

APPENDICE ALLA PARTE PRIMA

A.1 Spazi vettoriali

Quanto qui riportato ha soltanto il fine di riassumere fatti e nozioni che sono noti da corsi precedenti (in particolare dal corso di Teoria dei Sistemi). Un'ottima referenza per gli argomenti qui accennati è il testo di S. Lang "Algebra lineare".

Ricordiamo che un corpo $\mathbb{F}$ è un insieme sul quale sono definite due operazioni binarie (addizione e moltiplicazione) per cui valgono gli assiomi:

- (i) $\mathbb{F}$ è un gruppo commutativo rispetto all'addizione
- (ii) se 0 è l'elemento neutro dell'addizione, $\mathbb{F} - \{0\}$ è gruppo commutativo rispetto alla moltiplicazione.
- (iii) la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione

Gli esempi più comuni di corpo sono

- $\mathbb{Q}$ (numeri razionali)
- $\mathbb{R}$ (numeri reali)
- $\mathbb{C}$ (numeri complessi).

Questi tre corpi sono infiniti (nel senso che contengono infiniti elementi); esistono peraltro anche corpi finiti, e si può anzi provare che per ogni intero positivo p^n (con p primo ≥ 1 ed n naturale) esiste un corpo finito contenente p^n elementi.

Esempio 1. Il corpo di due elementi, indicato con $\mathbb{Z}/(2)$ (leggi: "corpo degli interi modulo 2") non è altro che l'anello booleano sull'insieme $\{0,1\}$, già noto ad alcuni da corsi precedenti. Le operazioni definite dalle tavole

addizione			moltiplicazione		
+	0	1	·	0	1
0	0	1		0	0
1	1	0		1	0

atteggiano $\{0,1\}$ a corpo, nel senso che sono soddisfatti gli assiomi (i) (ii) (iii) sopra citati.

Osservazione: non sono un corpo i numeri interi $\mathbb{Z}$, nè sono un corpo, rispetto all'usuale somma e prodotto fra matrici, le matrici dell'insieme $\mathbb{F}^{n \times n}$, con $\mathbb{F}$ corpo qualsiasi, quando $n > 1$ (perchè?)

Def. 1 Un insieme W è uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{F}$ se:

- (i) W è dotato di un'operazione binaria (addizione) rispetto alla quale è gruppo commutativo:

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

- (ii) $\mathbb{F} \times W$ è dotato di una applicazione in W , detta "prodotto scalare"

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \times W &\mapsto W \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned} \tag{1.2}$$

che soddisfa le seguenti quattro proprietà

- $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $(\alpha \beta) v = \alpha(\beta v)$
- $1 \cdot v = v$

qualunque siano $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$; $v_1, v_2, v \in W$.

Esempi di spazi vettoriali (si verifichi che sono soddisfatte (i) e (ii) di def. 1)

- se $\mathbb{F}$ è un corpo, l'insieme $\mathbb{F}^n$ delle n -uple di elementi di $\mathbb{F}$ si atteggia a s.v. su $\mathbb{F}$ ponendo:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} &\triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \\ \gamma \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1 \\ \vdots \\ \gamma \alpha_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- L'insieme $\mathcal{C}[0,1]$ delle funzioni reali a valori reali definite sull'intervallo $[0,1]$ si atteggia a spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se si definiscono somma e prodotto nel modo usuale:

$$(f+g)(x) \triangleq f(x) + g(x) \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall f, g \in \mathcal{C}[0,1]$$

$$(\alpha f)(x) \triangleq \alpha(f(x)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- l'insieme delle funzioni sinusoidali di assegnata pulsazione ω si atteggia a s.v. su $\mathbb{R}$ (come?)

- l'insieme $\mathbb{F}[z]$ dei polinomi nell'indeterminata z sul corpo $\mathbb{F}$ si atteggia a s.v. su $\mathbb{F}$.

- l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi si atteggia a s.v. sul corpo $\mathbb{R}$.

- l'insieme $\mathbb{R}$ e l'insieme $\mathbb{C}$ si atteggiano a s.v. sul corpo $\mathbb{Q}$.

- l'insieme delle matrici $\mathbb{F}^{p \times q}$ a valori sul corpo $\mathbb{F}$ si atteggia a s.v. sul medesimo corpo $\mathbb{F}$.

E' ben noto che cosa intendiamo con "combinazione lineare di vettori", e che cosa significhino "dipendenza" e "indipendenza" lineare". Possiamo dare così la seguente

Def. 2 Un insieme $\mathcal{B}$ di elementi di V è un insieme di generatori se ogni elemento di V è combinazione lineare (con combinatori del corpo $\mathbb{F}$ su cui è dato W !) di elementi di $\mathcal{B}$:

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_t b_t \quad b_1, \dots, b_t \in \mathcal{B} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{F}$$

Se $\mathcal{B}$ è tale che nessun suo sottoinsieme proprio è un insieme di generatori, allora $\mathcal{B}$ si dice una "base" per V .

Si noti che mentre è cosa ovvia l'esistenza di almeno un insieme di generatori (basta scegliere $\mathcal{B} = V$, ad esempio) non è affatto ovvio che esistano delle basi per uno s.v. generico: questo fatto ed altre proprietà ad esso connesse sono l'oggetto della seguente

Prop. 1

- (i) Da ogni insieme di generatori per lo spazio vettoriale V può essere estratta una base

- (ii) Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è contenuto in qualche base per lo spazio W

- (iii) Tutte le basi dello stesso spazio W hanno la stessa cardinalità (i.e. contengono lo stesso "numero" - anche infinito - di elementi). Il numero di elementi di una (qualsiasi) base di W è detto la "dimensione" di W . ■

Esempi di basi per spazi vettoriali.

- Una base per lo spazio $\mathbb{F}^n$ su $\mathbb{F}$ è costituita dai vettori

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Con riferimento a tale base, che diremo canonica, la generica n -upla vettore di $\mathbb{F}^n$ coincide con la n -upla delle sue componenti rispetto alla base.

- Le funzioni $\{\sin \omega t, \sin(\omega t + \pi/2)\} = \mathcal{B}$ sono una base per lo spazio su $\mathbb{R}$ delle funzioni sinusoidali di pulsazione ω

- I numeri complessi $\{1, j\} = \mathcal{B}$ sono una base per $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$

- I polinomi $\{1, z, z^2, z^3, \dots\} = \mathcal{B}$ sono una base (numerabile) per $\mathbb{F}[z]$ su $\mathbb{F}$.

Si noti che abbiamo sempre detto "una" base, e non "la" base, poichè oltre alla base considerata, ciascuno degli spazi ammette altre basi: al variare della base, cambiano le componenti dei vettori dello spazio.

Def. 3 Se W e W sono spazi vettoriali sul medesimo corpo $\mathbb{F}$, una applicazione

$$\psi: V \rightarrow W \quad (1.3)$$

è una trasformazione lineare se

$$(i) \quad \psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$(ii) \quad \psi(\alpha v) = \alpha \psi(v), \quad \forall v \in V; \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

Esempi di trasformazioni lineari

- la proiezione su un piano passante per l'origine dei vettori dello spazio usuale

- l'applicazione di $\mathbb{F}[z]$ in sè definita ponendo

$$\psi: p(z) \rightarrow h(z) p(z)$$

con $h(z)$ polinomio fisso in $\mathbb{F}[z]$.

- l'applicazione di $\mathbb{C}$ in sè ($\mathbb{C}$ sp. vett. sul corpo $\mathbb{R}$) definita da

$$\psi: c \rightarrow c \cdot d$$

con d numero complesso fisso in $\mathbb{C}$.

Def. 4 Se ψ è una trasformazione lineare di V in W , si definiscono i seguenti sottoinsiemi di W e W rispettivamente:

$$\ker \psi = \{v \in V: \psi(v) = 0\} \quad (1.4)$$

$$\psi(W) = \{w \in W: w = \psi(v) \text{ per qualche } v \in V\} \quad (1.5)$$

Prop. 2

(i) $\ker \psi$ è un sottospazio di V , detto nucleo di ψ .

(ii) $\ker \psi = \{0\}$ se e solo se ψ è iniettiva ($^\circ$)

(iii) $\psi(V)$ è detto l'immagine di V tramite ψ , ed è un sottospazio di W .

(iv) $\psi(W) = W$ se e solo se ψ è suriettiva

(v) Se ψ è iniettiva e suriettiva, W si dice isomorfo a V : in questo caso esiste la mappa inversa $\psi^{-1}: W \rightarrow V$, che è una trasformazione lineare

Nell'ulteriore ipotesi che V abbia dimensione finita, risulta

(vi) $\dim \ker(\psi) + \dim \psi(W) = \dim V$.

Esercizio 1. Se V è sp. vett. di dimensione n su F , V è isomorfo ad F^n

($^\circ$) Una mappa $\psi: V \rightarrow W$ è iniettiva se $\psi(v_1) = \psi(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$; è suriettiva se ogni elemento di W è immagine di qualche elemento di V .

Siano W s.v. di dimensione finita m su F , W s.v. di dimensione finita n su F , $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ una base ordinata per W , $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ una base ordinata per W . Con riferimento a tali basi fissate una volta per tutte con l'ordinamento prescelto, i vettori di W e di W si rappresentano con le m -uple e le n -uple rispettivamente di elementi di F , e per l'isomorfismo dell'esercizio 1 le operazioni di spazio vettoriale da W e da W si riconducono ad operazioni sugli spazi "molto" F^m ed F^n .

Sempre con riferimento a tali basi ordinate, è possibile associare ad una trasformazione lineare ψ da V in W una matrice $M_\psi \in F^{n \times m}$ in modo tale che, per ogni vettore $\sum \alpha_j e_j \in V$, l'immagine secondo ψ

$$\psi(\sum \alpha_j e_j) = \sum \beta_i f_i$$

possa essere computata secondo le usuali regole del prodotto matriciale:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = M_\psi \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

Basterà considerare la matrice $M_\psi = \|m_{ij}\|$ costruita con le componenti sulla base $(f_1, \dots, f_n)$ delle immagini di $e_1, e_2, \dots, e_m$:

$$\psi(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i$$

E' un facile esercizio verificare la validità di (1.6).

Prop. 3 Sia M una matrice sul corpo F : $M \in F^{n \times m}$. Si equivalgono le seguenti definizioni di rango di M (rank M):

- (i) rank M è l'ordine massimo dei minori non nulli di M
- (ii) rank M è la dimensione del sottospazio di F^m generato dalle righe di M
- (iii) rank M è il massimo numero di righe l. indipendenti di M
- (iv) rank M è la dimensione del sottospazio di F^n generato dalle colonne di M
- (v) rank M è il massimo numero di colonne l. indipendenti di M .

Se M_ψ è la matrice associata, nel modo suaccennato, alla trasformazione lineare ψ , risulta:

- Prop. 4 (i) $\text{rank } M_\psi = \dim \psi(V)$
 (ii) $m - \text{rank } M_\psi = \dim \ker(\psi)$
 (iii) Se M_ψ è quadrata e non singolare ψ è un isomorfismo, e viceversa. ■

Def. 5 Una trasf. lineare ψ di V , spazio vettoriale su F , in F , considerato come sp. vett. su sé stesso

$$\psi: V \rightarrow F$$

si dice un funzionale lineare.

I funzionali lineari di V costituiscono uno sp. vett. su F , detto il "duale" di V , ed indicato con V^* . Se $\dim V = n < \infty$, allora $\dim V^* = n$.

Come conclusione, riportiamo un teorema di notevole utilità in molte applicazioni.

Prop. 5 Siano M una matrice $a \times b$, di rango m , ed N una matrice $b \times c$ di rango n . Allora

$$m - (b-n) \leq \text{rank}(MN) \leq m \quad (1.7)$$

prova. Siano T_M e T_N le trasformazioni lineari associate rispettivamente ad M e ad N . Alla matrice prodotto MN resta allora associata la trasformazione lineare $T_{MN} = T_M \circ T_N$, composizione delle mappe T_M e T_N .

Certamente la dimensione dello spazio immagine di T_{MN} (e quindi il rango della matrice MN) non supera la dimensione dello spazio immagine di T_M (e quindi il rango di M), da cui la seconda disuguaglianza in (1.7).

Quanto alla prima disuguaglianza, sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_b\}$ una base per il dominio della trasformazione T_M , scelta in modo tale che $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sia una base per l'immagine di T_N (ciò è possibile per la prop. 1.(ii)).

Risulta allora (°)

$$\begin{aligned} m &= \dim < T_{M^V_1}, \dots, T_{M^V_n}, \dots, T_{M^V_{n+1}}, \dots, T_{M^V_b} > = \\ &= \dim < T_{M^V_1}, \dots, T_{M^V_n} >, < T_{M^V_{n+1}}, \dots, T_{M^V_b} > \leq \\ &\leq \dim < T_{M^V_1}, \dots, T_{M^V_n} > + \dim < T_{M^V_{n+1}}, \dots, T_{M^V_b} > \leq \\ &\leq \dim < T_{M^V_1}, \dots, T_{M^V_n} > + (b-n) \\ &= \text{rank}(MN) + (b-n) \end{aligned}$$

In particolare, se T_N è mappa suriettiva, cioè se $n = \text{rank}(N) = b$, risulta da (1.7)

$$\text{rank}(MN) = \text{rank}(M)$$

(°) Se $\{v_\alpha, \alpha \in A\}$ è un insieme di vettori di uno spazio vettoriale W , con $\langle v_\alpha, \alpha \in A \rangle$ indichiamo il sottospazio di W generato da $\{v_\alpha, \alpha \in A\}$.

A.2 Esponenziali di matrici

Def. 1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. L'esponenziale di A, indicato con $\exp(A)$, è la somma della serie convergente

$$I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots \quad (2.1)$$

Si noti che (2.1) converge per ogni matrice di $\mathbb{R}^{n \times n}$, cosicchè, $\exp(At)$ è definito per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1. In quale senso (2.1) converge? Si provi la convergenza.

L'esponenziale di matrice soddisfa ad alcune proprietà cui soddisfano gli esponenziali di numeri reali.

Prop.1 (i) $\exp(At_1) \exp(At_2) = \exp A(t_1 + t_2)$

(ii) $\exp(A) \exp(-A) = I_n$

(iii) $A \exp(At) = \exp(At) A$

(iv) $\frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At)$

La prova della prop. 1 è lasciata come esercizio.

In generale, non è possibile estendere al caso matriciale la formula $\exp(a+b) = \exp a \exp b$ valida nel caso scalare: la estensione è possibile se e solo se $AB = BA$: in tal caso si ha $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.

Il computo di $\exp(A)$ si esegue con tecniche che qui accenneremo: per maggiori dettagli rinviamo ad Anderson [A.1] ed a Brockett [B.1].

Distingueremo due casi, soffermandoci soprattutto sul più semplice (quello di A diagonalizzabile).

1° CASO: A E' DIAGONIZZABILE

Intendiamo che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile se per similitudine si riduce ad una matrice diagonale $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cioè se esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare tale che

$$\Lambda = M^{-1} A M$$

In generale, anche se il corpo $\mathbb{F}$ è il corpo complesso, la diagonalizzazione non risulta possibile.

Si dimostra che A è diagonalizzabile se e solo se gli autovettori di A (i vettori non nulli $v \in \mathbb{F}^n$ tali che $(\lambda I_n - A)v = 0$ per opportuni autovalori $\lambda \in \mathbb{F}$) generano tutto lo spazio $\mathbb{F}^n$: la diagonale di Λ è costituita da tutti e soli gli autovalori di A, con le rispettive molteplicità.

Lemma 1 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile, e risulta $\Lambda = M^{-1} A M$ con Λ matrice diagonale, allora

$$\exp(A) = M \exp(\Lambda) M^{-1}$$

prova. E' facile verificare che, per ogni intero k non negativo

$$\Lambda^k = M^{-1} A^k M$$

Ne deriva

$$\exp(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^{-1} A^k M = M^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} M = M^{-1} \exp(A) M$$

Lemma 2 Se $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonale

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

allora

$$\exp \Lambda = \begin{bmatrix} \exp \lambda_1 & & 0 \\ & \exp \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \exp \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

La prova è un facilissimo esercizio, e segue immediatamente la

Prop.2 Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è diagonalizzabile, e se $\Lambda = M^{-1} A M$ è la matrice diagonale

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

allora

$$\exp(A) = M \begin{bmatrix} \exp \lambda_1 & & 0 \\ & \exp \lambda_2 & \\ 0 & & \exp \lambda_n \end{bmatrix} M^{-1}$$

Quando A non diagonalizza come elemento di $\mathbb{R}^{n \times n}$, ma diagonalizza come elemento di $\mathbb{C}^{n \times n}$, il polinomio caratteristico $\det(M^{-1}A - \lambda I)$ possiede radici complesse, che figurano in coppie coniugate. Anzi che la matrice M risulta complessa, e ciò può complicare il computo della matrice $\exp(A)$, che si desidera espressa in termini reali.

Si può dimostrare che se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizza su $\mathbb{C}$

$$A = M^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_{r+1} \\ & & & & \lambda_{r+k} \\ & & & & & \lambda_{r+k} \\ & & & & & & \lambda_{r+k} \end{bmatrix} M \quad (2.4)$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ autovalori reali, e $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+k}, \lambda_{r+k}$ autovalori complessi coniugati, è possibile costruire una matrice reale $\tilde{M}$ tale da aversi

(*) Si ricordi - peraltro - che esistono matrici che non diagonalizzano nemmeno sul corpo complesso (in tal caso si ricorre alla forma canonica di Jordan).

$$\tilde{\lambda} = \tilde{M} A \tilde{M}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{r+1} & \\ & & & & \lambda_{r+k} \\ & & & & & \lambda_{r+k} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

(*) $\lambda_{r+1} = \mu_{r+1} + j \nu_{r+1}, \dots, \lambda_{r+k} = \mu_{r+k} + j \nu_{r+k}$. E' chiaro che la matrice $\tilde{\lambda}$, simile alla A assegnata, è diagonale "a blocchi": il lemma seguente ha come immediata conseguenza il computo di $\exp(A)$ quando A diagonalizza a blocchi nella forma $\tilde{\lambda}$.

$$\text{Lemma 3 } \exp \begin{bmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \mu \cos \nu & -\exp \mu \sin \nu \\ \exp \mu \sin \nu & \exp \mu \cos \nu \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

prova. Si osservi che $\begin{bmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix}$ e che le matrici $\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix}$ commutano rispetto al prodotto. Allora risulta

$$\begin{aligned} \exp \begin{bmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{bmatrix} &= \exp \left(\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix} \right) = \exp \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \exp \begin{bmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \exp \mu & 0 \\ 0 & \exp \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \nu & -\sin \nu \\ \sin \nu & \cos \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp \mu \cos \nu & -\exp \mu \sin \nu \\ \exp \mu \sin \nu & \exp \mu \cos \nu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 2. Si calcoli $\exp A$ quando A diagonalizza su $\mathbb{C}$, ma non diagonalizza su $\mathbb{R}$.

III° CASO: A NON E' DIAGONALIZZABILE

In questo caso ci si avvale della forma canonica di Jordan.

Come è dimostrato nella 3ª appendice, esiste una matrice non singolare $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che

$$M^{-1} A M = J \quad (2.8)$$

dove J è la "matrice di Jordan"

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

I blocchi J_i sono del tipo

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

con λ_i autovalore di A , ed è possibile dimostrare che si ha, per $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(J_i t) = \begin{bmatrix} \exp \lambda_i t & t \exp \lambda_i t & \frac{t^2}{2!} \exp \lambda_i t & \dots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \exp \lambda_i t \\ 0 & \exp \lambda_i t & t \exp \lambda_i t & \dots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \exp \lambda_i t \\ 0 & 0 & \exp \lambda_i t & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \exp \lambda_i t \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Se gli autovalori di A non sono tutti reali, gli esponenziali di (2.11) non sono tutti reali, e non è reale la matrice M che consente di ottenere da A la forma canonica J per similitudine.

In questo caso, se si intende operare restando sul corpo reale, è possibile procedere in modo analogo a quello accennato per A diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, e la matrice $\exp A$ conterrà funzioni sinusoidali ed esponenziali: ma su ciò non insistiamo, rinviando ad Anderson [A.1], Brockett [B.1] etc.

Da quanto detto, è immediata la constatazione del significa

to degli autovalori di A nella determinazione del comportamento asintotico per $t \rightarrow +\infty$ di $\exp(At)$.

Se A è diagonalizzabile, $\exp(At)$ è infinitesimo se $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ ed è limitato se $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$.

Se A non è diagonalizzabile, $\exp(At)$ è infinitesimo se $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ ed è limitato se $\operatorname{Re} \lambda(A) \leq 0$ e se i blocchi J_i della forma canonica di Jordan relativi ad autovalori immaginari puri hanno dimensioni 1×1 .

A.3 Forma canonica di Jordan

Com'è noto, la relazione di similitudine sull'algebra $\mathbb{F}^{n \times n}$ delle matrici $n \times n$ sul corpo $\mathbb{F}$ è una relazione di equivalenza. Ha quindi senso porsi il problema di ricercare in $\mathbb{F}^{n \times n}$ un insieme di forme canoniche per la relazione di similitudine.

La soluzione di questo problema è fornita, nel caso di un corpo algebricamente chiuso, dalla forma canonica di Jordan.

Vi sono vari procedimenti per giungere alla forma di Jordan: noi considereremo quello che fa ricorso alla forma di Smith, che abbiamo studiato in II.8. Seguiremo nell'esposizione [G.17], cui rinviamo per ulteriori approfondimenti.

Il fatto fondamentale, che consente di ridurre la relazione di similitudine fra due matrici in $\mathbb{F}^{n \times n}$ ad una condizione sui polinomi invarianti di matrici polinomiali in $\mathbb{F}[s]^{n \times n}$ è contenuto nel seguente

Teor.1 Due matrici A_1 ed A_2 in $\mathbb{F}^{n \times n}$ sono simili se e solo se le matrici $(sI_n - A_1)$ ed $(sI_n - A_2)$ in $\mathbb{F}[s]^{n \times n}$ hanno gli stessi polinomi invarianti.

La prova di questo teorema richiede l'analisi preliminare di alcune proprietà delle matrici lineari binomie in $\mathbb{F}[s]^{n \times n}$.

Una matrice lineare binomia $W(s)$ in $\mathbb{F}[s]^{n \times n}$ è una matrice i cui elementi sono polinomi in s di grado non superiore ad uno:

$$W(s) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}s & a_{12} + b_{12}s & \dots & a_{1n} + b_{1n}s \\ a_{21} + b_{21}s & a_{22} + b_{22}s & \dots & a_{2n} + b_{2n}s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1}s & a_{n2} + b_{n2}s & \dots & a_{nn} + b_{nn}s \end{bmatrix}$$

E' chiaro che $W(s)$ potrà essere scritta nella forma

$$W(s) = D_0 + D_1 s$$

Con

$$D_0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

L'equivalenza per trasformazioni elementari polinomiali fra matrici binomie è riconducibile, sotto opportune ipotesi, ad una equivalenza mediante matrici elementari costanti.

Lemma 1. Siano $W(s) = D_0 + D_1 s$ e $\bar{W}(s) = \bar{D}_0 + \bar{D}_1 s$ matrici lineari binomie in $\mathbb{F}[s]^{n \times n}$, e siano invertibili D_1 e $\bar{D}_1$. Allora, se $W(s)$ e $\bar{W}(s)$ hanno la stessa forma canonica di Smith, esistono due matrici invertibili $\bar{R}, \bar{R} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ per cui è

$$W(s) = \bar{R} \bar{W}(s) \bar{R} \quad (\text{A.3.1})$$

prova. Se $\bar{W}(s)$ e $W(s)$ hanno la medesima forma canonica di Smith, esistono due matrici $\mathcal{E}(s)$ ed $\mathcal{F}(s)$ prodotto di matrici polinomiali elementari per cui risulta

$$D_0 + sD_1 = W(s) = \mathcal{E}(s) \bar{W}(s) \mathcal{F}(s) = \mathcal{E}(s)(\bar{D}_0 + s\bar{D}_1) \mathcal{F}(s) \quad (\text{A.3.2})$$

L'inversa di $\mathcal{E}(s)$ esiste ed è una matrice polinomiale. Abbiamo allora

$$\mathcal{E}^{-1}(s)(D_0 + D_1 s) = (\bar{D}_0 + \bar{D}_1 s) \mathcal{F}(s) \quad (\text{A.3.3})$$

Se consideriamo $\mathcal{E}^{-1}(s)$ e $\mathcal{F}(s)$ come polinomi a coefficienti sull'anello di matrici $\mathbb{F}^{n \times n}$, poichè D_1 e $\bar{D}_1$ sono invertibili, è possibile applicare l'algoritmo di Euclide e dividere $\mathcal{E}^{-1}(s)$ a sinistra per $(\bar{D}_1 s + \bar{D}_0)$ ed $\mathcal{F}(s)$ a destra per $(D_1 s + D_0)$.

Avremo così

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{-1}(s) &= (\bar{D}_1 s + \bar{D}_0) \bar{Q}(s) + \bar{R} \\ \mathcal{F}(s) &= Q(s)(D_1 s + D_0) + R \end{aligned} \quad (\text{A.3.4})$$

$\bar{R}$ ed R sono le matrici resto ed hanno grado minore del grado di $(\bar{D}_1 s + \bar{D}_0)$ e di $(D_1 s + D_0)$ rispettivamente. Quindi $\bar{R}$ ed R sono matrici costanti. (A.3.3.) diventa

$$(\bar{D}_1 s + \bar{D}_0) \bar{Q}(s)(D_0 + D_1 s) - (\bar{D}_1 s + \bar{D}_0) Q(s)(D_1 s + D_0) = (\bar{D}_1 s + \bar{D}_0) R + R(D_1 s + D_0)$$

Quindi

$$(\bar{D}_1 s + \bar{D}_0)(\bar{Q}(s) - Q(s))(D_1 s + D_0) = (\bar{D}_1 s + \bar{D}_0) R + R(D_1 s + D_0)$$

Poiché il grado del secondo membro è al più 1, se fosse $\tilde{Q}(s) - Q(s) \neq 0$ non sarebbe più soddisfatta l'eguaglianza, presentando il primo membro almeno grado 2.

Da $Q(s) = \tilde{Q}(s)$ si trae subito

$$(\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)R = \tilde{R}(D_1 s + D_0) \quad (\text{A.3.5})$$

Se dividiamo ora $\tilde{\mathcal{E}}(s)$ per $(D_1 s + D_0)$ a sinistra, otteniamo

$$\tilde{\mathcal{E}}(s) = (D_1 s + D_0)\tilde{Q}(s) + \tilde{R} \quad (\text{A.3.6})$$

con $\tilde{R}$ una matrice costante.

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathcal{E}^{-1}(s)\tilde{\mathcal{E}}(s) && \text{per (A.3.6)} \\ &= \mathcal{E}^{-1}(s)(D_1 s + D_0)\tilde{Q}(s) + \mathcal{E}^{-1}(s)\tilde{R} && \text{per (A.3.3)} \\ &= (\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)\tilde{\mathcal{Q}}(s) + \mathcal{E}^{-1}(s)\tilde{R} && \text{per (A.3.4)} \\ &= (\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)\tilde{\mathcal{Q}}(s) + (\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)\tilde{Q}(s)\tilde{R} + \tilde{R} \\ &= (\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)[\tilde{\mathcal{Q}}(s) + \tilde{Q}(s)\tilde{R}] + \tilde{R} \end{aligned} \quad (\text{A.3.7})$$

(A.3.7) ha grado zero, e poiché $\tilde{D}_1$ è invertibile ciò può verificarsi solo se è nullo il polinomio entro parentesi quadra. Quindi $\tilde{R}\tilde{R} = \mathbb{I}$, e in conclusione $\tilde{R}$ è invertibile e da (A.3.5) segue

$$\tilde{R}(\tilde{D}_1 s + \tilde{D}_0)R = D_1 s + D_0$$

L'invertibilità di R si prova ripetendo la prova sulla relazione

$$(D_0 + D_1 s)\mathcal{E}^{-1}(s) = \mathcal{E}(s)(\tilde{D}_0 + \tilde{D}_1 s)$$

Esercizio 1. Applicando l'algoritmo di Euclide, si divida a destra la matrice

$$\begin{bmatrix} s^2 + s + 2 & s + 2 \\ s + 1 & s + 4 \end{bmatrix}$$

per la matrice

$$\begin{bmatrix} s + 2 & 0 \\ s + 4 & 2s \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. Si provi che il resto della divisione a destra della matrice $W(s) = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \dots + D_m s^m$ per la matrice $Is + C_0$ è la matrice (costante) $D_0 + D_1 C + D_2 C^2 + \dots + D_m C^m$. Suggerimento: si usino le identità $(s\mathbb{I} - C)^k = (s^{k-1}\mathbb{I} + s^{k-2}C + \dots + sC^{k-2} + C^{k-1})(s\mathbb{I} - C)$, $k = 0, 1, \dots, m$. Si ottenga la formula analoga per la divisione a sinistra.

Possiamo ora provare il teorema 1.

Prova della necessità. Se A_1 ed A_2 sono simili, esiste una matrice invertibile $M \in \mathbb{F}^{n \times n}$ tale che

$$A_2 = M^{-1}A_1M$$

Quindi

$$s\mathbb{I}_n - A_2 = M^{-1}(s\mathbb{I}_n - A_1)M$$

e poiché M^{-1} e M sono matrici polinomiali (di grado zero) con determinante non nullo, si ha subito che $s\mathbb{I}_n - A_1$ ed $s\mathbb{I}_n - A_2$ hanno gli stessi polinomi invarianti.

Prova della sufficienza. Se $s\mathbb{I}_n - A_1$ ed $s\mathbb{I}_n - A_2$ hanno gli stessi polinomi invarianti, e quindi la stessa forma di Smith, per il lemma 1 esistono due matrici invertibili $\tilde{R}$ e R in $\mathbb{F}^{n \times n}$ per cui

$$(s\mathbb{I}_n - A_2) = \tilde{R}(s\mathbb{I}_n - A_1)R \quad (\text{A.3.8})$$

Eguagliando in (A.3.8) i coefficienti delle potenze dei polinomi, si ha $\tilde{R} = R^{-1}$, e quindi

$$A_2 = R^{-1}A_1R$$

Osservazione. Se $\mathcal{E}(s)$ ed $\mathcal{F}(s)$ sono matrici polinomiali a determinante costante per cui risulta

$$(s\mathbb{I}_n - A_2) = \mathcal{E}(s)(s\mathbb{I}_n - A_1)\mathcal{F}(s)$$

le matrici R ed $\tilde{R}$ sono rispettivamente il resto della divisione di $\mathcal{F}(s)$ a destra per $(s\mathbb{I}_n - A_2)$ e di $\mathcal{E}(s)$ a sinistra per $(s\mathbb{I}_n - A_1)$. Per l'esercizio 2, posto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) &= F_0 + sF_1 + s^2F_2 + \dots + s^fF_f \\ \mathcal{E}(s) &= E_0 + sE_1 + s^2E_2 + \dots + s^eE_e \end{aligned}$$

i resti si ottengono sostituendo alle potenze di s le potenze di A_2 a destra dei coefficienti di $\mathcal{Y}(s)$ e le potenze di A_1 a sinistra dei coefficienti di $\mathcal{Q}(s)$:

$$R = F + F_1 A_2^+ + \dots + F_f A_2^f$$

$$\tilde{K} = E + A_1 E_1^+ + \dots + A_1^e E_e$$

Al polinomio monico di grado $n > 0$ in $\mathbb{F}[s]$

$$p(s) = s^n \alpha_{n-1} s^{n-1} + \alpha_{n-2} s^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

associamo la matrice $C_p \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

detta la matrice compagna del polinomio p .

Si verifica immediatamente che $p(s)$ è polinomio caratteristico di C_p : infatti

$$\det(sI_n - C_p) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & & \\ 0 & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & s + \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = p(s)$$

I polinomi invarianti di $(sI_n - C_p)$ si ottengono dai M.C.D. $D_1(s), D_2(s), \dots, D_n(s)$ dei minori di ordine $1, 2, \dots, n$ in $(sI_n - C_p)$. Poiché risulta $D_1(s) = D_2(s) = \dots = D_{n-1}(s) = 1$ e $D_n(s) = p(s)$, per le formule di fi ne par. 8 si ha:

$$\gamma_1(s) = \gamma_2(s) = \dots = \gamma_{n-1}(s) = 1, \quad \gamma_n(s) = p(s)$$

Quindi $(sI_n - C_p)$ ha un solo polinomio invariante diverso da 1, e cioè $p(s)$.

Consideriamo una generica matrice $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$; la "matrice caratteristica" associata $sI_n - A$ avrà polinomi invarianti

$$\gamma_1(s) = \gamma_2(s) = \dots = \gamma_{\nu}(s) = 1, \quad \gamma_{\nu+1}(s), \gamma_{\nu+2}(s), \dots, \gamma_n(s)$$

I polinomi $\gamma_{\nu+1}(s), \gamma_{\nu+2}(s), \dots, \gamma_n(s)$ hanno grado positivo e ciascuno divide il successivo.

Se indichiamo con $C_{\gamma_{\nu+1}}, C_{\gamma_{\nu+2}}, \dots, C_{\gamma_n}$ le matrici compagne di $\gamma_{\nu+1}(s), \dots, \gamma_n(s)$, la matrice diagonale a blocchi companni

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} C_{\gamma_{\nu+1}} & & & \\ & C_{\gamma_{\nu+2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{\gamma_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.9})$$

è simile alla matrice A . Infatti $\hat{A}$ ha dimensioni $n \times n$, e i divisori elementari di $(sI_n - \hat{A})$ sono gli stessi di $(sI_n - A)$ per l'esercizio 6 di II.8. Quindi coincidono i polinomi invarianti di $(sI_n - \hat{A})$ e di $(sI_n - A)$ e basta applicare il teor. 1.

Esercizio 3. Si provi che i polinomi invarianti di $(sI_n - \hat{A})$ sono i polinomi $\gamma_{\nu+1}(s), \gamma_{\nu+2}(s), \dots, \gamma_n(s)$

Sussiste allora il seguente

Teor. 2 Le matrici di $\mathbb{F}^{n \times n}$ che soddisfano le seguenti proprietà

1. sono diagonali a blocchi
2. ciascun blocco è matrice compagna
3. il polinomio caratteristico di ogni blocco divide il polinomio caratteristico del blocco successivo

sono un insieme di forme canoniche per la relazione di similitudine su $\mathbb{F}^{n \times n}$, che diremo forme naturali del primo tipo.

prova. Per verificare la canonicità dell'insieme basta ormai soltanto aggiungere che due matrici distinte soddisfacenti 1, 2, 3 dovranno differire nel blocco i -esimo, per qualche indice i . Quindi differiranno i polinomi invarianti delle matrici caratteristiche associate, e per il teor. 1 le due matrici considerate appartengono a classi

si distinte di similitudine.

Se della matrice caratteristica associata ad $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ consideriamo non più i polinomi invarianti ma i divisori elementari non unitari $[\phi_j(s)]^{c_{ij}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, e se indichiamo con $C_{i,j}$ la matrice compagna di $[\phi_j(s)]^{c_{ij}}$, quando $c_{ij} \neq 0$, allora la matrice diagonale a blocchi la cui diagonale è costituita dai $C_{i,j}$ è individuata a meno di una permutazione dei blocchi diagonali.

Stabilita la permutazione, si ha una matrice $\tilde{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ed è facile verificare (cfr es. 6 di II.8) che i polinomi invarianti di $sI_n - \tilde{A}$ sono proprio $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s)$.

Quindi anche $\tilde{A}$ è simile alla matrice A . Le matrici aventi la struttura di $\tilde{A}$ sono dette forme naturali del secondo tipo.

Mentre le forme naturali del primo tipo sono un insieme di forme canoniche per la relazione di similitudine, le forme naturali del secondo tipo contengono, ma in generale non sono, un insieme di forme canoniche. Infatti non è specificata la permutazione dei blocchi diagonali compagni.

Giova inoltre osservare che mentre i polinomi invarianti $\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_n(s)$ non cambiano se ad $\mathbb{F}$ si sostituisce un qualsiasi sovracampo $\mathbb{F}'$ e quindi la forma normale del primo tipo è indipendente dal corpo su cui è assegnata la matrice A , i divisori elementari, in quanto ottenuti dalla fattorizzazione in polinomi irriducibili dei polinomi invarianti, sono diversi a seconda del corpo su cui si esegue la fattorizzazione.

Ad esempio, sul corpo complesso ogni polinomio invariante fatto - rizza nel prodotto di polinomi del primo ordine, mentre ciò non succede sul corpo reale.

Supponiamo ora che il corpo $\mathbb{F}$ contenga gli autovalori della matrice A (questo è sicuramente vero se $\mathbb{F}$ è algebricamente chiuso, in particolare se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Fattorizziamo il polinomio caratteristico di A nel prodotto di termini lineari:

$$\det(sI_n - A) = (s - \lambda_1)^{p_1} (s - \lambda_2)^{p_2} \dots (s - \lambda_k)^{p_k}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ in $\mathbb{F}$ e con $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$

I polinomi invarianti di $sI_n - A$ sono sottomultipli di $\det(sI_n - A)$ e per le (8.24) la somma dei loro gradi è n . I divisori elementari relativi al polinomio invariante $\gamma_j(s)$ hanno la struttura $(s - \lambda_j)^{c_{ij}}$, con

$$\sum_j c_{ij} = \deg \gamma_j(s) \text{ e, al variare di } i \text{ e di } j, \sum_{i,j} c_{ij} = n$$

Ad ognuno di questi divisori elementari

$$(s - \lambda_j)^{c_{ij}}$$

associamo la matrice quadrata di ordine c_{ij}

$$J_{i,j} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.10})$$

detta blocco di Jordan corrispondente al divisore $(s - \lambda_j)^{c_{ij}}$. La matrice caratteristica $sI_{c_{ij}} - J_{i,j}$ ha come unico polinomio invariante non unitario $(s - \lambda_j)^{c_{ij}}$, che risulta essere anche l'unico suo divisore elementare.

La matrice diagonale a blocchi di Jordan

$$J = \text{diag} \{ J_{i,j} \}_{i,j} \quad (\text{A.3.11})$$

qualunque sia l'ordine dei blocchi sulla diagonale è simile ad A . Infatti $sI - J$ ed $sI - A$ hanno gli stessi divisori elementari per l'esercizio 6 di II.8, e quindi hanno gli stessi polinomi invarianti. Naturalmente ogni classe di equivalenza rispetto alla similitudine contiene matrici aventi la struttura (A.3.11) e per ottenere un insieme di forme canoniche basterà scegliere una soltanto all'interno di ogni classe (p. es., quella in cui i blocchi $J_{i,j}$ sono ordinati lessicograficamente).

La forma (A.3.11) è detta forma canonica di Jordan e possiamo riassumere il precedente discorso nel

Teor. 3. Se il corpo $\mathbb{F}$ è algebricamente chiuso, le forme canoniche di Jordan costituiscono, modulo una permutazione dei blocchi diagonali, un insieme di forme canoniche in $\mathbb{F}^{n \times n}$ rispetto alla relazione di similitudine. ■

La forma canonica di Jordan consente di penetrare profondamente nella struttura della trasformazione lineare T associata alla forma o ad una generica matrice simile ad essa. Richiamiamo soltanto pochi fatti elementari.

Se $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ è la base dello spazio rispetto alla quale la trasformazione lineare è rappresentata da

$$J = \begin{bmatrix} J_{t,1} & & & & \\ & J_{t-1,1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{t-t+1,1} & \\ & & & & J_{t,2} \\ & & & & & J_{t-1,2} \\ & & & & & & J_{t,k} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & J_{t-t+1,k} \\ & & & & & & & & & J_{t-t,k+1,k} \end{bmatrix}$$

con J_{ij} blocchi di Jordan di dimensione c_{ij} allora

1. i sottospazi generati da $(e_1, e_2, \dots, e_{c_{t1}}), (e_{c_{t1}+1}, \dots, e_{c_{t1}+c_{t-1,1}}), \dots$ sono invarianti rispetto a T .

2. sono ciclici rispetto a T , nel senso che ciascuno di essi contiene un vettore che genera, con le sue successive immagini secondo T , l'intero sottospazio.

3. La trasformazione $T - \lambda_j I$ è nilpotente sul sottospazio $\mathcal{N}_j$ generato dai vettori di base corrispondenti ai blocchi $J_{t,j}, J_{t-1,j}, \dots, J_{t-t,j}, j$ ed è invertibile sul sottospazio complementare.

4. l'indice di nilpotenza di $T - \lambda_j I$ sul sottospazio $\mathcal{N}_j$ è c_{tj} , ossia è il massimo esponente di $(s - \lambda_j)$ nei divisori elementari di A .

5. la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore λ_j è t_j (numero di blocchi di Jordan relativi a λ_j): quindi il massimo numero di autovettori linearmente indipendente è il numero dei blocchi di Jordan.

Chiamiamo polinomio minimo di un vettore rispetto a T il polinomio

$p(s)$ di grado minimo per cui è $p(T)v = 0$, e polinomio minimo di un sottospazio $\mathcal{W}$ rispetto a T il polinomio $q(s)$ di grado minimo per cui è

$$q(T)W = 0$$

Si verifica allora che

6. $\mathcal{W}$ ha polinomio minimo $(s - \lambda_j)^{c_{tj}}$ (rispetto a T)

7. Il polinomio $(s - \lambda_1)^{c_{t1}} (s - \lambda_2)^{c_{t2}} \dots (s - \lambda_k)^{c_{tk}}$ è il m.c.m. dei polinomi minimi di tutti i vettori dello spazio, ed è il polinomio minimo di tutto lo spazio.

Quando ciò non dà luogo a confusione, esso viene detto brevemente

"il" polinomio minimo.

8. Ogni polinomio minimo è sottomultiplo del polinomio caratteristico.

9. Il polinomio minimo (di tutto lo spazio, rispetto a T) coincide con quello caratteristico se e solo se $sI_n - A$ ammette un solo polinomio invariante diverso dall'unità.

In molti problemi è necessario conoscere la struttura della forma canonica di Jordan di una data matrice A a prescindere dalla trasformazione di similitudine che consente di ottenerla.

Da quanto detto, la forma di Jordan è completamente individuata dai polinomi invarianti di $sI - A$: basterà quindi con trasformazioni elementari ridurre $sI - A$ in forma canonica diagonale.

Spesso però si deve conoscere anche la matrice M che lega A alla sua forma di Jordan secondo la

$$J = M^{-1}AM$$

Il metodo più banale per ottenere M , una volta costruita J col procedimento sopra descritto, sta nel risolvere il sistema lineare di n^2 equazioni in n^2 incognite (gli elementi di M):

$$AM = MJ$$

scegliendo quelle soluzioni che rendono non singolare M . Questo metodo, concettualmente semplice, è in pratica poco utilizzato perchè importa una mole elevatissima di calcoli.

Un metodo più efficiente si fonda sulla osservazione che abbiamo fatto seguire al teor. 1.

Siano $\mathcal{E}(s)$ ed $\mathcal{F}(s)$ le matrici prodotto di matrici elementari che ri-

ducono $(sI-A)$ in forma canonica diagonale e siano $\mathcal{E}'(s), \mathcal{F}'(s)$ le matrici che riducono $(sI-J)$ in forma canonica diagonale. Poiché A e J sono simili abbiamo la catena di eguaglianze

$$\mathcal{E}'(s)(sI-A)\mathcal{F}'(s) = \text{diag}\{\gamma_1(s), \gamma_2(s), \dots, \gamma_t(s)\} = \mathcal{E}'(s)(sI-J)\mathcal{F}'(s) \quad (\text{A.3.11})$$

Quindi

$$(sI-J) = \mathcal{E}'(s)^{-1} \mathcal{E}(s)(sI-A)\mathcal{F}(s)\mathcal{F}'(s)^{-1}$$

Per (A.3.8), esiste una matrice M tale da soddisfare la

$$J = M^{-1}AM$$

e per la osservazione successiva M è il resto della divisione di $\mathcal{F}(s)\mathcal{F}'(s)^{-1}$ a destra per $(sI-J)$, M^{-1} è il resto della divisione di $\mathcal{E}'(s)^{-1}\mathcal{E}(s)$ a sinistra per $sI-A$.

La procedura si può quindi spezzare nei seguenti passi

1. diagonalizzazione di $(sI-A)$ per equivalenza, e costruzione della matrice $\mathcal{F}(s)$ a partire dalle matrici elementari impiegate come operatori a destra
2. costruzione di J utilizzando i polinomi invarianti ottenuti
3. diagonalizzazione di $(sI-J)$ per equivalenza e costruzione della matrice $\mathcal{F}'(s)^{-1}$ a partire dalle matrici elementari impiegate come operatori a destra
4. divisione di $\mathcal{F}(s)\mathcal{F}'(s)^{-1}$ a destra per $sI-J$:

$$\mathcal{F}(s)\mathcal{F}'(s)^{-1} = (sI_n - J)Q(s) + M$$

Un esempio completo si trova in [G.17].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- A.1 B.D.O.Anderson, S.Vongpanitlerd "Network Analysis and Synthesis" Prentice Hall, 1973
- A.2 B.D.O.Anderson, J.B.Moore "Linear Optimal Control" Prentice Hall, 1971
- B.1 R.W.Brockett "Finite Dimensional Linear Systems" J.Wiley, 1970
- B.2 V.Belevitch "Classical Network Theory" Holden-Day, 1968
- B.3 G.Birkhoff, S.MacLane "Algebra" MacMillan, 1967
- B.4 S.Barnett "Matrices in Control Theory" Van-Nostrand Reinhold, 1971
- B.5 R.Bellman "Introduction to Matrix Analysis" Mc Graw, 1960
- B.6 G.Bertoni, S.Beghelli, G.Capitani, M.Tibaldi "Teoria e Tecnica della Regolazione Automatica" Pitagora, 1973
- C.1 H.Cartan "Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques" Hermann, 1961
- C.2 G.Cariolaro "Teoria dei Segnali" Cleup, 1970
- C.3 W.K.Chen "Theory and Design of Broadband Matching Networks" Pergamon, 1976
- G.1 F.R.Gantmacher "The Theory of Matrices" Chelsea, 1959
- K.1 H.Kwakernaak, R.Sivan "Linear Optimal Control Systems" Wiley, 1972
- K.2 D.L.Kleinman "On an Iterative Technique for Riccati Equation Computations" IEEE Trans AC, Feb. 1968, pp. 114 - 115
- L.1 S.Lang "Algebra Lineare" Boringhieri, 1970
- M.1 M.Marcus, H.Ming "A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities" Allyn and Bacon, 1964
- N.1 R.W.Newcomb "Linear Multiport Synthesis" Mc Graw, 1966
- R.1 S.Rinaldi "Teoria dei Sistemi" Hoepli, 1974
- S.1 L.Schwartz "Cours d'Analyse" Hermann, 1967
- S.2 G.Someda "Elettrotecnica Generale" Patron, 1964
- T.1 E.C.Titchmarsh "Introduction to the Theory of Fourier Integrals" Oxford, 1937

- W.1 J.C.Willems "Least Squares Stationary Optimum Control and the Algebraic Riccati Equation" IEEE Trans AC, Dec 1971, pp 621 - 634
- W.2 J.C.Willems "Dissipative Dynamical Systems" Arch. for Rat. Mech. and Anal., vol 45, n. 5, 1972, pp. 321 - 393
- W.3 M.R.Wohlers "Lumped and Distributed Passive Networks" Academic Press, 1969
- Y.1 D.C.Youla "On the Factorization of Rational Matrices" IRE Trans IT, July 1961, pp. 685 - 698

I N D I C E

CAP. I - RICHIAMI DI ANALISI DEI SISTEMI LINEARI CONTINUI		
I.1	Definizione di sistema	Pag. 1
I.2	Proprietà dell'insieme degli stati	5
I.3	Rappresentazione differenziale dei sistemi lineari stazionari	7
I.4	Controllabilità dei sistemi lineari	12
I.5	Osservabilità dei sistemi lineari	20
I.6	Applicazioni all'analisi elementare di reti elettriche	26
CAP. II - ELEMENTI DI TEORIA DELLA REALIZZAZIONE		
II.1	Che cos'è una realizzazione	44
II.2	Proprietà delle realizzazioni minime	46
II.3	Costruzione di una realizzazione per $W(s)$ scalare	55
II.4	Costruzione di una realizzazione per $W(s)$ matriciale	60
II.5	Contenuto impulsivo della risposta di un GLS	66
II.6	Grado di McMillan	70
II.7	Prodotto di funzioni di trasferimento	84
II.8	Forma canonica di Smith	87
II.9	Forma canonica di Smith-McMillan per una matrice razionale	101
II.10	Realizzazione con l'uso della f.c. di Smith-McMillan	105
CAP. III - ELEMENTI DI TEORIA DEI MINIMI QUADRATI		
III.1	Forme bilineari	115
III.2	Spazi vettoriali a prodotto interno	121
III.3	Spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ con prodotto interno (semi)definito positivo	131
III.4	Equazione differenziale di Riccati a coefficienti scalari	150
III.5	Problemi di ottimo ed equazione differenziale matriciale di Riccati	156
III.6	Cenni a problemi di controllo ottimo su intervallo finito	168
III.7	Problemi di ottimo ed equazione algebrica di Riccati	182
III.8	La stabilità nel problema del regolatore	191
III.9	Soluzioni di A.R.E. e soluzioni del problema del regolatore	199

CAP. IV - TECNICHE DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI RICCATI

IV.1	Soluzione dell'equazione differenziale di Riccati	Pag. 202
IV.2	Soluzione di A.R.E. mediante la forma di Jordan	" 206
IV.3	Soluzione di A.R.E. con metodi iterativi	" 212

CAP. V - SISTEMI DISSIPATIVI

V.1	Proprietà generali dei sistemi dinamici dissipativi	" 218
V.2	Relazioni fra raggiungibilità e dissipatività	" 223
V.3	Sistemi dissipativi senza perdite	" 227
V.4	Condizioni di dissipatività per un sistema lineare	" 229
V.5	Sistemi lineari senza perdite	" 235
V.6	Dissipazione e sistemi lineari generalizzati	" 237

CAP. VI - STUDIO IN S DEL LEGAME INGRESSO/USCITA NEI SISTEMI LINEARI DISSIPATIVI

VI.1	Richiami di teoria delle funzioni analitiche	" 244
VI.2	Matrici hermitiane e forme hermitiane	" 246
VI.3	Matrici limitate reali	" 251
VI.4	Matrici positive reali	" 254
VI.5	Relazioni fra matrici P.R. e matrici B.R.	" 262
VI.6	Matrici B.R. e P.R. senza perdite	" 265
VI.7	Matrice di diffusione	" 268
VI.8	Condizioni di dissipatività per un (G)LS nel dominio s	" 271
VI.9	Studio dei sistemi lineari senza perdite nel dominio s	" 280

CAP. VII - STRUTTURA ALGEBRICA DEI SISTEMI LINEARI DISSIPATIVI

VII.1	Il lemma positivo reale e la funzione di dissipazione	" 282
VII.2	Soluzioni limite del lemma positivo reale	" 287
VII.3	Matrici non real-ridotte e realizzazioni dissipative	" 297
VII.4	Il lemma positivo reale per sistemi senza perdite	" 305
VII.5	Aspetti computazionali	" 307
VII.6	Fattorizzazione spettrale	" 310
VII.7	Struttura dei fattori spettrali	" 317

APPENDICE ALLA PARTE PRIMA

A.1	Spazi vettoriali	" 326
A.2	Esponenziali di matrici	" 334