{Q} + \hat{K} \hat{B} \hat{B}^T \hat{K}$$

con la condizione iniziale $K(0) = -K_0$ ha soluzione sull'intervallo $[0, t_1]$ qualunque sia $t_1 \geq 0$, ed è

$$g(x_1, t_1) = x_1^T \Pi(t_1, -K_0, 0) x_1 \quad (2.31)$$

Passando al limite per $t_1 \rightarrow +\infty$ su (2.31) e tenendo conto di (2.30), si ha

$$-x_1^T \Pi_R x_1 = \lim_{t_1 \rightarrow +\infty} x_1^T \Pi(t_1, -K_0, 0) x_1 \quad (2.32)$$

Poichè (2.32) vale per ogni $x_1 \in X$, la (2.27) è provata. ■

Coroll.2. Π_2 è la massima soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati (2.2).

prova. Basta passare al limite per $t \rightarrow +\infty$ sulla (2.26), una volta sostituita a K la soluzione $\Pi(t, -K_0, 0)$. ■

Problema 1. Come si può scrivere il lavoro richiesto nel caso in cui $D_0 + D_0^T$ non sia invertibile?

La determinazione di Π_d ed Π_r dai passaggi al limite (2.12) e (2.32) di solito non è praticabile. La ricerca diretta delle soluzioni semidefinite positive di (2.2) porta ad un sistema di equazioni algebriche di grado crescente al crescere della dimensione del sistema, affrontabile con l'applicazione di tecniche numeriche. Si ottengono così tutte le soluzioni dell'equazione algebrica di Riccati e fra esse vanno scelte Π_d e Π_r .

Di solito conviene adattare il metodo numerico esposto in IV.3: su questo aspetto computazionale del problema torneremo nel corso del paragrafo 5.

3. Matrici non real-ridotte e realizzazioni dissipative

In questo paragrafo restringiamo lo studio della dissipatività ai sistemi lineari descritti da una particolare classe di matrici P.R., le cosiddette matrici non real-ridotte.

Quando questi sistemi sono osservabili e controllabili, è possibile fornire una espressione in forma chiusa degli ingressi corrispondenti al lavoro disponibile e al lavoro richiesto e ricavare interessanti proprietà delle funzioni energia.

Sappiamo dal cap. VI che una matrice P.R. $W(s)$ soddisfa, sull'asse immaginario, la condizione

$$W(j\omega) + W^T(j\omega) = W(j\omega) + W^T(-j\omega) \geq 0 \quad (3.1)$$

La matrice (3.1) non è altro che la parte hermitiana di $W(s)$ lungo lo asse immaginario (a meno di un fattore 2) e si vede facilmente che essa non possiede alcun polo su tale asse, incluso il punto all'infinito. Quindi la definizione della matrice (3.1) può essere prolungata con continuità a tutto l'asse immaginario, compresi i punti di polo per $W(j\omega)$.

Si ha così il seguente

Teor.1 Se $W(s)$ è P.R., esiste una costante reale $k > 0$ tale che per ogni ω reale, incluso il punto all'infinito, è

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) \leq k I_m \quad (3.2)$$

cenno della prova. Per il lemma 1 di III.3, risulta

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [W(j\omega) + W^T(-j\omega)] = D_0 + D_0^T \leq \lambda_M I_m$$

dove λ_M indica il massimo autovalore di $D_0 + D_0^T$. Esiste allora una pulsazione ω_0 tale che, per $|\omega| > \omega_0$, è anche

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) \leq (\lambda_M + 1) I_m$$

Consideriamo poi la funzione continua

$$f: S^m \times [-\omega_0, \omega_0] \rightarrow R$$

$$f: (v, \omega) \mapsto v^T [W(j\omega) + W^T(-j\omega)] v$$

dove S^m indica la ipersfera dei vettori v in $\mathbb{C}^m$ soddisfacenti la condizione $v^T v = 1$. f è una funzione continua a valori reali definita su un insieme chiuso e limitato: quindi è dotata di massimo e di minimo assoluti.

Detto M tale massimo assoluto, per ogni $v \in \mathbb{C}^m$ e per ogni ω con $|\omega| \leq \omega_0$ è verificata la disuguaglianza

$$v^T [W(j\omega) + W^T(-j\omega)] v \leq M v^T v = v^T (M I_m) v$$

Indicato con k il più grande fra M e $(\lambda_M + 1)$, si conclude. ■

In generale nella (3.2) la disuguaglianza di sinistra non vale in senso "forte" per ogni ω : in altre parole possono esistere valori di ω , incluso il punto all'infinito, in cui $W(j\omega) + W^T(-j\omega)$ non è definita positiva, ma soltanto semidefinita.

La sottoclasse della classe delle matrici P.R. $W(s)$ per cui $W(j\omega) + W^T(-j\omega)$ è definita positiva per ogni valore di ω , incluso il punto all'infinito, gode di interessanti proprietà, per cui conviene individuare gli elementi con un nome specifico.

Def.1 La matrice P.R. $W(s)$ non è real-ridotta se in tutti i punti dello asse immaginario la sua parte hermitiana ha rango pieno, ossia se per ogni $\omega \in \mathbb{R}^e$ si ha

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) > 0 \quad (3.3)$$

Esercizio 1. (3.3) per $\omega = \infty$ si traduce nell'invertibilità di $D_0 + D_0^T$, qualunque realizzazione si consideri per $W(s)$.

Esercizio 2. Se $W(s)$ non è real-ridotta, $W^{-1}(s)$ non è real-ridotta.

Con tecniche analoghe a quelle impiegate nella prova del teorema 1 si prova anche il

Teor.2 Se $W(s)$ è P.R. non real-ridotta, esiste una costante reale $h > 0$ tale che per ogni ω reale, incluso il punto all'infinito, è

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) \geq h I_m \quad (3.4)$$

Consideriamo ora un sistema controllabile e dissipativo $\Sigma = (A, B, C, D_0)$, con $D_0 + D_0^T$ invertibile, indichiamo al solito con Π_d e Π_r la minima e la massima soluzione semidefinita positiva dell'equazione di Riccati

$$KA + A^T K + (KB - C^T)^{-1} (B^T K - C) = 0 \quad (3.5)$$

corrispondenti rispettivamente al lavoro disponibile e al lavoro richiesto, e poniamo

$$A_d \triangleq A - BR^{-1}C + BR^{-1}B^T \Pi_d \quad (3.6)$$

$$A_r \triangleq A - BR^{-1}C + BR^{-1}B^T \Pi_r \quad (3.7)$$

I seguenti teoremi 3 e 4 pongono in relazione lo spettro di A_d , lo spettro di A_r , il "gap" $\Delta \Pi = \Pi_r - \Pi_d$ e la proprietà di $W(s) = D_0 + C(sI - A)^{-1} B$ di non essere real-ridotta.

Teor.3 Sia $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ controllabile e dissipativo e sia $D_0 + D_0^T$ invertibile. Si equivalgono i fatti seguenti:

- i) $\Delta \Pi > 0$
- ii) $\operatorname{Re} \lambda(A_r) > 0$
- iii) $\operatorname{Re} \lambda(A_d) < 0$

prova. i) $\Rightarrow$ ii) e ii) $\Rightarrow$ iii)

Poichè Π_d e Π_r soddisfano (3.5), si ha con facili calcoli

$$A_d^T \Delta \Pi + \Delta \Pi A_d = -\Delta \Pi BR^{-1} B^T \Delta \Pi \quad (3.8)$$

$$A_r^T \Delta \Pi + \Delta \Pi A_r = \Delta \Pi BR^{-1} B^T \Delta \Pi \quad (3.9)$$

e quindi

$$(\Delta \Pi)^{-1} A_d^T + A_d (\Delta \Pi)^{-1} = -BR^{-1} B^T \quad (3.10)$$

$$(\Delta \Pi)^{-1} A_r^T + A_r (\Delta \Pi)^{-1} = BR^{-1} B^T \quad (3.11)$$

Dalla controllabilità della coppia (A, B) deriva l'osservabilità delle coppie $(A_d^T, R^{-1/2} B^T)$ e $(A_r^T, R^{-1/2} B^T)$ e basta applicare il lemma di Lya punov a (3.10) e (3.11) per concludere.

ii) $\Rightarrow$ i) e iii) $\Rightarrow$ i).

Supponiamo sia $\operatorname{Re} \lambda(A_d) < 0$ e consideriamo l'equazione in X

$$A_d X + X A_d^T = -BR^{-1} B^T \quad (3.12)$$

Per il lemma 2 di III.8, (3.10) ammette una sola soluzione K data da:

e sia $v = [\alpha_1 + j\beta_1, \dots, \alpha_m + j\beta_m]^T \neq 0$ un vettore in $\mathbb{C}^m$ tale che

$$v^T \left[W^T(-j\omega_0) + W(j\omega_0) \right] v = 0$$

Introduciamo la funzione (*)

$$G_T(\omega) = T(\text{sinc}(\omega - \omega_0)T + \text{sinc}(\omega + \omega_0)T) \quad T \in \mathbb{R}_{++}$$

che, com'è noto, è la Fourier trasformata del segnale scalare dello spazio L^2 (°°)

$$g_T(t) = (\cos \omega_0 t) \pi [-T, T](t)$$

Almeno una colonna di B è diversa dalla colonna nulla (per la controllabilità). Non è restrittivo supporre che non sia nulla la prima colonna, e poniamo

$$U_T(j\omega) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + j\beta_1) e^{j2\pi\omega/\omega_0} \\ (\alpha_2 + j\beta_2) \\ \vdots \\ (\alpha_m + j\beta_m) \end{bmatrix} G_T(\omega) \quad (3.16)$$

$U_T(j\omega)$ è la Fourier trasformata del segnale vettoriale complesso

$$u_T(t) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + j\beta_1) g_T(t + 2\pi/\omega_0) \\ (\alpha_2 + j\beta_2) g_T(t) \\ \vdots \\ (\alpha_m + j\beta_m) g_T(t) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

In fig. 1 è indicato l'andamento di $g_T(t + 2\pi/\omega_0)$: è chiaro che in (3.16) il termine $e^{j2\pi\omega/\omega_0}$ corrisponde a un anticipo di un periodo nel dom.t. Applicando in ingresso al sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ considerato sul corpo complesso il segnale (3.17) si ha una uscita, i cui elementi sono funzioni di L^2 perchè $W(s)$ è P.R., e per il teorema di Parseval risulta

(°) Come nel corso di Comunicazioni Elettriche, sinc x denota $\frac{\sin x}{x}$
(°°) $\pi[-T, T](t)$ denota l'impulso rettangolare di ampiezza unitaria fra gli istanti $-T$ e T .

$$K = \int_0^{+\infty} \exp(A_d t) B R^{-1} B^T \exp(A_d^T t) dt \quad (3.13)$$

e K è definita positiva per la controllabilità della coppia (A_d, B) che rende invertibile (3.13). Posto $\Pi = K^{-1}$ si ha

$$\Pi A_d + A_d^T \Pi = -\Pi B R^{-1} B^T \Pi, \quad \Pi > 0 \quad (3.14)$$

Se riusciamo a provare che la matrice $\bar{\Pi} = \Pi_d + \Pi$ è una soluzione di (3.3), dalla $\Pi_d > \bar{\Pi} > \Pi_d$ abbiamo subito $\Delta \Pi > 0$.

Per (3.12) risulta

$$(\bar{\Pi} - \Pi_d) A_d + A_d^T (\bar{\Pi} - \Pi_d) = -(\bar{\Pi} - \Pi_d) B R^{-1} B^T (\bar{\Pi} - \Pi_d)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \bar{\Pi} (A - B R^{-1} C) + \bar{\Pi} B R^{-1} B^T \bar{\Pi} + (A - B R^{-1} C)^T \bar{\Pi} + \bar{\Pi}_d B R^{-1} B^T \bar{\Pi}_d - \bar{\Pi}_d A_d^T - A_d^T \bar{\Pi}_d = \\ & = -\bar{\Pi} B R^{-1} B^T \bar{\Pi} - \bar{\Pi}_d B R^{-1} B^T \bar{\Pi}_d + \bar{\Pi} B R^{-1} B^T \bar{\Pi}_d + \bar{\Pi}_d B R^{-1} B^T \bar{\Pi} \end{aligned}$$

Aggiungendo e togliendo $C^T R^{-1} C$, si vede che $\bar{\Pi}$ soddisfa (3.5) se Π_d soddisfa l'uguaglianza

$$-\Pi_d A_d - A_d^T \Pi_d + \Pi_d B R^{-1} B^T \Pi_d - C^T R^{-1} C = 0 \quad (3.15)$$

Sostituendo ad A_d la sua espressione data da (3.4), si constata che (3.13) equivale a richiedere che Π_d risolva (3.5). Ma Π_d risolve effettivamente (3.5).

Che $\text{Re } \lambda(A_2) > 0$ implichi $\Delta \Pi > 0$ si prova in maniera affatto analoga. ■

Teor. 4 Se $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è controllabile e dissipativo, con D_0^T invertibile, e se il gap $\Delta \Pi = \Pi - \Pi_d$ è definito positivo, allora $W(s) = D_0 + C(sI - A)^{-1} B$ non è real-ridotta.

Se $W(s)$ è P.R. non real-ridotta, ogni sua realizzazione minima presenta un gap definito positivo.

prova. Supponiamo dapprima che Σ sia controllabile e dissipativo e che sia $\Delta \Pi > 0$. Per assurdo, assumiamo che alla pulsazione $\omega_0 \neq 0$ risulti

$$\text{rank}(W^T(-j\omega_0) + W(j\omega_0)) < m$$

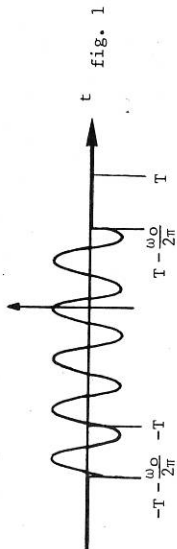


fig. 1

$$\operatorname{Re} \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{+\infty} u_T(t)y(t)dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_T^T(j\omega) (W^T(-j\omega) + W(j\omega)) U_T(j\omega) d\omega \quad (3.18)$$

E' un facile esercizio verificare che Σ raggiunge lungo la traiettoria uno stato $x_0 \neq 0$ in qualche istante τ , con $-T - \omega_0/2\pi < \tau \leq -T$. Risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{\tau} u_T^T(t)y(t)dt &= \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{\tau} \operatorname{Re} u_T^T(t) \operatorname{Re} y(t) dt + \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{\tau} \operatorname{Im} u_T^T(t) \operatorname{Im} y(t) dt \\ &= \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{\tau} \operatorname{Re} x_0^T \operatorname{Re} x_0 + \int_{-T-\frac{\omega_0}{2\pi}}^{\tau} \operatorname{Im} x_0^T \operatorname{Im} x_0 \\ &\leq (\operatorname{Re} x_0^T) \frac{\pi r}{2} (\operatorname{Re} x_0) + (\operatorname{Im} x_0^T) \frac{\pi r}{2} (\operatorname{Im} x_0) = x_0^T \frac{\pi r}{2} x_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Analogamente dalla definizione di lavoro disponibile si ha

$$\operatorname{Re} \int_{\tau}^{+\infty} u_T^T(t)y(t)dt \geq -x_0^T \frac{\pi d}{2} x_0 \quad (3.20)$$

Quindi, da (3.16), (3.17), (3.18):

$$0 < x_0^T \frac{\pi r - \pi d}{2} x_0 \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_T^T(j\omega) (W^T(-\omega) + W(j\omega)) U(j\omega) d\omega$$

Se facciamo divergere il parametro T , che fornisce nel dominio del tempo la durata del segnale u_T , lo stato x_0 viene sempre raggiunto in un istante compreso fra $-T - \omega_0/2\pi$ e $-T$, e quindi la (3.20) è sempre verificata.

Ma, al divergere di T , $U_T(j\omega)$ tende alla distribuzione impulsiva

$$U_{\infty}(j\omega) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + j\beta_1) \\ \alpha_2 + j\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_m + j\beta_m \end{bmatrix} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

e l'integrale (3.18) tende a $v^T (W^T(-j\omega_0) + W(j\omega_0)) v = 0$

Ciò è manifestamente in contrasto con (3.18).

Che $W(j\omega) + W^T(-j\omega)$ abbia rango pieno per $\omega = 0$ si vede in modo affatto analogo scegliendo $g_T(t) = u^T[-T, T](t)$.

Supponiamo ora viceversa che $W(s)$ sia PR. non real-ridotta e che $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ ne sia una realizzazione controllabile, osservabile e quindi dissipativa.

Esistono allora 2 costanti positive h e k per cui si ha

$$0 < h \mathbb{I}_{\underline{m}} \leq W(j\omega) + W^T(-j\omega) \leq k \mathbb{I}_{\underline{m}}$$

e il lavoro disponibile $x^T \frac{\pi d}{2} x$ e il lavoro richiesto $x^T \frac{\pi r}{2} x$ sono forme definite positive.

Quando si pilota Σ dallo stato zero allo stato $x \neq 0$ al tempo T , abbiamo

$$0 < x^T \frac{\pi r}{2} x \leq \int_0^T u^T y dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^T u^T(j\omega) (W(j\omega) + W^T(-j\omega)) U(j\omega) d\omega \leq$$

$$\leq \frac{k}{4\pi} \int_0^T u^T(j\omega) U(j\omega) d\omega = \frac{k}{2} \int_0^T u^T u dt$$

e quindi

$$\int_0^T u^T u dt \geq k^{-1} x^T \frac{\pi r}{2} x \quad (3.21)$$

Il sistema $\bar{\Sigma} = (A, B, C, D_0 - \frac{h}{2} \mathbb{I}_{\underline{m}})$ è ancora controllabile, osservabile e dissipativo, e le funzioni lavoro disponibile $x^T (\pi d/2) x$ e lavoro richiesto $x^T (\pi r/2) x$ sono ancora forme quadratiche definite positive. L'integrale dell'alimentazione di $\bar{\Sigma}$ si decompone così nell'integrale dell'alimentazione di $\bar{\Sigma}$ e nel termine considerato in (3.21):

$$\int_0^T u^T y dt = \int_0^T u^T y dt + \frac{h}{2} \int_0^T u^T u dt$$

Vale perciò la disuguaglianza

$$\int_0^T u^T y dt \geq x^T \frac{\pi d}{2} x + h k^{-1} x^T \frac{\pi r}{2} x \quad (3.22)$$

Passando in (3.22) all'estremo inferiore su tutte le traiettorie fra 0 ed x , e tenuto conto che $\bar{\pi}_r > 0$, si ha

$$x^T \frac{\pi r}{2} x = \inf_{u, T} \int_0^T u^T y dt \geq x^T \frac{\pi d}{2} x + h k^{-1} x^T \frac{\pi r}{2} x \quad (3.23)$$

D'altra parte $\bar{\Pi}_d$ migliora $\bar{\Pi}_d$ perché, qualunque sia x :

$$\begin{aligned} x^T \frac{\bar{\Pi}_d}{2} x &= \sup_{T, u} (-\int_0^T u^T y dt) = \sup_{T, u} \left(-\int_0^T u^T y dt - \frac{1}{2} \int_0^T u^T u dt \right) \leq \\ &\leq \sup_{T, u} (-\int_0^T u^T y dt) = x^T \frac{\bar{\Pi}_d}{2} x \end{aligned} \quad (3.24)$$

Da (3.23) e (3.24) si ha la catena di disuguaglianze

$$\bar{\Pi}_d \geq \frac{1}{2} + \frac{hk^{-1}}{2} \bar{\Pi}_r > \bar{\Pi}_d \geq \bar{\Pi}_d$$

e quindi $\bar{\Pi}_r - \bar{\Pi}_d > 0$.

Esercizio 3. Si dia un esempio di sistema lineare controllabile ma non osservabile la cui funzione di trasferimento non sia real-ridotta e in cui il gap $\Delta \Pi$ non sia definito positivo, ma soltanto semidefinito positivo.

Ricordiamo dal par.1 che se si assume $S(x) = x^T \frac{\bar{\Pi}}{2} x$, con $\bar{\Pi}$ soluzione non negativa dell'equazione di Riccati (3.5), allora lungo la traiettoria dell'equazione $\dot{x} = Ax + Bu$ la funzione di dissipazione vale

$$d(x, u) = \frac{1}{2} \|u - R^{-1}(B^T \bar{\Pi} C)x\|_R^2$$

Se l'ingresso u si ottiene in retroazione da x secondo la $u = R^{-1}(B^T \bar{\Pi} C)x$: allora è

$$\int_{t_0}^{t_1} u^T w(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} d(x, u) dt + x^T \frac{\bar{\Pi}}{2} x \Big|_{t_0}^{t_1} = x^T \frac{\bar{\Pi}}{2} x \Big|_{t_0}^{t_1}$$

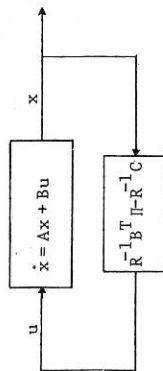


Fig. 2

e l'evoluzione dello stato in Σ corrispondente a tale ingresso è retta dalla equazione omogenea.

$$\dot{x} = (A + BR^{-1}B^T \bar{\Pi} - BR^{-1}C)x \quad (3.25)$$

Supponiamo ora che Σ soddisfi la condizione $\Delta \Pi = \bar{\Pi}_r - \bar{\Pi}_d > 0$, cosicché per il teor.3 $\text{Re } \lambda(A_r) > 0$ e $\text{Re } \lambda(A_d) < 0$.

Per $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_d$, la soluzione di

$$\dot{x} = A_d x \quad (3.26)$$

è infinitesima per $t \rightarrow +\infty$ qualunque sia lo stato iniziale, mentre per $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}_r$ la soluzione di

$$\dot{x} = A_r x \quad (3.27)$$

è infinitesima per $t \rightarrow +\infty$.

Abbiamo così il seguente

Teor.5 Il sistema controllabile e dissipativo $\Sigma = (A, B, C, D)$ soddisfa la condizione $\Delta \Pi > 0$. A partire da qualsiasi stato x_0 per $t = t_0$, lo ingresso $u_d = R^{-1}(B^T \bar{\Pi}_d - C)x$ estrae da Σ il lavoro disponibile sull'intervallo $[t_0, +\infty)$.

Se $x(t)$ è la soluzione di (3.27) sull'intervallo $(-\infty, t_0]$ con la condizione $x(t_0) = x_0$, gli ingressi $u_r^{(n)} = R^{-1}(B^T \bar{\Pi}_r - C)x$ portano Σ dallo stato $x(t_0 - n)$ allo stato x_0 sull'intervallo $[t_0 - n, t_0]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), e risulta

$$S_r(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0 - n}^{t_0} u_r^{(n)T} y dt = x_0^T (t_0 - n) x_0$$

La prova è ovvia. ■

In particolare il teor.5 è valido per le realizzazioni minime di matrici P.R. non real-ridotte.

4. Il lemma positivo reale per sistemi senza perdite

Le condizioni viste nel par. 1 si specializzano in modo significativo quando $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è senza perdite.

Teor.1 Sia dato il LS $\Sigma = (A, B, C, D_0)$. Sono equivalenti le seguenti proposizioni:

- (o) Σ è dissipativo senza perdite
 (i) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_1$ delle matrici $\Pi \geq 0$ per cui la forma quadratica $S(x) = x^T \frac{\Pi}{2} x$ soddisfa la condizione

$$\int_{t_0}^{t_1} w(t) dt = x^T \frac{\Pi}{2} x \Big|_{t_0}^{t_1}$$

lungo ogni traiettoria del sistema.

- (ii) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_2$ delle soluzioni semidefinite positive della equazione in K

$$\begin{bmatrix} D + D^T & C - B^T K \\ 0 & 0 \\ C^T - K B & -A^T K - K A \end{bmatrix} = 0 \quad (4.1)$$

- (iii) Non è vuoto l'insieme $\mathcal{S}_3$ delle matrici Π semidefinite positive che soddisfano le eguaglianze

$$\begin{aligned} \Pi A - A^T \Pi &= 0 \\ \Pi B &= C^T \\ 0 &= D + D^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

Gli insiemi $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ coincidono.

La prova della equivalenza di o) i) ii) è già stata data. E' facile verificare che ii) e iii) si equivalgono e che $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ coincidono: lo lasciamo come esercizio, sulla traccia del teor.1 di par.1.

Osservazione. Se Σ è controllabile e senza perdite $\mathcal{S}_1$ (e quindi $\mathcal{S}_2$ ed $\mathcal{S}_3$) contengono una sola soluzione.

Le equazioni (4.2) vanno sotto il nome il LEMMA POSITIVO REALE SENZA PERDITE.

E' naturale chiedersi se la soluzione di (4.2) possa essere ottenuta in modo più semplice della soluzione di (1.2), che ha richiesto l'impiego dell'equazione di Riccati per determinare almeno qualche ternadi matrici che soddisfatti (1.2).

Per fortuna la risposta è affermativa. Essa è contenuta nel seguente

Teor.2 Se il sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è controllabile e senza perdite, la unica soluzione Π non negativa di (4.2) si ottiene con operazioni lineari sulle matrici del sistema.

prova. La matrice Π verifica le relazioni

$$\begin{aligned} \Pi B &= C^T \\ \Pi A B &= -A^T \Pi B = -A^T C^T \\ \Pi A^2 B &= -A^T \Pi A B = (A^T)^2 C^T \\ &\dots\dots\dots \\ \Pi A^{n-1} B &= (-1)^{n-1} (A^T)^{n-1} C^T \end{aligned} \quad (4.3)$$

Indicando con $\mathcal{X}$ la matrice di controllabilità di Σ e con $\hat{O}$ la matrice

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} C^T & -A^T C^T & \dots & (-1)^{n-1} (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$\Pi \mathcal{X} = \hat{O} \quad (4.4)$$

Poichè $\mathcal{X}$ ha rango pieno, l'unica soluzione di (4.4) è

$$\Pi = \hat{O} \mathcal{X}^{-1} (\mathcal{X} \mathcal{X}^T)^{-1} \quad (4.5)$$

Si osservi che se Σ è controllabile e se a priori non ne sono note la dissipatività e l'assenza di perdite, un criterio per verificarle è quello di

- (i) costruire Π secondo (4.5)
- (ii) verificare se $\Pi \geq 0$
- (iii) verificare se $D_0 + D_0^T = 0$

5. Aspetti computazionali (cenni).

La determinazione della matrice Π_d che fornisce il lavoro dissipabile del sistema dissipativo $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ si può affrontare, quando $R = D_0 + D_0^T$ è invertibile, ricercando la minima soluzione semidefinita negativa $-\Pi_d$ dell'equazione algebrica di Riccati

$$-K(A-BR^{-1}C) - (A-BR^{-1}C)^T + KBR^{-1}B^TK + C^TR^{-1}C = 0 \quad (5.1)$$

Rinviamo ad [A.1.7] per una dettagliata esposizione anche di altre tecniche, qui indichiamo brevemente come adattare alla soluzione di (5.1) il metodo numerico esposto in IV.3, nell'ipotesi che Σ sia controllabile ed osservabile.

Poniamo $\Pi_0 = 0$ e consideriamo le equazioni

$$A_i = A - BR^{-1}C - BR^{-1}B^T\Pi_i \quad (5.2)$$

$$\Pi_{i+1}A_i + A_{i+1}^T\Pi_{i+1} = C^TR^{-1}C - \Pi_i BR^{-1}B^T\Pi_i \quad (5.3)$$

La soluzione del sistema (5.2), (5.3) con la determinazione successiva di $A_0, \Pi_1, A_1, \Pi_2, \dots$ fornisce una sequenza $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ decrescente e convergente a $-\Pi_d$.

Si noti che $A_0 = A - BR^{-1}C$ è stabile (cfr. par. 1, es. 3) e la coppia (A_0, C) è osservabile: quindi da

$$\Pi_1 A_0 + A_0^T \Pi_1 = C^T R^{-1} C \quad (5.4)$$

si ottiene $\Pi_1 < 0$ ricorrendo al lemma di Lyapunov. Per il lemma 2 di III.8 e tenuto conto del fatto che $-\Pi_d$ è soluzione di (5.1), l'equazione

$$\Pi_d + \Pi_1 = \int_0^\infty \exp(A_0^T t) \Pi_d B^T R^{-1} B^T \Pi_d \exp(A_0 t) dt \geq 0 \quad (5.5)$$

prova che Π_1 è compresa fra 0 e $-\Pi_d$.

A questo punto si procede come in cap. IV: si assume induttivamente

$$\operatorname{Re} \lambda(A_{i-1}) \leq 0 \quad (5.6)$$

$$-\Pi_d \geq \Pi_i \geq \Pi_{i-1} > 0$$

e si prova che

$$-\Pi_d \geq \Pi_{i+1} \geq \Pi_i \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Re} \lambda(A_i) \leq 0$$

La dimostrazione di (5.7) è lasciata in esercizio. Passando al limite in (5.3) per $i \rightarrow \infty$ si ha allora che la sequenza $\Pi_1, \Pi_2, \dots$ converge a $-\Pi_d$.

Un altro argomento computazionalmente importante è quello della ri-

cerca di basi nello spazio X che conducano a soluzioni del lemma PR in cui la matrice Π sia l'identità. Sussiste in proposito il seguente teorema:

Teor. 1 Se un L.S. dissipativo ammette una funzione energia immagazzinata definita positiva, esiste una base nello spazio degli stati con riferimento alla quale l'energia immagazzinata è il quadrato della norma (usuale) del vettore di stato.

prova. Sia (Π, H, J) una soluzione del lemma PR rispetto ad una base generica in cui il sistema è descritto dalle matrici A, B, C, D_0 :

$$\begin{aligned} \Pi A + A^T \Pi &= -H^T H & \Pi > 0 \\ \Pi B &= C^T - H^T J & (5.8) \\ D + D^T &= J^T J \\ 0 &= J^T J \end{aligned}$$

Esiste allora (cfr. III.3) una matrice M invertibile che fattorizza nella forma

$$M^T M = \Pi \quad (5.9)$$

e interpretando M come matrice di cambiamento di base si passa dalla realizzazione $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ alla realizzazione $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D_0) \triangleq (MAM^{-1}, MB, CM^{-1}, D_0)$.

Premoltiplicando (5.8.1) per $(M^T)^{-1}$ e postmoltiplicandola per M^{-1} si ottiene

$$MAM^{-1} + (MAM^{-1})^T = \tilde{A} + \tilde{A}^T = -(HM^{-1})^T (HM^{-1})$$

Premoltiplicando (5.8.2) per $(M^T)^{-1}$ si ha

$$MB = (CM^{-1})^T - (HM^{-1})^T J$$

e perciò una soluzione del lemma PR per $\tilde{\Sigma}$ è la terna $(\tilde{A}, HM^{-1}, J)$. ■

6. Fattorizzazione spettrale

Gli argomenti che qui accenniamo brevemente hanno rilevanza particolare nella teoria del filtraggio, che sarà oggetto di altri corsi.

A noi basta mettere in evidenza in quale senso il lemma positivo reale può essere considerato la controparte "algebrica" della fattorizzazione spettrale nel dominio s , e far intravedere la possibilità di ricondurre ad una radice comune una vasta classe di problemi nati in campi applicativi diversi.

Ricordiamo che la dissipatività del sistema lineare $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è definibile in termini di esistenza di una funzione quadratica semidefinita positiva: $S: X \rightarrow R_+$, soddisfacente la relazione

$$S(x_1) - S(x_2) = x^T \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} x^T (C + D_0^T u) dt \quad (6.1)$$

Nel par.1 si è visto che (6.1) è equivalente ad una serie di condizioni (lemma positivo reale, risolubilità di talune disequazioni matriciali). Nell'ulteriore ipotesi che Σ sia controllabile, (6.1) è anche equivalente - come è noto - al fatto che $W(s) = D_0 + C(sI - A)^{-1}B$ sia P.R.

La fattorizzazione spettrale di $W(s) + W^T(-s)$ può essere inserita in questo sistema di equivalenze. Torna tuttavia utile, per ottenere un quadro più completo delle implicazioni che hanno le varie ipotesi, estendere in qualche misura la nozione di sistema dissipativo lasciando cadere l'assunzione che S sia semidefinita positiva.

Def.1 La forma quadratica $S: X \rightarrow R: x \mapsto x^T \frac{1}{2} x (\Pi + \Pi^T)$ è una "energia con segno" del sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ rispetto alla funzione di alimentazione $w = u^T y$ se per ogni stato iniziale x_0 e per ogni ingresso u che porti Σ nello stato x_1 , risulta

$$\int_{t_0}^{t_1} w dt \geq S(x_1) - S(x_0) \quad (6.2)$$

Teor.1 Sono equivalenti le seguenti proposizioni

- (i) Σ è dotato di una funzione energia con segno
 (ii) esiste una matrice simmetrica Π che soddisfa la disequazione in K

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_0^T & C - B^T K \\ 0 & 0 \\ C^T - KB & -A^T K - KA \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.3)$$

- (iii) esiste una terna di matrici (Π, H, J) , con $\Pi = \Pi^T$, che soddisfa il LEMMA POSITIVO REALE GENERALIZZATO:

$$\begin{aligned} \Pi A + A^T \Pi &= -H^T H \\ \Pi B &= C^T - H^T J \\ J^T J &= D_0 + D_0^T \end{aligned} \quad (6.4)$$

La dimostrazione segue la linea di prova del teor.2 di V.4 e del teor.1 par.1. E' lasciata come esercizio.

Teor.2 Se il sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ è dotato di una funzione energia con segno, e se $W(s)$ ne è la funzione di trasferimento, allora

- (i) $W^T(-s) + W(s)$ è semidefinita positiva sull'asse immaginario
 (ii) esiste una matrice $\psi(s)$, i cui elementi sono funzioni razionali a coefficienti reali, che è un "fattore spettrale" $W^T(-s) + W(s)$:

$$W^T(-s) + W(s) = \psi^T(-s) \psi(s) \quad (6.5)$$

Se Σ è controllabile, ciascuna delle condizioni i) e ii) è sufficiente per assicurare che Σ ammette una funzione energia con segno

prova. Se Σ ha funzione energia con segno S , esiste una soluzione Π (6.3), e per ogni $\omega \in R$ si ha

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_0^T & C - B^T \Pi \\ 0 & 0 \\ C^T - \Pi B & (-j\omega \Pi - A^T) \Pi + \Pi (j\omega \Pi - A) \end{bmatrix} \geq 0$$

Premoltiplicando per $\begin{bmatrix} \Pi & B^T(-j\omega \Pi - A^T)^{-1} \end{bmatrix}$ e postmoltiplicando per

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ (j\omega \Pi - A)^{-1} \Pi \end{bmatrix}$$

si ottiene $W^T(-j\omega) + W(j\omega) \geq 0$.

Scrivendo la (6.3) nella forma

$$\begin{bmatrix} D_0 + D_0^T & C - B^T \Pi \\ 0 & 0 \\ C^T - \Pi B & (-s \Pi - A^T) \Pi + \Pi (s \Pi - A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^T & J \\ H^T & H \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

è sufficiente premoltiplicare entrambi i membri di (6.6) per

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^T(-sI-A)^{-1}I$$

e postmoltiplicarli per

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (sI-A)^{-1}B$$

Si ottiene

$$W^T(-s) + W(s) = \begin{bmatrix} J + H(-sI-A)^{-1}B \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} J + H(sI-A)^{-1}B \end{bmatrix}$$

e quindi

$$W(s) = J + H(sI-A)^{-1}B \quad (6.7)$$

è un fattore spettrale.

Viceversa, se $W^T(-j\omega) + W(j\omega)$ è semidefinita positiva per ogni ω reale e se Σ è controllabile, allora per ogni ingresso u che abbia supporto sull'intervallo $[0, t_1]$ e a cui corrisponda in X una traiettoria passante per l'origine ai tempi 0 e t_1 risulta

$$\int_0^{t_1} w(t)dt \geq 0 \quad (6.8)$$

Infatti u ed y sono entrambi elementi di L^2 (il loro supporto è in $[0, t_1]$), trasformabili secondo Fourier in elementi di L^2 , e si può così applicare la formula di Parseval. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} w(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^T y dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U^T(j\omega) Y(j\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U^T(j\omega) [W(j\omega) + W^T(j\omega)] U(j\omega) d\omega \geq 0 \end{aligned}$$

Come conseguenza di (6.8) la funzione (corrispondente al lavoro richiesto nei sistemi dissipativi) $S : X \rightarrow \mathbb{R}^e$ definita ponendo

$$S(x) = \inf_{\substack{u \\ t_1 \geq t_0}} \int_{t_0}^{t_1} w(t)dt \quad (6.9)$$

è finita per ogni x . Se infatti fosse $S(x) = -\infty$ per qualche $x \in X$, fissata una traiettoria $\vec{y}_1$ nello spazio X che porti dallo stato x allo stato zero, esisterebbe sempre una traiettoria $\vec{y}_2$ dallo stato

zero allo stato x per cui risulta

$$\int_{\vec{y}_2} w(t)dt < \int_{\vec{y}_1} w(t)dt$$

e quindi, in contrasto con (6.8),

$$\int_{\vec{y}_1 + \vec{y}_2} w(t)dt < 0$$

La funzione S così ottenuta non è necessariamente non negativa in ogni stato (quando ciò si verifica Σ è dissipativo) ed è una forma quadratica su X . Per verificare che essa soddisfa la condizione (6.2), e quindi che è una energia con segno, basta procedere come in V.2:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} w(t)dt &= \inf_{\substack{u \\ t_0 \rightarrow x_0}} \int_0^{t_0} w(t)dt + \int_0^{t_1} w(t)dt - \inf_{\substack{u \\ t_0 \rightarrow x_1}} \int_0^{t_1} w(t)dt \geq \\ &\geq \inf_{\substack{u \\ 0 \rightarrow x_1}} \int_0^{t_1} w(t)dt - \inf_{\substack{u \\ 0 \rightarrow x_0}} \int_0^{t_1} w(t)dt = S(x_1) - S(x_0) \end{aligned}$$

Se infine $W^T(-s) + W(s)$ ammette un fattore spettrale, chiaramente per ogni ω reale si ha

$$W^T(-j\omega) + W(j\omega) = V^T(-j\omega) \Psi(j\omega) = V^T(j\omega) \Psi(j\omega) \geq 0$$

Quindi ii) $\Rightarrow$ i) e per quanto abbiamo già provato Σ ammette una energia con segno. ■

Osservazione 1 Potrebbe sorgere il dubbio che la parte della prova che coinvolge il teorema di Parseval avrebbe potuto dimostrare anche

la relazione $\int_0^{t_1} w(t)dt \geq 0$ e quindi dimostrare che Σ è dissipativo

senza che sia soddisfatta l'analiticità di $W(s)$ per $\text{Re } s > 0$. In realtà, se u ha supporto in $[0, t_1]$ ma se $x(t_1)$ è non nullo, il supporto di y è $[0, +\infty)$, almeno in generale, e poiché la applicabilità del teorema di Parseval è limitata al caso che y sia in L^2 , si dovrà introdurre l'ulteriore ipotesi sull'analiticità di $W(s)$ per $\text{Re } s > 0$.

Osservazione 2 Si prova facilmente che se Σ è controllabile e soddisfa (6.8) per ogni ciclo che passa per lo stato zero, allora per

ogni ciclo $\vec{\gamma}$ descritto nello spazio X , anche se esso non passa per lo stato zero, si ha

$$\oint_{\vec{\gamma}} \dot{w}(t) dt \geq 0 \quad (6.10)$$

Tale condizione può essere suggestivamente espressa dicendo che Σ è "dissipativo lungo tutte le traiettorie cicliche". In generale un sistema dissipativo sulle traiettorie cicliche può non essere dissipativo. Ad esempio il sistema $\Sigma = (1, -1, -1, 0)$, realizzazione minima di

$$W(s) = \frac{-1}{s-1} \quad (6.11)$$

è dissipativo sulle traiettorie cicliche, perché è

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \geq 0$$

Ovviamente Σ non è dissipativo, e questo si vede sia indirettamente dal fatto che $W(s)$ non è PR, sia direttamente in quanto la risposta al gradino unitario in ingresso (a partire dallo stato zero) vale $(1-e^t)\delta_1(t)$ e l'integrale della alimentazione corrispondente è

$$\int_0^t w(t) dt = \int_0^t (1-e^t) dt = t - e^t + 1 \quad (6.12)$$

Per t sufficientemente grande, (6.12) è negativo.

E' interessante notare che (6.11) è la impedenza del circuito lineare con induttanza negativa di fig.1. Si può dimostrare che le reti elettriche lineari costruite con resistenze positive, con induttanze positive e/o negative e con capacità positive e/o negative soddisfano la condizione (6.10), e quindi sono dotate di una energia con segno.

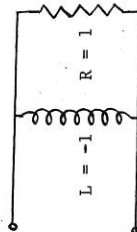


fig.1

Osservazione 3 La relazione

$$\int_0^T \dot{w}^T y dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \dot{w}^T(j\omega) \dot{w}(j\omega) + W(j\omega) U(j\omega) d\omega \quad u \in L^2$$

che vale nei sistemi dissipativi, e la relazione

$$\oint_0^T \dot{w}^T y dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^T \dot{w}^T(j\omega) \dot{w}(j\omega) + W(j\omega) U(j\omega) d\omega$$

che vale nei sistemi dotati di energia con segno, danno nel dominio ω una rappresentazione del lavoro complessivamente fornito dall'ingresso u . E' allora naturale interpretare

$$\frac{1}{2\pi} \dot{w}^T(j\omega) \dot{w}(j\omega) + W(j\omega) U(j\omega) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi(j\omega) U(j\omega) \right|^2$$

come la "densità spettrale di tale lavoro. Un significato della fattorizzazione spettrale è quello che la densità può essere ottenuta "razionalmente" a partire dall'ingresso: infatti per quanto detto in cap III, da

$$W(j\omega) + W^T(j\omega) \geq 0$$

segue sì l'esistenza per ogni $\omega \in \mathbb{R}$ di una matrice $\Psi(j\omega)$ che soddisfa la relazione

$$W(j\omega) + W^T(j\omega) = \dot{w}^T(j\omega) \Psi(j\omega)$$

ma non è ovvio che $\Psi(j\omega)$ possa essere la restrizione all'asse immaginario di una matrice razionale a coefficienti reali.

Il teor.2 contiene implicitamente un risultato di natura formale assai interessante

Def.2 Una matrice $M(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}$ si dice parahermitiana se $M(s) = M^T(-s)$.

Coroll.1 Una matrice $M(s) \in \mathbb{R}(s)^{n \times n}$ ammette un fattore spettrale se e solo se è parahermitiana e semidefinita positiva sull'asse immaginario.

prova. Se $M(s)$ ammette un fattore spettrale, risulta

$$M(s) = \dot{w}^T(-s) \Psi(s)$$

e quindi

$$M^T(-s) = \dot{w}^T(-s) \Psi(s) = M(s)$$

$$M(j\omega) = \dot{w}^T(-j\omega) \Psi(j\omega) = \dot{w}^T(j\omega) \Psi(j\omega) \geq 0$$

Se viceversa $M(s)$ è parahermitiana e se $M(j\omega)$ è semidefinita positiva per ogni reale, allora $M(s)/2 \stackrel{\Delta}{=} W(s)$ soddisfa la

$$W(s) + W^T(-s) = M(s) \quad (6.13)$$

Particolarizzando (6.13) all'asse immaginario, si ha

$$W(j\omega) + W^T(-j\omega) = M(j\omega) \geq 0$$

Per il teor. 2 $W^T(-s) + W(s) = M(s)$ ammette un fattore spettrale: infatti ogni realizzazione controllabile di $W(s)$ ammette un'energia con segno e quindi esiste un fattore spettrale che soddisfa (6.5).

Se $W(s)$ non è realizzabile perché $M(s)$ ha un polo all'infinito, la matrice $\tilde{M}(s) = M(s)/s^{4\nu}$ per ν sufficientemente elevato è priva di poli all'infinito, è parahermitiana ed è semidefinita positiva sull'asse immaginario. Indicato con $\tilde{V}(s)$ un fattore spettrale di $\tilde{M}(s)$, $\Psi(s) = \tilde{V}(s)s^{2\nu}$ è un fattore spettrale di $M(s)$. ■

Esercizio 1 Quali condizioni devono soddisfare i poli immaginari di una matrice parahermitiana?

Esercizio 2 Sia $M(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$. Si equivalgono le seguenti condizioni:

- $M(s)$ è parahermitiana, semidefinita positiva per $s = j\omega$, priva di poli sull'asse immaginario, incluso il punto all'infinito.
- esiste una matrice $W(s)$ PR per cui risulta

$$M(s) = W(s) + W^T(-s)$$

Suggerimento: si sviluppi $M(s)$ in funzioni parziali, e si sommino le parti principali relative ai poli in $\text{Re } s < 0$.

Esercizio 3 E' unica la matrice PR $W(s)$ che soddisfa nel precedente esercizio l'equazione $M(s) = W(s) + W^T(-s)$?

Esercizio 4 La matrice $U(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times m}$ è detta paraunitaria se $U_m = U^T(-s)U(s)$.

i) $U(s)$ è analitica sull'asse immaginario, incluso il punto all'infinito Suggerimento: $\left| \sum_{k=1}^m u_{rk}(j\omega) \right|^2 = 1, k = 1, 2, \dots, n$.

ii) se $M(s)$ è parahermitiana, tale rimane $U(s)M(s)$

iii) se $U(s)$ è analitica con la propria inversa per $\text{Re } s > 0$, allora $U(s)$ è una matrice "costante" ortogonale Suggerimento: $U^{-1}(s) = U^T(-s)$ implica l'analiticità di $U(s)$ su tutto il piano di Gauss.

Il teorema 2 ed il corollario 1 ci introducono ad una vasta classe di problemi, alcuni dei quali di notevole difficoltà.

Data la particolare simmetria dei poli esibita dalle matrici parahermitiane, è naturale chiedersi se esse ammettono fattori spettrali i cui poli appartengono interamente ad uno dei semipiani in cui il piano complesso è diviso dall'asse immaginario. Una particolarezzazione di questo problema (in cui si impone al fattore spettrale di essere analitico insieme con il suo inverso nel semipiano $\text{Re}(s) \geq 0$) è di importanza cruciale nella soluzione dell'equazione di Wiener-Hopf per sistemi multivariabili.

Strettamente collegati con il problema precedente sono il problema della unicità del fattore spettrale soddisfacente determinate specifiche e quello della costruzione effettiva del/dei fattori spettrali stessi.

Infine, quando $M(s)$ si ottiene come

$$M(s) = W(s) + W^T(-s) \quad (6.14)$$

e $W(s)$ è realizzabile da un sistema $\Sigma = (A, B, C, D_0)$ dotato di energia con segno, la soluzione di (6.4) porta alla costruzione di fattori spettrali. E' questa una prima parziale risposta al problema delle relazioni intercorrenti fra i fattori spettrali di $M(s)$ e le realizzazioni di $W(s)$. In realtà si possono avere risposte più complete: la fattorizzazione spettrale soddisfacente determinate caratteristiche è equivalente (e non soltanto conseguente) alla soluzione della (6.4) e quindi alla costruzione di funzioni energia con segno per realizzazioni ciclicamente dissipative.

Considereremo brevemente in par. 7 questi problemi, restringendo però l'orizzonte a situazioni più particolari di quelle per le quali oggi è disponibile un'analisi esauriente.

7. Struttura dei fattori spettrali

La struttura dei fattori spettrali di una assegnata matrice parahermitiana $M(s)$ soddisfacente la condizione $M(j\omega) \geq 0$ è stata indagata da Youla. Le prove che qui daremo non coprono sempre l'estensione

degli enunciati, ma costituiscono interessanti applicazioni di tecniche già studiate. Per le prove complete rinviamo a [Y.1.1]

Teor.1 [YOUJA] Sia $M(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una matrice parahermitiana semidefinita positiva sull'asse immaginario. Se $r \leq m$ è il rango di $M(s)$ su $\mathbb{R}(s)$ esiste un fattore spettrale $\Psi_o(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times m}$ che soddisfa le ipotesi seguenti:

- i) $\Psi_o(s)$ è analitico per $\operatorname{Re} s > 0$
- ii) $\Psi_o(s)$ ha rango completo r in tutti i punti del semipiano $\operatorname{Re} s > 0$.

$\Psi_o(s)$ è unico a meno della moltiplicazione a sinistra per una arbitraria matrice ortogonale $r \times r$.

I fattori spettrali $\Psi_1(s) \in \mathbb{R}(s)^{r \times m}$ che soddisfano soltanto la ipotesi i) sono tutte e sole le matrici

$$\Psi_1(s) = U(s) \Psi_o(s)$$

con $U(s)$ arbitraria matrice $r \times r$ paraunitaria analitica per $\operatorname{Re} s > 0$.

prova. Supponiamo dapprima che esista un fattore $\Psi_o(s)$ soddisfacente i) e ii), e supponiamo che $\Psi_1(s)$ sia un altro fattore soddisfacente l'ipotesi i):

$$M(s) = \Psi_o^T(-s) \Psi_o(s) = \Psi_1^T(-s) \Psi_1(s) \quad (7.1)$$

La matrice $\Psi_o(s) \Psi_o^T(s)$ è certamente invertibile su $\mathbb{R}(s)$, e

$$U(s) = \Psi_1(s) \Psi_o^T(s) (\Psi_o(s) \Psi_o^T(s))^{-1}$$

soddisfa la relazione

$$(U(s) \Psi_o(s) - \Psi_1(s)) \Psi_o^T(s) = 0$$

Poiché $\Psi_o^T(s)$ ha rango r su $\mathbb{R}(s)$, si conclude che

$$U(s) \Psi_o(s) = \Psi_1(s) \quad (7.2)$$

Tenendo conto di (7.1), si verifica che $U(s)$ è paraunitaria:

$$U^T(-s) U(s) = I_r$$

e poiché $\Psi_o(s) \Psi_o^T(s)$ ha rango r in ogni punto di $\operatorname{Re} s > 0$, la inversa $(\Psi_o(s) \Psi_o^T(s))^{-1}$ e quindi $U(s)$ sono analitiche per $\operatorname{Re} s > 0$.

Se $\Psi_1(s)$ ha rango pieno per $\operatorname{Re} s > 0$, per (7.2) anche $U(s)$ ha rango pieno per $\operatorname{Re} s > 0$, e per l'esercizio 4 di par.6 $U(s)$ è una matrice ortogonale. Ciò dimostra la seconda parte del teorema.

La prova completa della prima parte si basa sulla forma canonica di Smith McMillan, ed è assai lunga. Supponiamo però che $M(s)$ sia priva di poli sull'asse immaginario e non singolare all'infinito: allora esiste una matrice $PRW(s)$ che verifica le relazioni

$$M(s) = W(s) + W^T(-s)$$

(7.3)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = D_o$$

$$D_o + D_o^T > 0$$

Se $\Sigma = (A, B, C, D_o)$ è una realizzazione minima di $W(s)$, gli autovalori di A appartengono al semipiano $\operatorname{Re} s \leq 0$ e poiché Σ è dissipativo, esiste una matrice $\Pi_d > 0$ associata al lavoro disponibile. La terna $(\Pi_d, (J^T)^{-1}(B^T \Pi_d - C), J)$ considerata in par.2 oss.1 è soluzione del lemma P.R. rispetto a Σ , e con Σ fornisce un fattore spettrale di $M(s)$ analitico per $\operatorname{Re}(s) > 0$ (cfr. es.2 e 3, par.1):

$$J + (J^T)^{-1}(B^T \Pi_d - C)(sI - A)^{-1} B \quad (7.4)$$

L'invertibilità di $J \in \mathbb{R}^{m \times m}$ implica che l'inverso di (7.4) possa essere espresso nella forma

$$J^{-1} - R^{-1}(B^T \Pi_d - C)(sI - A + BR^{-1} B^T \Pi_d - BR^{-1} C) B J^{-1} \quad (7.5)$$

ed è sufficiente provare l'analiticità di (7.5) per $\operatorname{Re} s > 0$ per concludere che (7.4) è il fattore spettrale $\Psi_o(s)$ che cerchiamo.

Tale analiticità deriva dalla struttura dello spettro di $A_d = A - BR^{-1} C + BR^{-1} B^T \Pi_d$ dimostrata nel lemma seguente. ■

(*) Scegliendo, com'è possibile, una $W(s)$ analitica sull'asse immaginario, si può anche provare che $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$. Si è preferito non utilizzare qui questa possibilità perché il risultato cui conduce ($\Psi_o(s)$ analitica anche sull'asse immaginario) non è valido nelle ipotesi più generali in cui il teorema è stato enunciato.

Della possibilità di scegliere $W(s)$ priva di poli immaginari ci avvarremo nel Coroll. 1.

Lemma 1 Se il sistema $\dot{x} = (A, B, C, D_0)$ è dissipativo con $D_0 + D_0^T = R > 0$ e se il lavoro disponibile $S_d(x) = x^T \Pi_d x / 2$ è una forma quadratica semidefinita positiva, allora

$$A_d = A - BR^{-1}C + BR^{-1}B^T \Pi_d \quad (7.6)$$

non ha autovalori con parte reale positiva.

prova. Ricordiamo che $-\Pi_d$ è stato ottenuto in par 2 come il limite, per $t \rightarrow -\infty$, della soluzione $\Pi(t, 0, 0)$ dell'equazione

$$\begin{aligned} \dot{K} &= -(A - BR^{-1}C)^T K - K(A - BR^{-1}C) + KBR^{-1}B^T K + C^T R^{-1}C \\ K(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

E' facile constatare che $\Pi(t, 0, 0)$ decresce al decrescere di t , in quanto decresce per ogni x

$$\inf_{u, x} \int_0^t 2u^T y dt = x^T \Pi(t, 0, 0)x$$

Poiché Π_d è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati (2.2), $L(t) = \Pi_d + \Pi(t, 0, 0)$ sull'intervallo $(-\infty, 0]$ è soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -A_d^T L - LA_d + LER^{-1}B^T L \\ L(0) &= \Pi_d \end{aligned} \quad (7.8)$$

$L(t)$ decresce al decrescere di t , tendendo asintoticamente a zero per $t \rightarrow -\infty$, ma resta definita positiva in un conveniente intorno sinistro $\mathcal{J}$ di $t = 0$, ed in $\mathcal{J}$ l'inversa $N(t)$ di $L(t)$ soddisfa la equazione

$$\begin{aligned} \dot{N} &= A_d N + NA_d^T + BR^{-1}B^T \\ N(0) &= -I_d \end{aligned} \quad (7.9)$$

Poiché (7.9) è lineare, la sua soluzione è prolungabile a tutto l'intervallo $(-\infty, 0]$, ed anche la relazione

$$L(t)N(t) = I \quad (7.10)$$

da $\mathcal{J}$ si estende a $(-\infty, 0]$ utilizzando la continuità di $L(t)$ e di $N(t)$. Allora $L(t)$ ed $N(t)$ sono definite positive su $(-\infty, 0]$, e l'infinitesimalità di L per $t \rightarrow -\infty$ implica l'infinitesimalità per $t \rightarrow -\infty$

del massimo autovale di L . Ne segue che il minimo autovale di N diverge quando $t \rightarrow -\infty$, e per il lemma 1 di III.3 qualunque vettore $v \in \mathbb{C}^n$ si scelga, risulta

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v^T N(t) v = +\infty \quad (7.11)$$

Se A_d^T avesse un autovale λ con parte reale positiva e se v ne è un autovettore, poniamo

$$n(t) = v^T N(t) v \quad (7.12)$$

Premoltiplicando per v^T e postmoltiplicando per v la (7.9), otteniamo

$$\frac{dn}{dt} = (\lambda + \lambda)n + v^T BR^{-1}B^T v = 2\operatorname{Re} \lambda n + \text{cost} \quad (7.13)$$

$$n(0) = v^T \Pi_d^{-1} v > 0$$

La soluzione di (7.13) per $t \rightarrow -\infty$ è infinitesima, e ciò contrasta con (7.11). ■

Esercizio 1 E' possibile raffinare il risultato del lemma precedente, provando che l'equazione $\dot{x} = A_d x$ ha soluzioni limitate per t qualunque sia la condizione iniziale (A_d "bounded stabile")?

Coroll. 1 [YOTLA] Se $M(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ soddisfa le ipotesi del teor. 1 e inoltre è analitica sull'asse immaginario, l'analiticità di $\psi_0(s)$ si estende all'asse immaginario.

Nell'ulteriore ipotesi che il rango di $M(s)$ sia costantemente r sull'asse immaginario, $\psi_0(s)$ ha rango r in tutti i punti del semipiano $\operatorname{Re} s \geq 0$.

prova (per $M(\infty)$ invertibile) Poiché è possibile scegliere in (7.3) una matrice PR $W(s)$ regolare sull'asse immaginario, il fattore spettrale associato secondo (7.4) ad una sua realizzazione minima è certamente analitico per $\operatorname{Re} s \geq 0$ (*). Se il rango di $M(s)$ è costantemente m sull'asse immaginario, allora $W(s)$ non è real-ridotta e le sue realizzazioni minime soddisfano la condizione $\operatorname{Re} \lambda(A_d) < 0$ per i teor. 3 e 4 di par. 3. Quindi anche $\psi_0(s)$ ha rango completo m per $\operatorname{Re} s \geq 0$. ■

(*) cfr. nota al teor. 1.

Esercizio 2 Si estenda la prova del coroll.1 al caso in cui $M(s)$ ha rango $r < m$.

Coroll.2 Se $M(s) \in R(s)^{m \times m}$ soddisfa le ipotesi del coroll.1 e se $W(s)$ è la matrice PR analitica sull'asse immaginario per cui si ha $M(s) = W(s) + W^T(-s)$, allora

i) il fattore spettrale $\psi_0(s)$ di $M(s)$ e $W(s)$ hanno il medesimo grado di McMillan

ii) esistono realizzazioni minime di $\psi_0(s)$ e di $W(s)$ aventi le medesime matrici A e B .

prova. Per quanto abbiamo visto sul grado di McMillan di un prodotto (cfr. II.6)

$$\begin{aligned} \delta[M(s)] &= \delta[\psi_0^T(-s)\psi_0(s)] \leq \delta[\psi_0^T(-s)] + \delta[\psi_0(s)] = \\ &= 2\delta[\psi_0(s)] \end{aligned} \quad (7.14)$$

Tenuto conto che $W^T(-s)$ e $W(s)$ hanno disgiunti gli insiemi dei poli, si ha

$$\delta[M(s)] = \delta[W(s)] + \delta[W^T(-s)] = 2\delta[W(s)] \quad (7.15)$$

Quando $M(\omega)$ è invertibile, (7.4) fornisce una realizzazione di $\psi_0(s)$ con le medesime matrici A e B di una realizzazione minima di $W(s)$. Si ha così $\delta[W(s)] \geq \delta[\psi_0(s)]$ e tenuto conto di (7.14) si provano sia i) che ii).

Quando $M(\omega)$ ha rango minore di m e in particolare quando $M(s)$ ha rango $r < m$ su $R(s)$, la dimostrazione è alquanto laboriosa e qui viene omessa (cfr. [A.1], pag. 249 e segg.) ■

Osservazione 1 Nel teor.2 di par 6 abbiamo visto che se il sistema $\Sigma = (A, B, C, D)$ soddisfa il lemma positivo reale generalizzato, allora ogni soluzione (H, H', J) del lemma fornisce un fattore spettrale per $W^T(-s) + W(s)$.

Abbiamo anche detto che - in un certo senso - le cose si invertono: la conoscenza di fattori spettrali per $W^T(-s) + W(s)$ consente cioè di risalire a soluzioni del lemma, se valgono opportune ipotesi.

Supponiamo infatti di avere una realizzazione minima $\Sigma_W = (A, B, C, D)$ di una matrice PR $W(s)$ ed una realizzazione minima Σ_{ψ_0} .

(F, G, H, J) del fattore spettrale $\psi_0(s)$ di $W(s) + W^T(-s)$ considerato nel teor.1. E' sempre possibile, effettuando eventualmente un cambiamento di base, decomporre Σ_W nella somma di due sottosistemi $\Sigma_- = (A_-, B_-, C_-, D_-)$ e $\Sigma_+ = (A_+, B_+, C_+, D_+)$: il secondo - senza perdite - realizza i poli immaginari di $W(s)$, mentre il primo - dissipativo - realizza i restanti poli di $W(s)$ e la sua funzione di trasferimento $W_-(s)$ verifica la condizione

$$W_-(s) + W_-^T(-s) = \psi_0^T(-s)\psi_0(s)$$

Per il coroll.2 esiste una realizzazione minima di $\psi_0(s)$ le cui due prime matrici coincidono con le prime due di Σ_- . Tale realizzazione $\Sigma' = (A_-, B_-, H', J)$ è unica e viene individuata da Σ_{ψ_0} e da A_- , B_- , nel senso che tali matrici sono sufficienti per individuare il cambiamento di base tra Σ_{ψ_0} e Σ'_{ψ_0} .

Per il lemma 2 di III.8, l'equazione lineare nell'incognita K

$$KA_- + A_-^T K = -H'^T H' \quad (7.15)$$

ha un'unica soluzione $\Pi_- > 0$, ricavabile con tecniche standard. Essa può essere introdotta nella fattorizzazione di $W(s) + W^T(-s)$:

$$\begin{aligned} \psi_0^T(-s)\psi_0(s) &= J^T J + J^T H' (sI - A_-)^{-1} B_- + B_-^T (-sI - A_-^T)^{-1} H' + \\ &+ B_-^T (-sI - A_-^T)^{-1} \Pi_- (sI - A_-) \Pi_- (sI - A_-)^{-1} B_- = \\ &= J^T J + (J^T H' + B_-^T \Pi_-) (sI - A_-)^{-1} B_- + B_-^T (-sI - A_-^T)^{-1} (\Pi_- B_- + H'^T J) \end{aligned}$$

Eguagliando (7.16) con

$$W^T(-s) + W(s) = (D_+ + D_-^T) + C_-^T (sI - A_-)^{-1} B_- + B_-^T (-sI - A_-^T)^{-1} C_-$$

si ottiene subito che la terna (Π_-, H', J) soddisfa le equazioni

$$\begin{aligned} \Pi_- A_- + A_-^T \Pi_- &= -H'^T H' \\ \Pi_- B_- &= C_-^T - H'^T J \\ D_+ + D_-^T &= J^T J \end{aligned} \quad (7.17)$$

La costruzione di una matrice $\Pi_- > 0$ che soddisfi le equazioni

$$\Pi_I A_I + A_I^T \Pi_I = 0$$

$$\Pi_I B_I = C_I^T \quad (7.18)$$

è immediata dal par.4 e quindi la terna $\begin{pmatrix} \Pi & 0 \\ 0 & \Pi_I \end{pmatrix}, [H' | 0], J$

verifica il lemma positivo reale rispetto alla realizzazione di $W(s)$

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B_I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C \\ C_I \end{bmatrix}, D \right)$$

E' chiaro che qualora si disponga di una prova di esistenza e/o di una tecnica di costruzione del fattore spettrale $\psi_0(s)$ indipendenti dal lemma PR, il contenuto di questa osservazione fornisce una nuova prova del lemma PR e/o una tecnica di costruzione delle soluzioni indipendenti dall'uso dell'equazione di Riccati. Per una discussione di questi argomenti rinviando a [A.1] ed a [Y.1].

Osservazione 2 Sia $\Sigma = (A, B, C, D)$ una realizzazione dissipativa della matrice PR $W(s)$ e sia (H, H_I, J) una soluzione del lemma PR rispetto a Σ . Il numero r di righe di H e di J determina il numero delle righe del fattore spettrale $\psi(s) = J + H(sI - A)^{-1}B$ che da tale soluzione si può costruire per $W(s) + W^T(-s)$. Poichè il rango di $\psi(s)$ su $\mathbb{R}(s)$ non può essere inferiore a quello di $W^T(-s) + W(s)$,

$$r \geq \text{rank}(W^T(-s) + W(s)) \triangleq \rho \quad (7.19)$$

D'altra parte il fattore spettrale $\psi_0(s)$ del teor.1 ha r righe, e per l'osservazione 1 se Σ è controllabile ed osservabile la soluzione del lemma PR che si ottiene da Σ e da $\psi_0(s)$ ha le matrici H e J con un numero di righe uguale a ρ . Quindi per ogni realizzazione minima di $W(s)$ esiste una soluzione del lemma PR in cui il numero dirighe di H e J raggiunge il confine inferiore ρ . Si può provare che se Π_d è la matrice del lavoro disponibile della realizzazione minima $\Sigma = (A, B, C, D)$, allora

$$\rho = r_{\min} = \text{rank} \begin{bmatrix} D + D^T & C - B^T \Pi_d \\ 0 & 0 \\ C^T - \Pi_d B & -\Pi_d A - A^T \Pi_d \end{bmatrix}$$

Vedremo nel seguito che ρ rappresenta il numero minimo di resistenze che occorre impiegare nella sintesi di $W(s)$ PR come impedenza di una rete lineare passiva.

Esercizio 3 Se (Π, H, J) è una soluzione del lemma PR in cui H e J hanno ρ righe, allora $[J \ H]$ ha rango pieno.